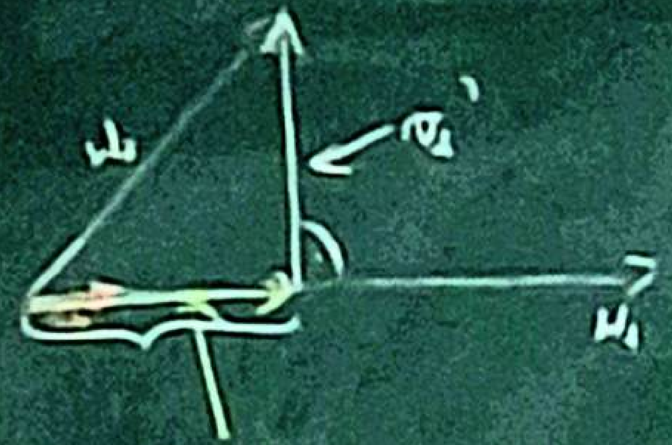
① $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ - baza przestrzeni V

② 

$\|v_1\| = 1$

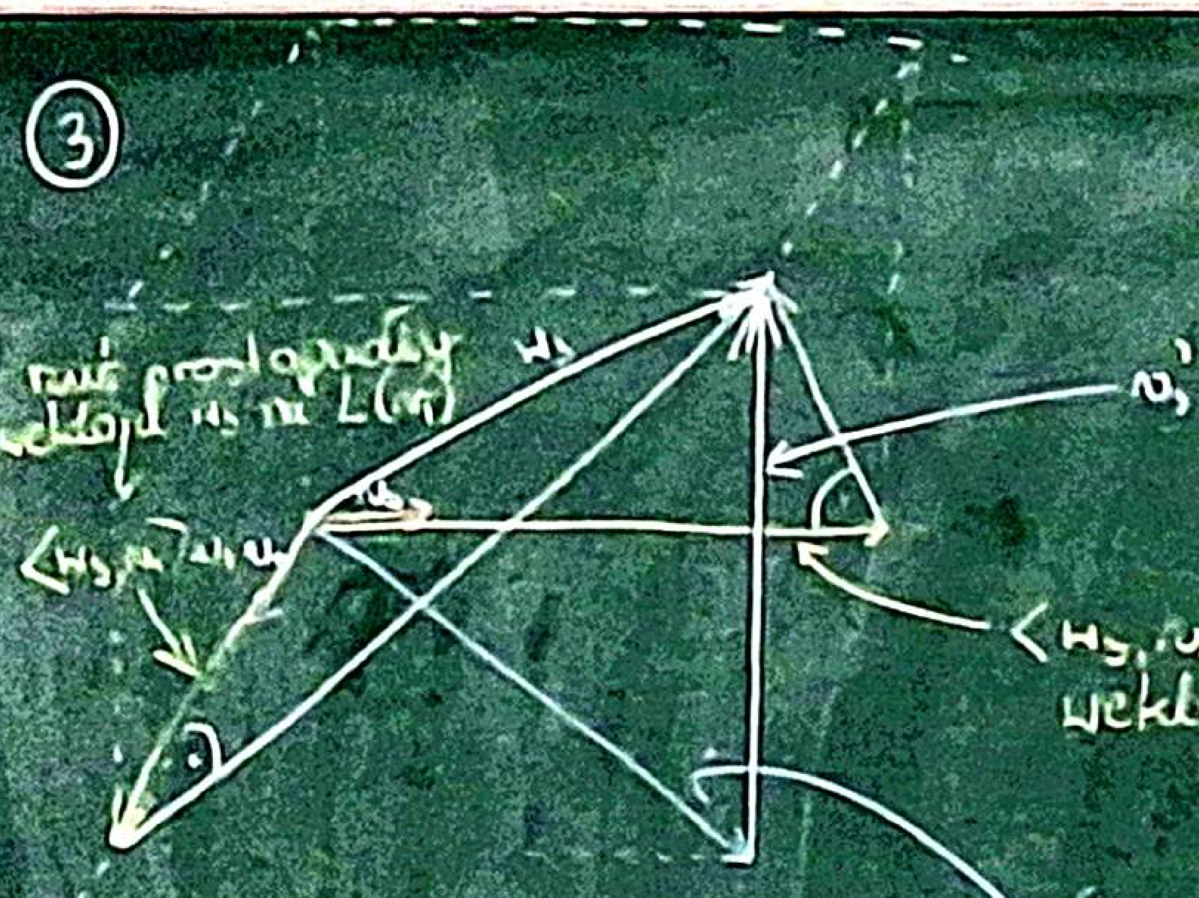
$\langle u_2, v_1 \rangle v_1$ - rzut prostopadły wektora u_2 na podprzestrzeń $L(v_1)=L(u_1)$

$\langle u_2, v_1 \rangle v_1 + v_2' = u_2$

$v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$

$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2'$

③



$\langle w_3, v_2 \rangle v_2$ – rzut prostopadły wektora w_3 na $L(v_2)$

$\langle w_3, v_1 \rangle v_1 + \langle w_3, v_2 \rangle v_2$
rzut prostopadły wektora w_3 na $L(v_1, v_2)$

$$w_3 = v_3' + \langle w_3, v_1 \rangle v_1 + \langle w_3, v_2 \rangle v_2$$

$$v_3' = w_3 - \left(\langle w_3, v_1 \rangle v_1 + \langle w_3, v_2 \rangle v_2 \right) = w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2$$

пр $V = \mathbb{R}^4$, $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$S' = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_4} \Bigg),$$

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle} = \sqrt{1+1+1+1} = 2$$

$$\langle w_2, w_1 \rangle = -1+1+1-1 = 0$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \sqrt{4} = 2$$

$$v_3 = \frac{1}{\|v_3'\|} v_3'$$

① $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{2} w_1$

② $v_2' = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = w_2 - \langle w_2, \frac{1}{2} w_1 \rangle \cdot \frac{1}{2} w_1 = w_2 - \frac{1}{4} \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} w_1 =$

$= w_2$

$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} \cdot v_2' = \frac{1}{2} w_2$

③ $v_3' = w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2 =$

$= w_3 - \langle w_3, \frac{1}{2}w_1 \rangle \frac{1}{2}w_1 - \langle w_3, \frac{1}{2}w_2 \rangle \frac{1}{2}w_2 =$

$= w_3 - \frac{1}{4}\langle w_3, w_1 \rangle w_1 - \frac{1}{4}\langle w_3, w_2 \rangle w_2 = w_3$

$v_3 = \frac{1}{\|v_3'\|} \cdot v_3' = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} w_3}$

$\langle w_3, w_1 \rangle = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$

$\langle w_3, w_2 \rangle = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$

$\| v_3' \| = \sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle} = \sqrt{2}$

4

$$v_4' = w_4 - \langle w_4, v_1\rangle v_1 - \langle w_4, v_2\rangle v_2 - \langle w_4, v_3\rangle v_3 =$$

$$= w_4 - \langle w_4, \tfrac{1}{2} w_1\rangle \tfrac{1}{2} w_1 - \langle w_4, \tfrac{1}{2} w_2\rangle \tfrac{1}{2} w_2 - \langle w_4, \tfrac{1}{\sqrt{2}} w_3\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}} w_3 =$$

$$= w_4 - \tfrac{1}{4} \underbrace{\langle w_4, w_1\rangle}_{2} w_1 - \tfrac{1}{4} \underbrace{\langle w_4, w_2\rangle}_{0} w_2 - \tfrac{1}{2} \underbrace{\langle w_4, w_3\rangle}_{1} w_3 =$$

$$= w_4 - \tfrac{1}{2} w_1 - \tfrac{1}{2} w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\langle w_4, w_1\rangle = 2$$

$$\langle w_4, w_2\rangle = 0$$

$$\langle w_4, w_3\rangle = 1$$

$$v_4 = \frac{1}{\|v_4'\|} v_4' = \frac{2}{\sqrt{2}} v_4' = \sqrt{2}\, v_4'$$

$$\|v_4'\| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \right)$$

baza ortonormalna pr. $\mathbb{R}^4$

np. Niech $W < \mathbb{R}^4$

pn euklidesowa

W $\mathbb{R}^4$ kanoniczny iloczyn skalarny

Niech
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

będzie bazą przestrzeni W. Stosując algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną prz. W, a następnie znaleźć rzut prostopadły w wektora $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \in V$ na W

① $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1$ $\qquad \|w_1\| = \sqrt{9+1+1+25} = 6$

$v_1 = \frac{1}{6} w_1$ $\qquad \langle w_2, w_1 \rangle = 72$

② $v_2' = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = w_2 - \frac{1}{36} \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{72} w_1 =$

$$= w_2 - 2w_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \|v_2'\| = 2$$

$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' = \frac{1}{2} v_2'$

③ $v_3' = w_3 - \langle w_3, u_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2 =$

$$= w_3 - \frac{1}{36}\underbrace{\langle w_3, w_1\rangle}_{36} w_1 - \frac{1}{4}\underbrace{\langle w_3, u_2'\rangle}_{-4} u_2'$$

$$\boxed{\begin{aligned}\langle w_3, w_1\rangle &= 36\\ \langle w_3, v_2'\rangle &= -4\end{aligned}}$$

$$= w_3 - w_1 + v_2' =$$

$$= \begin{bmatrix}5\\1\\-5\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\1\\1\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\-5\\-1\end{bmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|v_3'\|} v_3' = \frac{1}{6} v_3' \qquad \|v_3'\| = \sqrt{9+1+25+1} = 6$$

$$S = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\5\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\\1\\-5\\-1\end{bmatrix} \right)$$ – baza ortonormalna W

$$w = \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \langle v, v_3\rangle v_3 =$$

$$= \frac{1}{36}\underbrace{\langle v, w_1\rangle}_{36} w_1 + \frac{1}{4}\underbrace{\langle v, v_2'\rangle}_{4} v_2' + \frac{1}{36}\underbrace{\langle v, v_3'\rangle}_{-36} v_3' =$$

$$= w_1 + v_2' - v_3' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\langle v, w_1\rangle = 36, \quad \langle v, v_2'\rangle = 4, \quad \langle v, v_3'\rangle = -36$$

FORMY KWADRATOWE

np. Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{R}$, mamy:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 \geq 0$$

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = \underbrace{x^2 + 2xy + y^2} + 2y^2 = \underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} \geq 0$$

def. <u>Charakterystyką ciała K</u> nazywamy najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $n \cdot 1 = 0$ w ciele K i ozn. $\operatorname{char} K$.
Jeśli taka liczba nie istnieje, to $\operatorname{char} K = 0$.

np p - liczba pierwsza

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p \qquad \operatorname{char} \mathbb{F}_p = p$

$\operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = 0$

FAKT Charakterystyka ciała jest równa 0 lub jest l. pierwszą.

uzas. Niech $n = \operatorname{char} K$. Przypuśćmy, że n jest l. złożoną

$$0 = n \cdot 1 = \underbrace{(n_1 n_2)}_{1 < n_1, n_2 < n} \cdot 1 = (n_1 \cdot 1)\cdot(n_2 \cdot 1) \Rightarrow n_1 \cdot 1 = 0 \vee n_2 \cdot 1 = 0 \quad \text{spr.}$$

(bo w ciele nie ma dzielników zera)

def ① Niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy przez X kolumnę zmiennych:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Formą kwadratową o współczynnikach w ciele K nazywamy każdy wielomian postaci:

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

jednorodny stopnia drugiego z pierścienia $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$

np p - liczba pierwsza

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p \qquad \operatorname{char} \mathbb{F}_p = p$$

$$\operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = 0$$

FAKT Charakterystyka ciała jest równa 0 lub jest l. pierwszą.

dow. Niech $n = \operatorname{char} K$. Przypuśćmy, że n jest l. złożoną

$$0 = n \cdot 1 = (n_1 n_2) \cdot 1 = (n_1 \cdot 1)(n_2 \cdot 1) \Rightarrow n_1 \cdot 1 = 0 \vee n_2 \cdot 1 = 0$$

$1 < n_1, n_2 < n$ (bo w ciele nie ma nietrywialnych dzielników zera) spr. $\blacksquare$

(2) Załóżmy, że char $K \neq 2$. Niech V będzie przestrzenią liniową nad K.

Funkcją kwadratową lub funkcjonałem kwadratowym nazywamy każde przekształcenie

$$q : V \to K$$

spełniające warunki:

(i) $\forall_{a \in K}\ \forall_{v \in V}\ :\ q(av) = a^2 q(v)$

(ii) f-cja $\beta : V \times V \to K$ określona wzorem:

$$\beta(v,u) = \frac{1}{2}\left(q(v+u) - q(v) - q(u)\right)$$

jest formą dwuliniową.

np.

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \qquad n > 7$$

$$\cup$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

np. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^5 + x_1 x_2 x_3^3 + 10 x_3^4 - x_2$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{deg=3} + \underbrace{x_3^2 x_1}_{deg=3} - \underbrace{x_2 x_4 x_5}_{deg=3}$$

Stw. 9.1 Niech $q: V \to K$, $\operatorname{char} K \neq 2$, V – przestrzeń lin. nad K. Wówczas następujące warunki są równoważne.

① q jest f-cją kwadratową

② $q(v) = \beta(v,v)$ dla pewnej formy dwuliniowej symetrycznej $\beta: V \times V \to K$

dow. 1 ⇒ 2

Zał., że q jest f-jonałem kwadratowym

Z (ii) def. f-jonału wiemy, że mamy

formę dwuliniową $\beta: V\times V \to K$ t. że

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

$$\beta(v,v) = \frac{1}{2}\left(q(v+v) - q(v) - q(v)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q(2v) - 2q(v)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4q(v) - 2q(v)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2q(v) = q(v)$$

$$\beta(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q(v+u) - q(v) - q(u) \right) = \beta(v,u)$$

② $\Rightarrow$ ① Niech $\beta: V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową symetryczną

Niech $q(v) = \beta(v,v)$.

$a \in K$

$$q(av) = \beta(av,av) = a^2 \beta(v,v) = a^2 q(v).$$

$$q(v+u) = \beta(v+u, v+u) = \underbrace{\beta(v,v)} + \underbrace{\beta(u,v) + \beta(v,u)} + \underbrace{\beta(u,u)} =$$

$$= q(v) + 2\beta(v,u) + q(u)$$

$$q(v+u) = q(v) + 2\beta(v,u) + q(u)$$

$$2\beta(v,u) = q(v+u) - q(v) - q(u)$$

$$\beta(v,u) = \frac{1}{2}\left(q(v+u) - q(v) - q(u) \right) \quad \blacksquare$$

$$q(v+w) = q(v) + 2\beta(v,w) + q(w)$$

$$2\beta(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$$

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) \quad \blacksquare$$

UWAGA Dla danego funkcjonału kwadratowego q forma β ze stw. 9.1 jest jednoznacznie wyznaczona

Stw. 9.2 Jeśli $B = [b_{ij}] \in M_n(K)$ jest macierzą utworzoną ze współczynników formy kwadratowej $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$ to formę q można zapisać w postaci:

def ① Niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy przez X kolumnę zmiennych:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Formą kwadratową o współczynnikach w ciele K nazywamy każdy wielomian postaci:

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

jednorodny stopnia drugiego z pierścienia $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$q(X) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \, B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T B X.$$