Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Информатика и системы управления»

Кафедра «Системы обработки информации и управления»

Домашнее задание 1

по дисциплине «Архитектура АСОИУ»
на тему:

«Теория множеств»

Проверил:
Преподаватель кафедры ИУ5
Шук .В. П

Выполнил:
студент группа ИУ5-31Б:
Кашима Ахмед.

2023

Показать на примерах наличие свойств множеств

Свойство рефлексивности - $A \subseteq A$

Свойство антисимметричности: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$

Свойство транзитивности: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$

Пусть есть множество A={5, 8, 13, 21, 34}. Каждое множество входит в самого себя, то есть, поскольку A={5, 8, 13, 21, 34}, то оно входит в A={5, 8, 13, 21, 34}, так как все элементы множества A являются элементами множества A. Следовательно, $A \subseteq A$.

Пусть есть множество A={4, 8, 16, 21, 40} и множество B={4, 8, 16, 21, 40}. Тогда $A \subseteq B$, так как все элементы множества A являются элементами множества B, и $B \subseteq A$, так как все элементы множества B являются элементами множества A. Из этого можно сделать вывод, что A=B.

Пусть есть множество A={4, 5, 8, 10, 20}, множество B={1, 4, 5, 8, 10, 15, 20}, и множество C={1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15, 20}. Тогда, $A \subseteq B$, так как все элементы множества A являются элементами множества B. $B \subseteq C$, так как все элементы множества B являются элементами множества C. Отсюда можно сделать вывод, что все элементы множества A будут являться элементами множества C, то есть $A \subseteq C$.

Проиллюстрировать на примерах операции

Объединение, Пересечение, Дополнение,

$A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$

Пусть есть множества A={0, 3, 6, 9, 12}, B={0, 2, 4, 6, 8, 10, 12}. Тогда объединением этих множеством будет являться множество, содержащее все элементы множеств А и В, то есть $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Пересечением этих множеством будет являться множество, содержащее только общие элементы множеств А и В, то есть $A \cap B = \{0, 6, 12\}$. Дополнением множества А является множество, содержащее все элементы, помимо элементов множества А. То есть $\bar{A}$ будет содержать все возможные элементы, помимо элементов $\{0, 3, 6, 9, 12\}$.

Показать на примерах правильность математических соотношений

φ(A ∪ B) = φ(A) ∨ φ(B) - характеристическая функция объединения A ∪ B

Пусть есть некоторое множество $A=\{3, 7, 22, 49, 99\}$ и множество $B=\{6, 7, 9, 22, 49, 200\}$. Тогда объединение множеств $A \cup B =\{3, 6, 7, 9, 22, 49, 99, 200\}$. φ(A)=0, если элемент не принадлежит множеству А и равно 1, если принадлежит. Аналогично с множеством В. φ(A ∪ B)=1, если элемент принадлежит множеству А или множеству В, и равен 0, если не принадлежит ни одному из множеств. Тогда, если элемент не принадлежит объединению, то φ(A ∪ B)=0, φ(A)=0, φ(B)=0, следовательно, по формуле φ(A ∪ B) = φ(A) ∨ φ(B): 0=0+0 – верное соотношение. Если элемент принадлежит множеству А и не принадлежит множеству В, то φ(A ∪ B)=1, φ(A)=1, φ(B)=0. По формуле: 1=0+1 – верное соотношение. Аналогично для случая, где элемент принадлежит множеству В и не принадлежит множеству А. Если элемент принадлежит обоим множествам одновременно, то φ(A ∪ B)=1, φ(A)=1, φ(B)=1. Тогда: 1=1+1 – верное соотношение. Следовательно, данное математическое соотношение верно.

$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \land \varphi(B)$ - характеристическая функция пересечения $A \cap B$

Пусть есть некоторое множество A={1, 4, 17, 33, 50} и множество B={0, 4, 17, 22, 49}. Тогда пересечение множеств $A \cup B$ ={4, 17}. }. $\varphi(A)=0$, если элемент не принадлежит множеству A и равно 1, если принадлежит. Аналогично с множеством B. $\varphi(A \cup B)=1$, если элемент принадлежит множеству A и множеству B, и равен 0, если не принадлежит хотя бы одному из множеств. Тогда, если элемент не принадлежит пересечению, то $\varphi(A \cup B)=0$, $\varphi(A)=0$, $\varphi(B)=0$, следовательно, по формуле $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \land \varphi(B)$: 0=0*0 – верное соотношение. Если элемент принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B, то $\varphi(A \cup B)=0$, $\varphi(A)=1$, $\varphi(B)=0$. По формуле: 0=0*1 – верное соотношение. Аналогично для случая, где элемент принадлежит множеству B и не принадлежит множеству A. Если элемент принадлежит обоим множествам одновременно, то $\varphi(A \cup B)=1$, $\varphi(A)=1$, $\varphi(B)=1$. Тогда: 1=1*1 – верное соотношение. Следовательно, данное математическое соотношение верно.

$\varphi(\bar{A}) = \neg\varphi(A)$ - характеристическая функция дополнения $\bar{A}$

Пусть есть некоторое множество A={1, 4, 9, 16, 25}. $\varphi(\bar{A})=1$, если элемент не принадлежит множеству A и равно 0, если принадлежит. $\varphi(A)=0$, если элемент не принадлежит множеству A и равно 1, если принадлежит. Соответственно, $\neg\varphi(A)=1$, если элемент не принадлежит множеству A и равно 0, если принадлежит. То есть, если элемент не принадлежит множеству A, то $\varphi(\bar{A})=1$, $\neg\varphi(A)=1$, следовательно, по формуле: 1=1 – верное соотношение. Если элемент принадлежит множеству A, то $\varphi(\bar{A})=0$, $\neg\varphi(A)=0$, следовательно, по формуле: 0=0 – верное соотношение.

Показать на примерах верность математических выражений

Пусть имеются множества A={7, 14, 21, 28, 35}, B={7, 10, 14, 19, 25}, C={1, 7, 19, 21, 25, 28}.

Коммутативность

A ⋃ B = B ⋃ A

A ⋂ B = B ⋂ A

Объединение нескольких множеств это всегда сумма этих множеств, а от перестановки слагаемых в сумме результат не меняется: A ⋃ B = {7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}; B ⋃ A = {7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}. Следовательно, A ⋃ B = B ⋃ A. Пересечение нескольких множеств это всегда произведение этих множеств, а от перестановки множителей в произведении результат не меняется: A ⋂ B = {7, 14}; B ⋃ A = {7, 14}. Следовательно, A ⋂ B = B ⋂ A.

Ассоциативность

(A ⋃ B) ⋃ C = A ⋃ (B ⋃ C)

(A ⋂ B) ⋂ C = A ⋂ (B ⋂ C)

Здесь мы покажем, что порядок выполнения действий никак не влияет на результат. A ⋃ B = {7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}; (A ⋃ B) ⋃ C = {1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}. (B ⋃ C) = {1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28}; (A ⋃ B) ⋃ C = {1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}. Получили, (A ⋃ B) ⋃ C = A ⋃ (B ⋃ C).

A ⋂ B = {7, 14}; (A ⋂ B) ⋂ C = {7}. B ⋂ C = {7, 19, 25}; A ⋂ (B ⋂ C)= {7}. Получили, (A ⋂ B) ⋂ C = A ⋂ (B ⋂ C).

Дистрибутивность пересечения относительно объединения

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Покажем, что левая часть равна правой. $B \cup C = \{1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28\}$; $A \cap (B \cup C) = \{7, 14, 21, 28\}$. $A \cap B = \{7, 14\}$; $A \cap C = \{7, 21, 28\}$. Тогда, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{7, 14, 21, 28\}$. Отсюда делаем вывод, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Дистрибутивность объединения относительно пересечения

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Покажем это равенство на примере. $B \cap C = \{7, 19, 25\}$; $A \cup (B \cap C) = \{7, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. Правая часть: $A \cup B = \{7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$; $A \cup C = \{1, 7, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$; $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{7, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. Следовательно, равенство верное.

Правила поглощения

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Рассмотрим это равенство на примере. $A \cap B = \{7, 14\}$; $A \cup (A \cap B) = \{7, 14, 21, 28, 35\}$. Получили, что $A \cup (A \cap B)$ равно множеству $A=\{7, 14, 21, 28, 35\}$.

$A \cup B = \{7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$; $A \cap (A \cup B) = \{7, 14, 21, 28, 35\}$. Видим, что $A \cap (A \cup B)$ совпадает с множеством A, как и должно быть.

Правила де Моргана

$$\mathbf{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$\mathbf{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

Рассмотрим это свойство на примере. $A \cup B = \{7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$, тогда $\overline{A \cup B}$ равно всем элементам, кроме $\{7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. $\overline{A}$ равно всем элементам, кроме $\{7, 14, 21, 28, 35\}$; $\overline{B}$ равно всем элементам, помимо $\{7, 10, 14, 19, 25\}$. Тогда $\overline{A} \cup \overline{B}$ равно всем элементам, кроме $\{7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. Следовательно, данное равенство верное.

Обобщение правил де Моргана

$$\mathbf{\overline{\bigcup A\alpha} = \bigcap \overline{A\alpha}\text{ , для }\alpha \in I}$$

$$\mathbf{\overline{\bigcap A\alpha} = \bigcup \overline{A\alpha}\text{ , для }\alpha \in I}$$

Данное свойство аналогично предыдущему. Распишем это свойство для трёх множеств. $A \cup B \cup C = \{1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. Тогда левая часть равенства равна всем элементам, кроме $\{1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35\}$. $\overline{A}$ равно всем элементам, кроме $\{7, 14, 21, 28, 35\}$; $\overline{B}$ равно всем элементам, помимо $\{7, 10, 14, 19, 25\}$; дополнение C равно всем элементам, кроме $\{1, 7, 19, 21, 25, 28\}$.

Тогда пересечение этих трёх множеств равно всем элементам, кроме {1, 7, 10, 14, 19, 21, 25, 28, 35}. Делаем вывод, что левая часть равна правой.

$A \cap B \cap C = \{7\}$. $\overline{A}$ равно всем элементам, кроме {7, 14, 21, 28, 35}; $\overline{B}$ равно всем элементам, помимо {7, 10, 14, 19, 25}; дополнение C равно всем элементам, кроме {1, 7, 19, 21, 25, 28}. Тогда объединение этих трёх множеств равно всем элементам, кроме {7}. Делаем вывод, что левая часть равна правой.

Свойства универсального и пустого множества

$\mathbf{A \cup \overline{A} = E}$

$\mathbf{A \cap \overline{A} = \emptyset}$

$\mathbf{\overline{E} = \emptyset} \quad \mathbf{A \cup \emptyset = A} \quad \mathbf{A \cup E = E}$

$\mathbf{\overline{\emptyset} = E} \quad \mathbf{A \cap E = A} \quad \mathbf{A \cap \emptyset = \emptyset}$

Множество A={7, 14, 21, 28, 35}, тогда дополнение множества A равно всем элементам, помимо {7, 14, 21, 28, 35}, следовательно, объединение этих множеств содержит все возможные элементы, а значит равно универсальному множеству E. Пересечение этих множеств не содержит элементов, поскольку эти множества не могут иметь общих элементов, следовательно, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Поскольку универсальное множество содержит все элементы, то его дополнение не содержит ни одного элемента, то есть

$\overline{E} = \emptyset$.

Объединение множества A={7, 14, 21, 28, 35} с пустым множеством равняется множеству A, так как к этому множеству не добавляются никакие элементы.

Объединение множества A={7, 14, 21, 28, 35} с универсальным множеством равняется универсальному множеству, так как оно уже содержит все элементы и прибавлять к ним что-то бессмысленно.

Дополнение пустого множества равняется универсальному множеству, так как пустое множество не содержит элементов, а значит дополнение должно содержать все элементы.

Пересечение множества A={7, 14, 21, 28, 35} с универсальным множеством E равно множеству A, так как пересечение элементов множества A со всеми возможными элементами даст множество A.

Пересечение множества A={7, 14, 21, 28, 35} с пустым множеством даст пустое множество, так как пересечение множества без элементов с любым другим множеством не может дать ничего, так как у этих множеств не может быть общих элементов.

Показать на примерах верность математических соотношений

Пусть имеются множества A={1, 4, 9, 16, 25}, B={1, 4, 7, 10, 13}, C={1, 3, 5, 7, 9}.

Разность множеств

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Рассмотрим свойство на примере. $A \setminus B = \{9, 16, 25\}$. $\overline{B}$ равно всем элементам, помимо {1, 4, 7, 10, 13}; $A \cap \overline{B} = \{9, 16, 25\}$. Следовательно, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Симметричная разность множеств

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Рассмотрим свойство на примере. $A \Delta B = \{7, 9, 10, 13, 16, 25\}$. Правая часть: $A \setminus B = \{9, 16, 25\}$; $B \setminus A = \{7, 10, 13\}$. Тогда $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{7, 9, 10, 13, 16, 25\}$. Как можно заметить, левая часть равна правой.

Коммутативность

$A \oplus B = B \oplus A$

Рассмотрим на примере, что перестановка слагаемых не меняет сумму. $A \oplus B = \{7, 9, 10, 13, 16, 25\}$. $B \oplus A$ также равно $\{7, 9, 10, 13, 16, 25\}$, поскольку объединение множеств не зависит от порядка объединения.

Ассоциативность

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

Покажем, что в данном случае скобки не играют важной роли. $B \oplus C = \{3, 4, 5, 9, 10, 13\}$. Тогда, $A \oplus (B \oplus C) = \{1, 3, 5, 10, 13, 16, 25\}$. Правая часть: $A \oplus B = \{7, 9, 10, 13, 16, 25\}$. Тогда, $(A \oplus B) \oplus C = \{1, 3, 5, 10, 13, 16, 25\}$. Следовательно, левая часть равна правой.

Дистрибутивность относительно пересечения

$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

Рассмотрим свойство на примере. $B \oplus C = \{3, 4, 5, 9, 10, 13\}$. Тогда $A \cap (B \oplus C) = \{4, 9\}$. Правая часть: $A \cap B = \{1, 4\}$. $A \cap C = \{1, 9\}$. Тогда $(A \cap B) \oplus (A \cap C) = \{4, 9\}$, как и в левой части.

Список литературы

1. Кантор Г.: Труды по теории множеств. - М.: Наука, 1985

2. Александров П.С.: Введение в теорию множеств и общую топологию. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009

3. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010

4. Гуров, С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки. Определения, свойства, примеры / С.И. Гуров. - М.: Либроком, 2012