

Metoda Gaussa-Seidela dla równań macierzowych $AX=B$ oraz $XA=B$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ lub $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

KRÓTKI OPIS METODY

Metoda Gaussa-Seidela jest jedną z metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań liniowych.

Mamy układ równań $Ax=b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $x, b \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Startujemy z danego przybliżenia początkowego $x^{(0)}$ i tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $x^{(k)}$. Za przybliżenie początkowe, jeśli nie jest ono znane, można przyjąć wektor zerowy lub wektor o elementach losowych.

Algorytm metody można zapisać następująco:

```
 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$  – przybliżenie początkowe  
for k = 0, 1, ... (dopóki nie będzie spełniony warunek stopu)  
  for i = 1, 2, ..., n  
     $x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j < i}^n a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1, j > i}^n a_{ij}x_j^{(k)}) / a_{ii}$   
  end  
end
```

Jak widać, przy obliczaniu $x_i^{(k+1)}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) mamy już obliczone $x_1^{(k+1)}$ do $x_{i-1}^{(k+1)}$. Można zatem użyć tych najbardziej aktualnych przybliżeń przy obliczaniu $x_i^{(k+1)}$.

Metoda Gaussa-Seidela zapisana w sposób macierzowy:

$x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + c_{GS}$, $k = 0, 1, \dots$,
gdzie $B_{GS} = -(L + D)^{-1}U$ oraz $c_{GS} = (L + D)^{-1}b$

Macierz B_{GS} to macierz iteracji. Macierz A zapisujemy w postaci $A=L+D+U$, gdzie L jest macierzą trójkątną zawierającą elementy leżące pod diagonalą A , U jest macierzą trójkątną zawierającą elementy leżące nad diagonalą A , a D macierzą zawierającą elementy diagonalni.

Macierz iteracji zależy tylko od macierzy układu równań, czyli macierzy A , a nie od wektora b .

Metoda ta nie zawsze będzie zbieżna, co opisane będzie w dalszej części.

KRÓTKI OPIS PROGRAMU

Program składa się z następujących funkcji:

- gauss_seidel_AX(A, B)
Rozwiązuje równanie macierzowe $AX=B$ metodą Gaussa-Seidela
Wejście:
 - A - macierz kwadratowa układu równań wymiaru $n \times n$
 - B - macierz wymiaru $n \times m$Wyjście:
 - X - macierz rozwiązań wymiaru $n \times m$
 - counter - liczba wykonanych iteracji
 - error - wektor błędów w każdej iteracji

Tolerancje błędu ustawiłam na 10^{-12} , maksymalną liczbę iteracji na 1000 oraz przybliżenie początkowe na wektor samych zer.

Funkcja przechowuje poprzednią wartość X w zmiennej X_old .

Oblicza ona macierz X zgodnie z metodą Gaussa-Seidla iteracyjnie dla każdego wiersza macierzy A oraz odpowiadającego mu wiersza macierzy B .

Po każdej iteracji aktualizuje wektor błędów.

Warunek stopu: norma Frobeniusa z różnicy macierzy kolejnych przybliżeń mniejsza niż tolerancja.

- `gauss_seidel_XA(A, B)`

Rozwiązuje równanie macierzowe $XA=B$ metodą Gaussa-Seidla .

Wejście:

- A - macierz kwadratowa układu równań wymiaru $n \times n$
- B - macierz wymiaru $n \times m$

Wyjście:

- X - macierz rozwiązań wymiaru $n \times m$
- counter - liczba wykonanych iteracji
- error - wektor błędu w każdej iteracji

Funkcja ta wywołuje funkcję `gauss_seidel_AX(transpose(A), transpose(B))`, a następnie transponuje X . Wynika to z:

$$XA=B$$

$$(XA)^T=B^T$$

$$A^T X^T=B^T$$

- `spectral_r`

Oblicza promień spektralny macierzy iteracyjnej w metodzie Gaussa-Seidla.

Wejście:

- A - kwadratowa macierz układu równań wymiaru $n \times n$

Wyjście:

- r - promień spektralny macierzy iteracji $B_GS = (D - L)^{-1} * U$

Dla równania $XA=T$ wywołuję funkcję od macierzy A^T , zgodnie z równaniem rozpisany w poprzedniej funkcji.

- `main`

W skrypcie testującym `main` generuję 6 przypadków i tworzę dla nich tabele oraz wykresy.

PRZYPADEK 1

PRZYPADEK 1

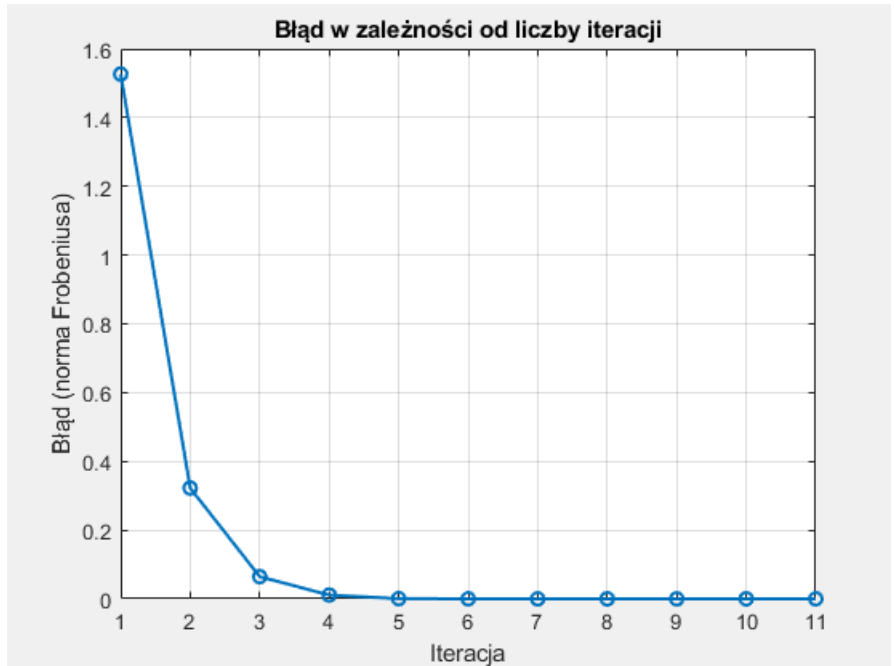
A_1 =

10	2	0	0
-1	10	2	0
0	-1	10	2
0	0	-1	10

B_1 =

1	2
3	4
5	6
7	8

Iteration	Error
1	1.5266
2	0.32225
3	0.064509
4	0.011044
5	0.00064316
6	3.4174e-05
7	1.7932e-06
8	9.392e-08
9	4.9179e-09
10	2.5751e-10
11	1.3483e-11



Liczba iteracji: 11

Promień spektralny macierzy iteracji: 0.052361

Współczynnik uwarunkowania macierzy A: 1.1752

Błąd względny wyznaczonego przybliżenia X: 6.7088e-13

Na początek rozważmy równanie macierzowe $AX=B$ dla powyższych A i B. Jak widać metoda działa poprawnie i w małej liczbie iteracji. Promień spektralny tej macierzy wynosi około 0,052. Z twierdzenia z wykładu wiemy, że metoda jest zbieżna globalnie (tzn. dla każdego przybliżenia początkowego) wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny macierzy iteracji jest mniejszy niż 1. Przetestujmy zatem różne przybliżenia początkowe.

- Przybliżenie początkowe wygenerowane przy pomocy funkcji rand

Iteration	Error
1	1.3115
2	0.16936
3	0.020277
4	0.0032573
5	0.00019073
6	1.0141e-05
7	5.322e-07
8	2.7875e-08
9	1.4596e-09
10	7.6429e-11

Liczba iteracji: 10

Promień spektralny macierzy iteracji: 0.052361

Współczynnik uwarunkowania macierzy A: 1.1752

Błąd względny wyznaczonego przybliżenia X: 3.8027e-12

- Przybliżenie początkowe wygenerowane przy pomocy funkcji randn

Iteration	Error
1	5.4758
2	0.70705
3	0.1062
4	0.019925
5	0.0011995
6	6.4005e-05
7	3.3605e-06
8	1.7603e-07
9	9.2175e-09
10	4.8264e-10
11	2.5271e-11

Liczba iteracji: 11
 Promień spektralny macierzy iteracji: 0.052361
 Współczynnik uwarunkowania macierzy A: 1.1752
 Błąd względny wyznaczonego przybliżenia X: 1.2574e-12

Przybliżenie początkowe miało wpływ na błąd względny. Są to jednak bardzo małe wartości rzędu 10^{-12} . Dla każdego z nich zgodnie z powyższym twierdzeniem metoda była zbieżna, różnica liczby iteracji wyniosła 1.

PRZYPADEK 2

Rozważmy teraz macierz o dużym promieniu spektralnym i równanie $AX=B$.

Promień spektralny tej macierzy wynosi około 1,8. Funkcja zakończyła działanie po 12 iteracjach, jednak błąd względny wyznaczonego przybliżenia to prawie 0,6. Metoda nie wyznaczyła X prawidłowo. Tak samo było dla innych przetestowanych przeze mnie przybliżeń początkowych. Pokazuje to, że metoda nawet wykonując małą liczbę iteracji nie musi zbiegać do poprawnego X.

PRZYPADEK 2

A_2 =

15	5	5	5	5
5	15	5	5	5
5	5	15	5	5
5	5	5	15	5
5	5	5	5	15

B_2 =

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

Iteration	Error
1	1.1089
2	0.24753
3	0.027503
4	0.0030559
5	0.00033955
6	3.7727e-05
7	4.1919e-06
8	4.6577e-07
9	5.1752e-08
10	5.7503e-09
11	6.3892e-10
12	7.0991e-11

Liczba iteracji: 12
 Promień spektralny macierzy iteracji: 1.8092
 Współczynnik uwarunkowania macierzy A: 3.5
 Błąd względny wyznaczonego przybliżenia X: 0.5930

Macierz	PromieńSpektralny	LiczbaIteracji	BłądWzględny
{ 'A1' }	0.083333	11	2.7084e-12
{ 'A2' }	0.4445	27	3.1694e-11
{ 'A3' }	0.99214	36	3.4943e-11

Ponadto, im większy promień spektralny, tym więcej iteracji potrzebuje metoda Gaussa-Seidela.

PRZYPADEK 3

Sprawdźmy, jak dominacja diagonali wpływa na poprawność metody. W tym celu przetestowałam funkcje rozwiązującą układ $XA=B$ dla 4 różnych macierzy A z tą samą wartością (10) na diagonalu oraz pod diagonalą (-1) i różnymi wartościami nad diagonalą.

<p>A =</p> <pre> 10 2 0 0 -1 10 2 0 0 -1 10 2 0 0 -1 10 </pre> <p>A =</p> <pre> 10 10 0 0 -1 10 10 0 0 -1 10 10 0 0 -1 10 </pre> <p>A =</p> <pre> 10 30 0 0 -1 10 30 0 0 -1 10 30 0 0 -1 10 </pre>	<p>A =</p> <pre> 10 60 0 0 -1 10 60 0 0 -1 10 60 0 0 -1 10 </pre> <p>A =</p> <pre> 10 100 0 0 -1 10 100 0 0 -1 10 100 0 0 -1 10 </pre>	<p>B_XA =</p> <pre> 1 3 5 7 2 4 6 8 </pre>
---	---	--

Tabela wyników dla różnych sum na diagonalu i poza diagonalą:

SumOnDiagonal	MaxSumOffDiagonal	Iterations	CondA	SpectralRadius	RelativeError	RowDominance
10	2	10	1.1752	0.052361	7.5471e-13	true
10	10	17	4.166	0.2618	1.2823e-11	false
10	30	102	57.755	0.78541	2.2594e-11	false
10	60	10000	473.29	1.5708	NaN	false
10	100	10000	2164	2.618	NaN	false

Jak widać nie dla wszystkich macierzy A metoda była zbieżna. Czym większa była dominacja wartości poza diagonalą, tym metoda radziła sobie gorzej. Potrzebowała ona większej liczby iteracji lub w ogóle nie była zbieżna jak w dwóch ostatnich przypadkach (10000 iteracji to maksymalna liczba iteracji ustawiona w funkcji). Wzrastał także promień spektralny macierzy iteracji oraz współczynnik uwarunkowania macierzy A.

Zatem to, czy macierz jest wierszowo / kolumnowo dominująca wpływa na poprawność metody Gaussa-Seidela. Dominacja diagonalu gwarantuje zbieżność tej metody.

PRZYPADEK 4

Sprawdźmy, jak radzi sobie metoda, gdy A jest macierzą bliską macierzy osobliwej. W tym celu rozwiązałam równanie $AX=B$ dla trzech różnych A. Każde kolejne A było coraz bliższe macierzy osobliwej.

B =	A =		
6	1.0000	1.0000	1.0000
12	1.0000	1.0050	1.0000
3	1.0000	1.0000	1.0050
A =	A =		
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.1100	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.2000	1.0010

Przypadek 1:

Determinant	ConditionNumber	SpectralRadius	Iterations	RelativeError
0.022	70.244	3.4531	249	1.259e-11

Przypadek 2:

Determinant	ConditionNumber	SpectralRadius	Iterations	RelativeError
2.5e-05	1804	4.2056	1000	0.039945

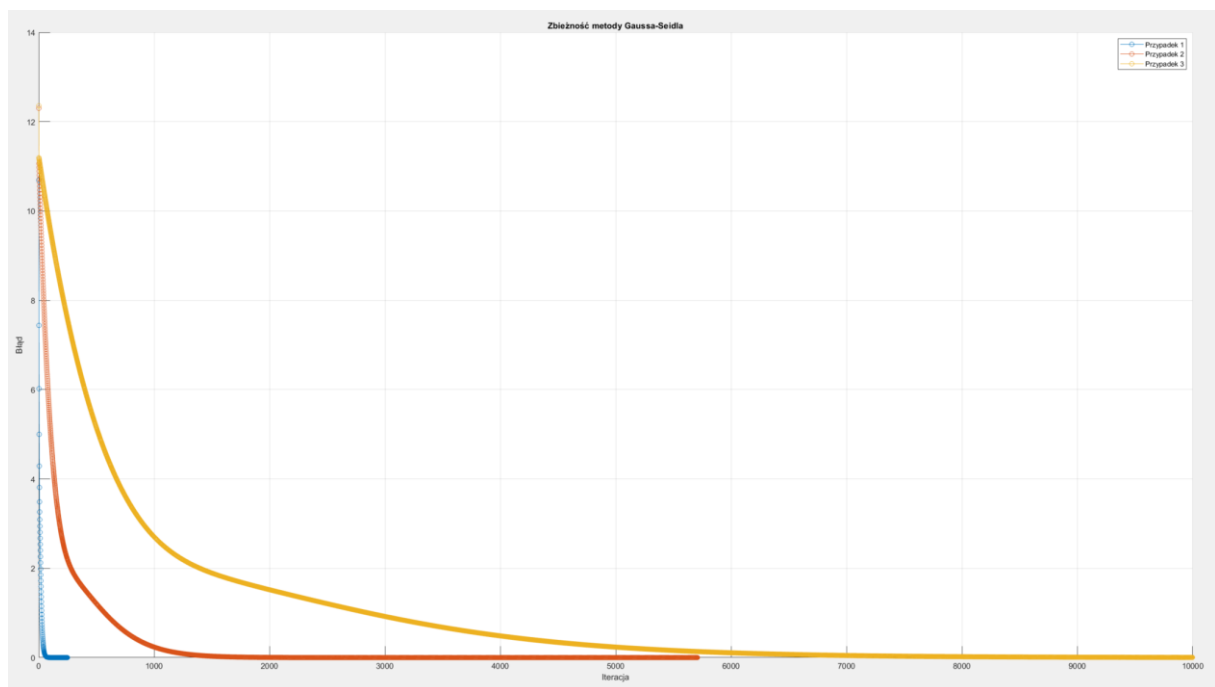
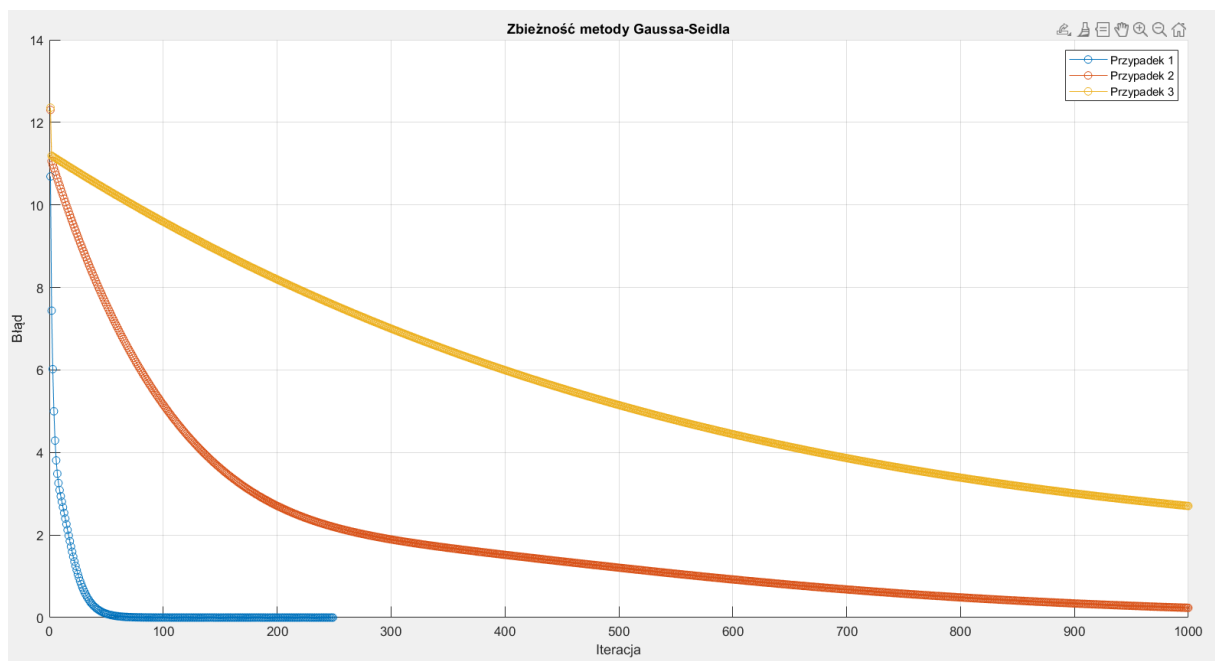
Przypadek 3:

Determinant	ConditionNumber	SpectralRadius	Iterations	RelativeError
1e-06	9004	4.2299	1000	0.56221

Widzimy, że tylko w pierwszym przypadku metoda zadziałała poprawnie i dała wynik z błędem rzędu 10^{-11} , wykonując 249 iteracji. W pozostałych przypadkach funkcja wykonała 1000 iteracji i nie uzyskaliśmy wyniku bliskiego poprawnego. Norma różnicy między obliczoną wartością X i wartością obliczoną w Matlabie przy pomocy funkcji wbudowanej to odpowiednio 0.04 oraz 0.056, więc zdecydowanie więcej niż w pierwszym przypadku. Ponadto macierze te były źle uwarunkowane oraz promień macierzy iteracji był większy od 1.

Sprawdziłam także czy większa liczba iteracji pomoże w uzyskaniu lepszego przybliżenia. Okazało się, że tak. W drugim przypadku 5710 iteracji dało wynik z błędem rzędu 10^{-11} , a w trzecim przypadku 10000 iteracji błąd względny to około 0,0005.

Zatem metoda Gaussa-Seidela zawodzi przy macierzach A bardzo bliskich macierzom osobliwym lub potrzebuje zdecydowanie więcej iteracji, aby dać poprawne przybliżenie wyniku.



PRZYPADEK 5

Sprawdźmy, czy macierz B ma wpływ na działanie metody Gaussa-Seidela. W tym celu rozwiązałam równanie $AX=B$ dla poniższych macierzy.

<pre>A_5 = 4 1 2 1 3 -1 2 -1 3 Promień spektralny macierzy iteracji: 0.25 Współczynnik uwarunkowania macierzy A: 9.118 Przypadek B_1: B = 6 12 3 Liczba iteracji: 61 Błąd względny: 1.676e-10</pre>	<pre>Przypadek B_2: B = 60 120 30 Liczba iteracji: 67 Błąd względny: 1.4714e-10 Przypadek B_3: B = 60000 120000 30000 Liczba iteracji: 84 Błąd względny: 1.5158e-10</pre>
--	---

Jak widać dla większych wartości w macierzy B potrzebowaliśmy większej liczby iteracji, aby osiągnąć dokładny wynik. Zbieżność metody Gaussa-Seidela zależy od właściwości macierzy A, takich jak jej dominacja diagonalna lub promień spektralny macierzy iteracji. Wartości w B nie wpływają bezpośrednio na zbieżność. Mogą jednak zmienić liczbę potrzebnych iteracji. Zmieniają także oczywiście wynik równania.

PRZYPADEK 6

W ostatnim przypadku sprawdzimy warunek gwarantujący zbieżność metody, czyli to czy A jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną. W tym celu rozwiązałam równanie $AX=B$ dla 6 macierzy. Pierwsze trzy z nich były symetryczne i dodatnio określone, natomiast ostatnie trzy były symetryczne, ale nie były dodatnio określone.

PRZYPADEK 6:						
Matrix	PositiveDefinite	CondA	SpectralRadius	Iterations	RelativeError	
"A1"	true	3.9357	0.5	17	4.1532e-12	
"A2"	true	2.6863	0.18333	15	1.6159e-11	
"A3"	true	2.0509	0.059761	12	1.4027e-11	
"A4"	false	1.9408	NaN	10000	NaN	
"A5"	false	7.8541	0.5	37	9.4814e-12	
"A6"	false	2	NaN	10000	Inf	

Jak widać w trzech pierwszych przypadkach, czyli dla macierzy A symetrycznej i dodatnio określonej metoda jest zbieżna. W ostatnich trzech przypadkach metoda raz była zbieżna i dwa razy nie udało się rozwiązać równania.

Podsumowując, jeśli macierz A :

- jest diagonalnie dominująca
- lub symetryczna i dodatnio określona

to metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

Metoda może zbiegać, jeśli te warunki nie są spełnione, ale nie mamy wtedy pewności czy tak się stanie (np. równanie nr 5 z szóstego przypadku).

Praktyczne zastosowanie metody Gaussa-Seidela dla równań macierzowych:

- **Analiza systemów energetycznych:** Metoda Gaussa-Seidela jest używana do rozwiązywania równań przepływu mocy w systemach energetycznych, aby określić napięcie i prąd na każdym węźle systemu.
- **Przenoszenie ciepła i dynamika płynów:** Metoda Gaussa-Seidela jest stosowana do rozwiązywania równań opisujących przenoszenie ciepła i przepływ płynów w różnych zastosowaniach inżynierskich, takich jak symulacja wymienników ciepła, przepływ płynów w ośrodkach porowatych oraz konwekcja naturalna.
- **Przetwarzanie obrazów:** Metoda Gaussa-Seidela jest wykorzystywana do rozwiązywania równania Poissona w aplikacjach przetwarzania obrazów, takich jak wygładzanie i usuwanie szumów z obrazów.
- **Symulacja obwodów elektrycznych:** Metoda Gaussa-Seidela jest stosowana do rozwiązywania równań węzłowych w symulacji obwodów w celu określenia napięcia i prądu w każdym węźle obwodu.

Źródło: <https://www.quora.com/What-are-some-practical-applications-of-the-Gauss-Seidel-method>