

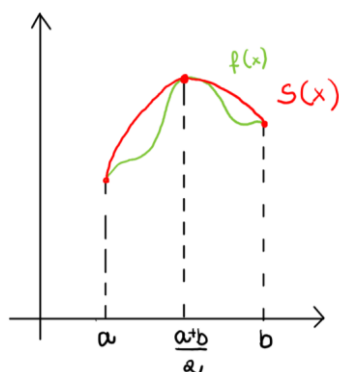
Metoda Simpsona obliczania przybliżonej wartości całki

$\int_a^b \omega_n(x) dx$, gdzie ω_n jest postaci

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (T_k(x) + U_k(x))$$

KRÓTKI OPIS METODY

Metoda Simpsona to jedna z metod przybliżania wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej. Zaczniemy od prostej kwadratury Simpsona. Nazywana jest również wzorem parabol, ponieważ funkcja podcałkowa przybliżana jest wielomianem stopnia 2. Przybliżamy 3 równoodległymi węzłami: a , b , $(a+b)/2$. Poniższy rysunek przedstawia działanie tej metody.



Złożona metoda Simpsona polega na podzieleniu przedziału całkowania na N podprzedziałów równej długości i na każdym z nich zastosowaniu kwadratury prostej, a następnie zsumowaniu wyników.

Złożony wzór Simpsona jest postaci:

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$

Gdzie:

- N - liczba podprzedziałów,
- $H = (b-a) / N$, czyli długość jednego podprzedziału
- a - początek przedziału całkowania,
- b - koniec przedziału całkowania.

Co po przekształceniu daje:

$$S(f) = \frac{H}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + kH + \frac{H}{2}\right) \right)$$

Ten wzór wykorzystywany jest w moim programie.

Całka liczona jest z wielomianu, który jest sumą wielomianów Czebyszewa postaci T i U. Spełniają one rekurencyjne zależności:

- CzebyszewT:
 $T_0(x) = 1$
 $T_1(x) = x$
 $T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), k = 2, 3, 4, \dots$
- CzebyszewU:
 $U_0(x) = 1$
 $U_1(x) = 2x$
 $U_k(x) = 2x \cdot U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), k = 2, 3, 4, \dots$

KRÓTKI OPIS PROGRAMU

Program składa się z następujących funkcji:

- **CzebyszewT(n,x)**

Oblicza wielomiany Czebyszewa $T_n(x)$ w zadanych punktach x.

Wejście:

- n - stopień wielomianu Czebyszewa
- x - wektor punktów, w których mają zostać obliczone wartości wielomianów

Wyjście:

- T - macierz o wymiarach (n+1) na length(x), gdzie T(k, :) zawiera wartości wielomianu Czebyszewa $T_{(k-1)}(x)$ dla punktów x.
 - $T(1, :) = T_0(x) = 1$
 - $T(2, :) = T_1(x) = x$
 - $T(k+1, :) = 2*x.*T(k, :) - T(k-1, :)$ dla $k > 1$

- **CzebyszewU(n,x)**

Oblicza wielomiany Czebyszewa $U_n(x)$ w zadanych punktach x.

Wejście:

- n - stopień wielomianu Czebyszewa
- x - wektor punktów, w których mają zostać obliczone wartości wielomianów

Wyjście:

- T - macierz o wymiarach (n+1) na length(x), gdzie T(k, :) zawiera wartości wielomianu Czebyszewa $T_{(k-1)}(x)$ dla punktów x.
 - $T(1, :) = T_0(x) = 1$
 - $T(2, :) = T_1(x) = 2*x$
 - $T(k+1, :) = 2*x.*T(k, :) - T(k-1, :)$ dla $k > 1$

W i-tym wierszu w j-tej kolumnie znajduje się wartość wielomianu i-tego stopnia dla j-tej wartości wektora x.

- **SimpsonWn(a_coeffs, n, a, b, N)**

Oblicza całkę z wielomianu $w_n(x)$ metodą Simpsona.

Wejście:

- a_coeffs - współczynniki a_k
- a, b - przedział całkowania
- N - liczba podprzedziałów

Wyjście:

- integral - całka policzona metodą Simpsona

Funkcja generuje punkty węzłowe x_nodes i środki podprzedziałów $x_midpoints$. Oblicza wielomiany Czebyszewa w tych punktach przy pomocy funkcji $CzebyszewT$ i $CzebyszewU$. Oblicza wartości $w_n(x)$ w punktach węzłowych i środkach. Na końcu oblicza całkę zgodnie ze wzorem metody Simpsona.

- **Skrypt testujący main**

Aby uruchomić program należy wywołać funkcję `simpsonWn` z odpowiednimi parametrami.

Przykładowo:

```
a = 0;           % Początek przedziału
b = 1;           % Koniec przedziału
N = 2000;        % Liczba podprzedziałów
a_coeffs = 1:101; % Wektor współczynników
integral = simpsonWn(a_coeffs, a, b, N);
% Wyświetlenie wyniku
fprintf('Całka wielomianu  $w_n(x)$  obliczana metodą Simpsona wynosi: %.15f\n', integral);
```

Całka wielomianu $w_n(x)$ metodą Simpsona wynosi: 96.498945706270590

W skrypcie testującym tworzę wykresy dla różnych przypadków przy pomocy poniżej opisanej funkcji `plotSimpsonErrors`.

- **plotSimpsonErrors(param_type, a_coeffs_list, exact_values, N_max, a_values, b_values)**

Rysuje wykres błędu bezwzględnego i względnego metody Simpsona w zależności od liczby podprzedziałów dla podanych wielomianów.

Wejście:

- `param_type` - Typ parametru ('degree', 'interval', 'coeffs'), w zależności od tego, który aspekt chcemy analizować, to będzie wyświetlać legenda

- `a_coeffs_list` - Lista wektorów współczynników wielomianów

- `exact_values` - Wektor dokładnych wartości całki dla każdego zestawu

- `N_max` - Maksymalna liczba podprzedziałów

- `a_values` - Wektor początków przedziałów całkowania

- `b_values` - Wektor końców przedziałów całkowania

Na osi y zastosowana jest skala logarytmiczna, aby wykresy były bardziej czytelne.

CIEKAWE PRZYPADKI

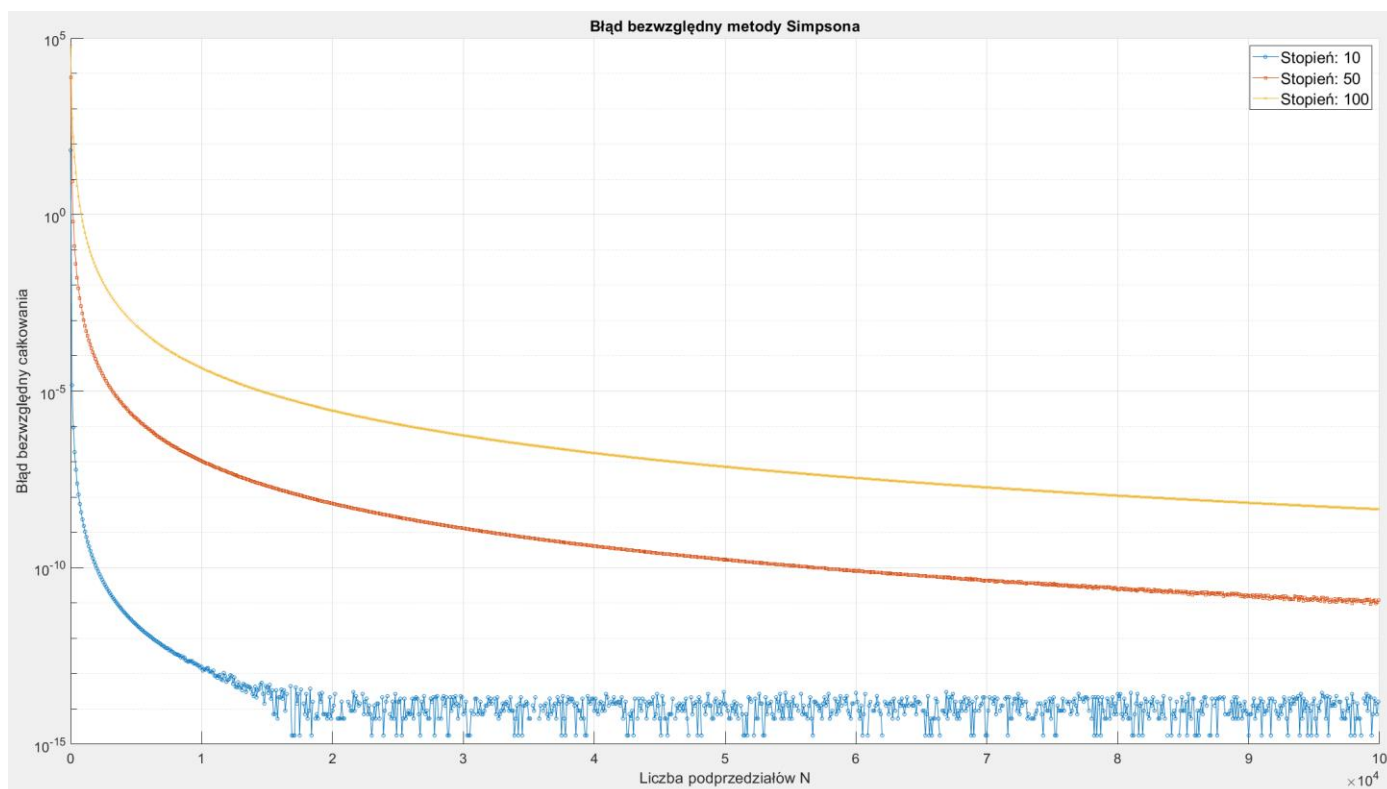
- Różne stopnie wielomianów**

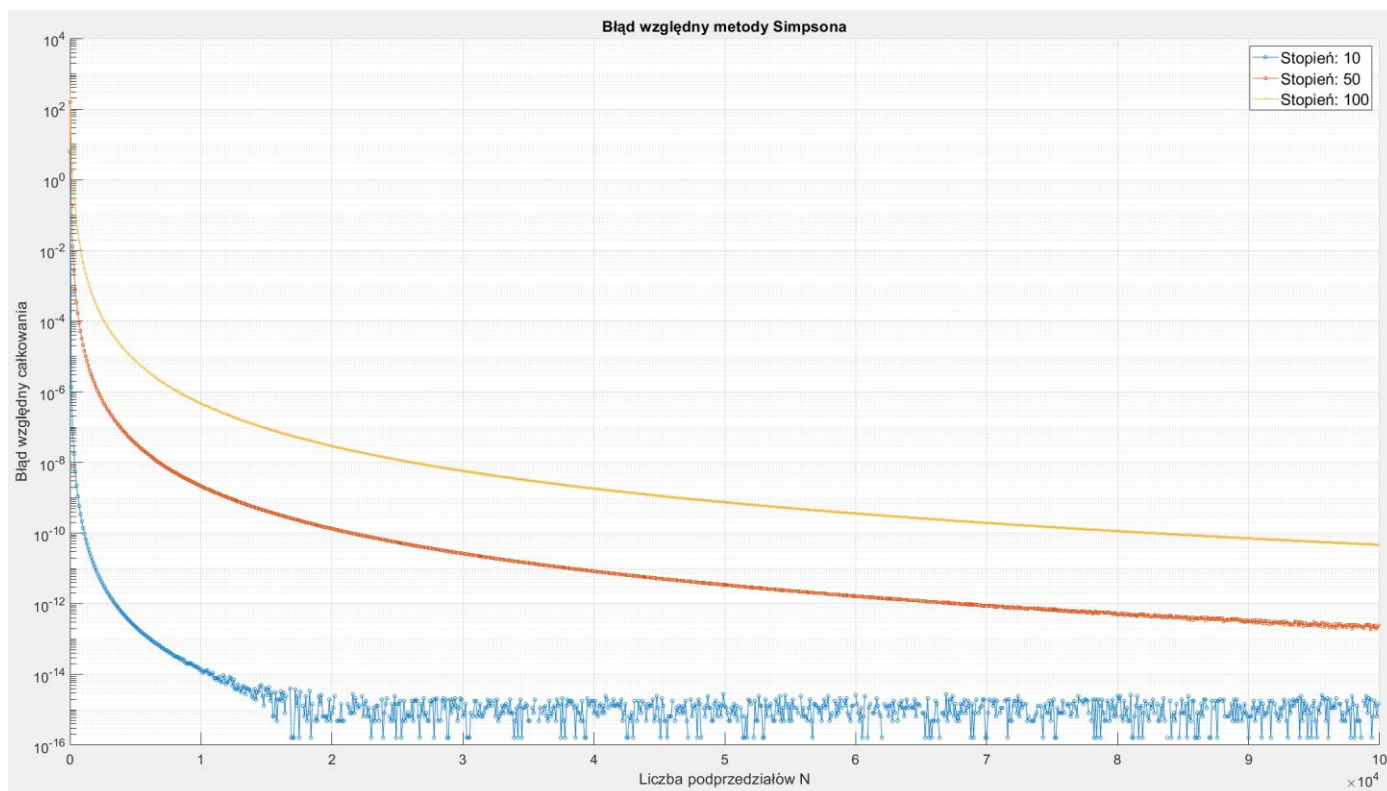
Postanowiłam przeanalizować czy stopnie wielomianów Czebyszewa mają wpływ na poprawność metody Simpsona. W tym celu stworzyłam wykresy błędów przy pomocy funkcji plotSimpsonErrors.

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{10} (k+1) (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{3427}{315} \approx 10.8793650793651$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{50} (k+1) (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{4763\,272\,166\,298\,217\,732\,847}{96\,845\,140\,757\,687\,397\,075} \approx 49.1844209118992$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{100} (k+1) (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{5\,531\,245\,264\,998\,083\,533\,600\,302\,387\,236\,275\,095\,577}{57\,335\,834\,892\,855\,655\,562\,938\,987\,611\,276\,565\,425} \approx 96.4709989020724$$





Jak widać im większy stopień wielomianu tym większy błąd. Dla wszystkich stopni błąd maleje najszybciej małych N. Ponadto widzimy, że dla wielomianów mniejszego stopnia, jak np. dla niebieskiego wielomianu stopnia 10, nie warto stosować podziału na bardzo dużą liczbę podprzedziałów. Od około 1500 podprzedziałów wartość błędu przestaje znacząco maleć, utrzymuje się na poziomie około 10^{-15} / 10^{-16} dla błędu względnego. Na wykresie można zobaczyć dużo skoków. Dla wielomianów o większym stopniu podział na więcej podprzedziałów korzystnie wpływa na poprawność wyniku programu. Dla wielomianu stopnia 100 podział na tylko 10 N daje błąd bezwzględny aż o wartości około 5708.

- **Różne współczynniki a_k**

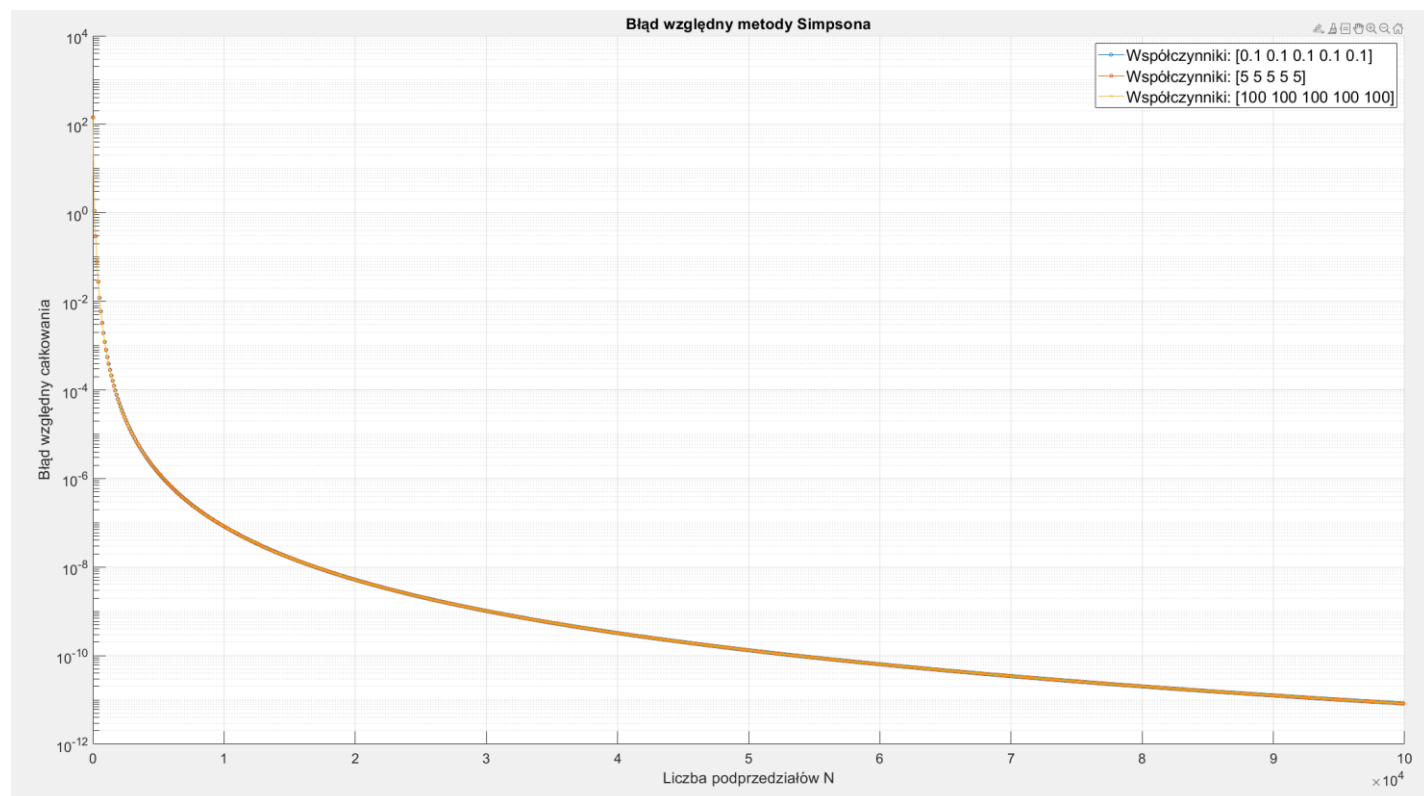
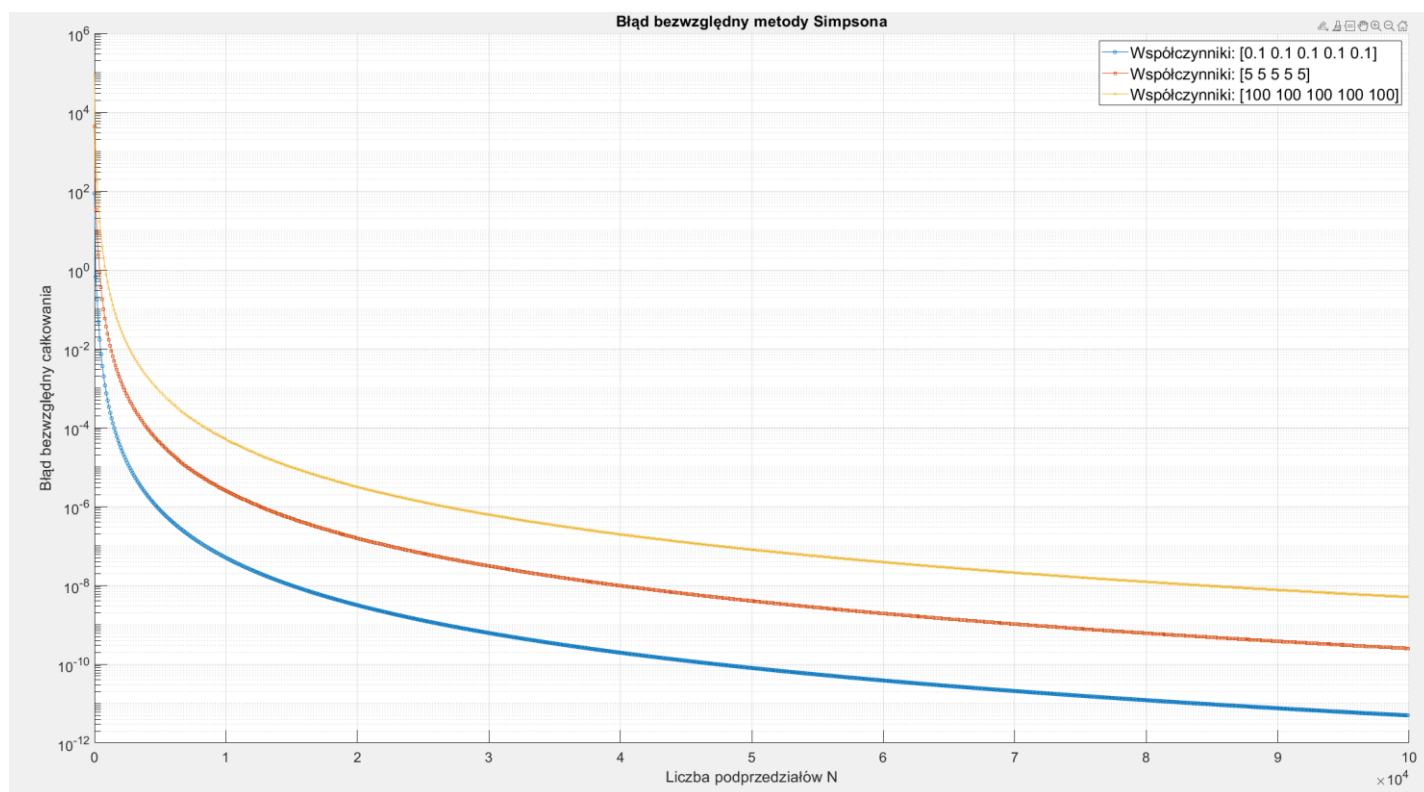
Następnie przeanalizowałam wpływ współczynników wielomianów na błąd całkowania. W tym celu policzyłam 3 całki w przedziale od 0 do 1 z wielomianów Czebyszewa stopnia 100.

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{100} 0.1 (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{34\,999\,462\,715\,821\,020\,805\,039\,736\,616\,293\,773\,757\,173}{57\,909\,193\,241\,784\,212\,118\,568\,377\,487\,389\,331\,079\,250} \approx 0.60439$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{100} 5 (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{34\,999\,462\,715\,821\,020\,805\,039\,736\,616\,293\,773\,757\,173}{1\,158\,183\,864\,835\,684\,242\,371\,367\,549\,747\,786\,621\,585} \approx 30.219$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{100} 100 (U_k(x) + T_k(x)) dx =$$

$$\frac{139\,997\,850\,863\,284\,083\,220\,158\,946\,465\,175\,095\,028\,692}{231\,636\,772\,967\,136\,848\,474\,273\,509\,949\,557\,324\,317} \approx 604.39$$

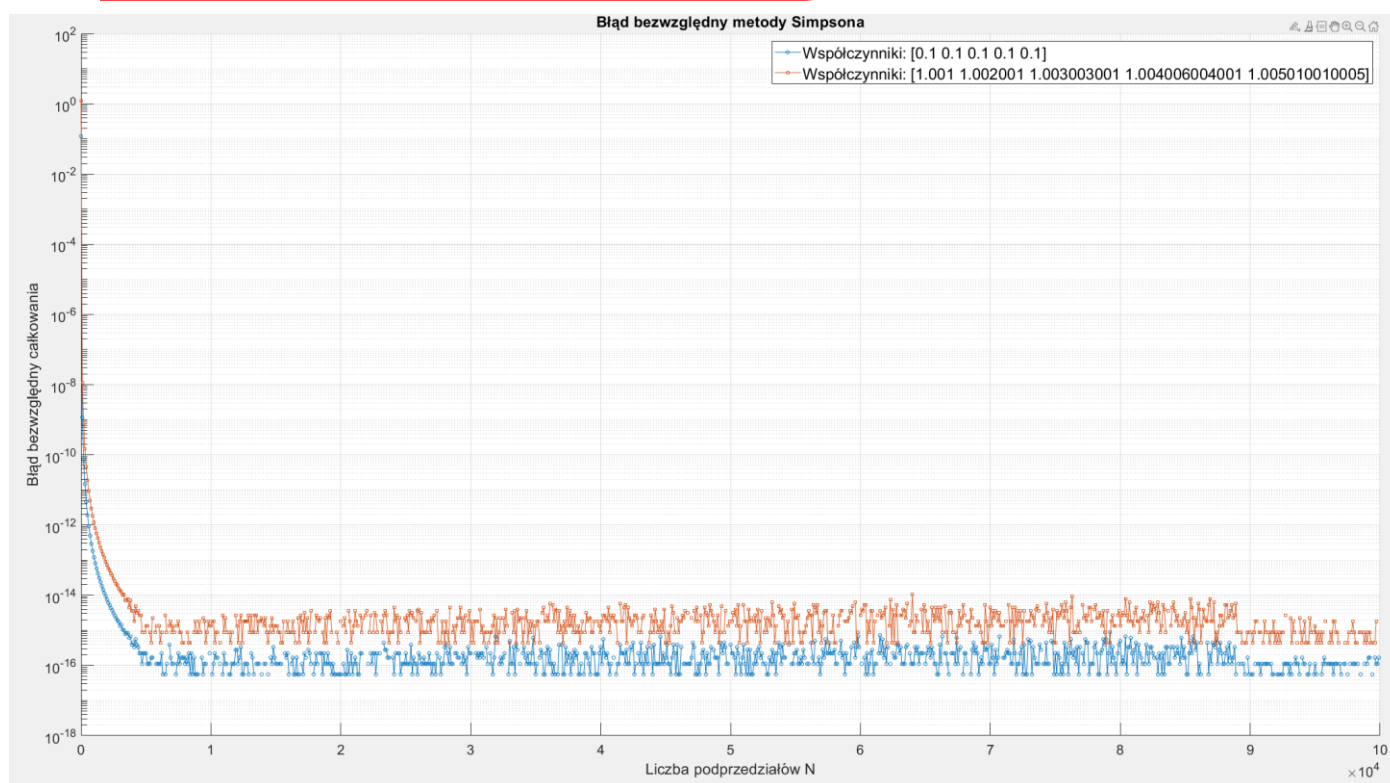


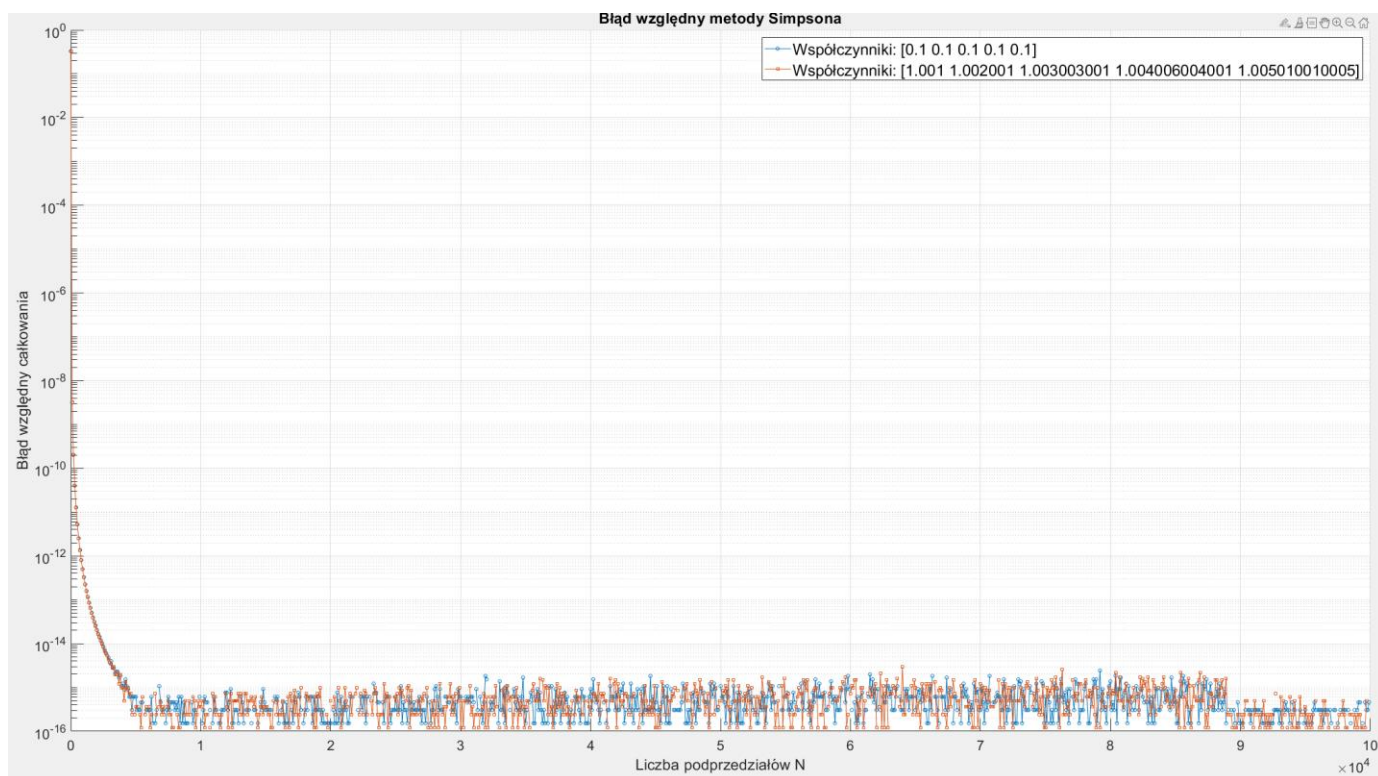
Jak widać błąd bezwzględny był większy dla wielomianów o większych współczynnikach. Całka przyjmuje wtedy większe wartości. Natomiast błąd względny w każdym z przypadków był taki sam.

Postanowiłam sprawdzić to także na innych przykładach wielomianów mniejszego stopnia - 5.

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^5 0.1 (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{109}{300} \approx 0.36333$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^5 \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{k+1} (U_k(x) + T_k(x)) dx = \frac{21\,840\,044\,056\,046\,018\,803}{6\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \approx 3.64000734267434$$

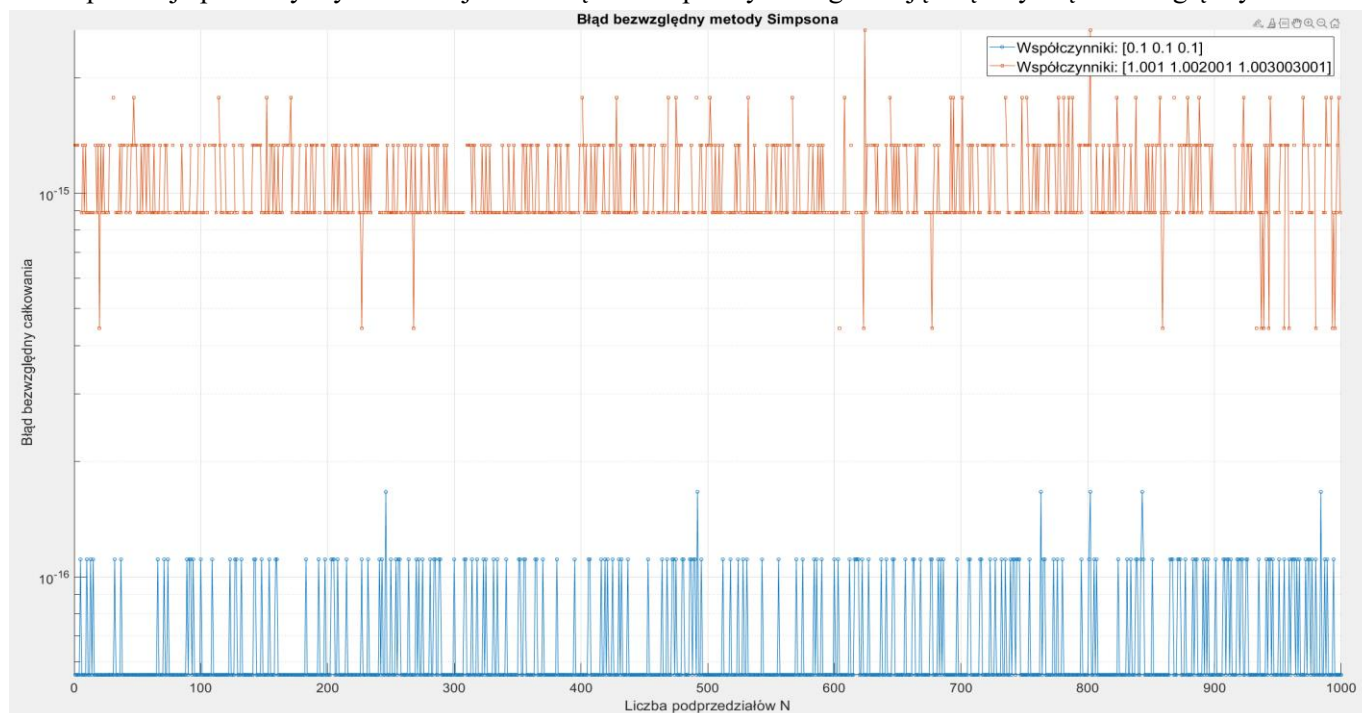




Po pierwsze, możemy zauważyć, że zgodnie z wnioskiem z pierwszego przykładu, dla małych stopni wielomianów podział na więcej podprzedziałów nie poprawia znacząco błędów, jest on bardzo skokowy, ale oscyluje w stałych przedziałach. W przypadku błędów względnego nie przekracza on wartości 10^{-16} . Można powiedzieć, że $N = 500$ daje nam najlepsze możliwe przybliżenie.

Również w tym teście błąd bezwzględny był większy dla wielomianu o większych współczynnikach, a błąd względny bardzo podobny dla obu z nich.

Dla wielomianu stopnia 3 najlepszy możliwy wynik całki dostajemy już dla bardzo małych N , co pokazuje poniższy wykres. Tutaj także większe współczynniki generują większy błąd bezwzględny.



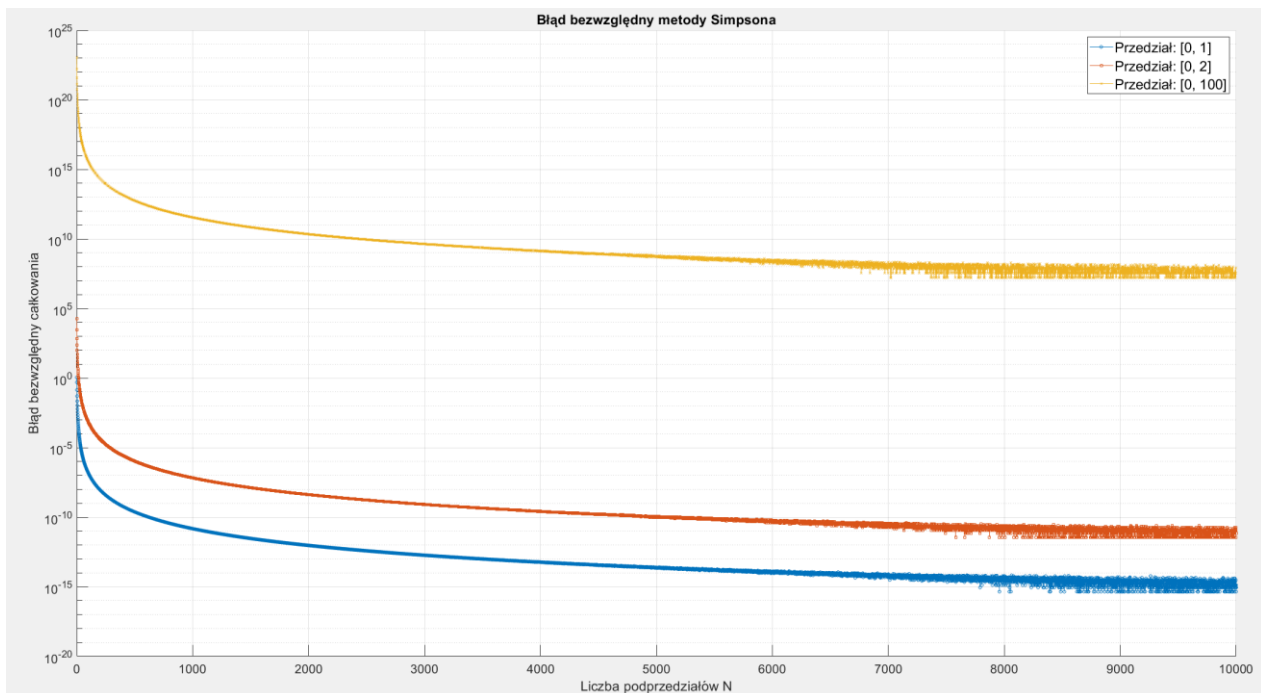
- Różne przedziały całkowania**

Kolejnym parametrem, którego wpływ na poprawność wyniku sprawdziłam były różne przedziały całkowania.

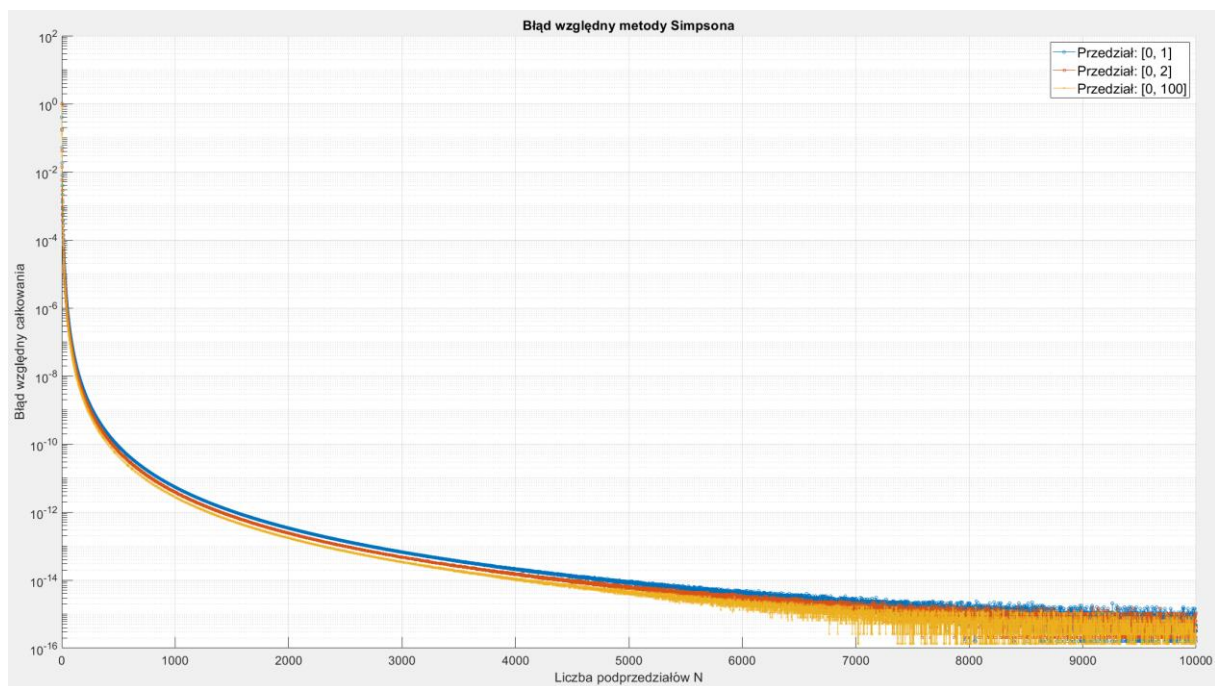
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{10} \frac{U_k(x) + T_k(x)}{k+1} dx = \frac{177\,911\,213}{64\,033\,200} \approx 2.77842139702529$$

$$\int_0^2 \sum_{k=0}^{10} \frac{U_k(x) + T_k(x)}{k+1} dx = \frac{280\,397\,653\,237}{16\,008\,300} \approx 17\,515.7670231692$$

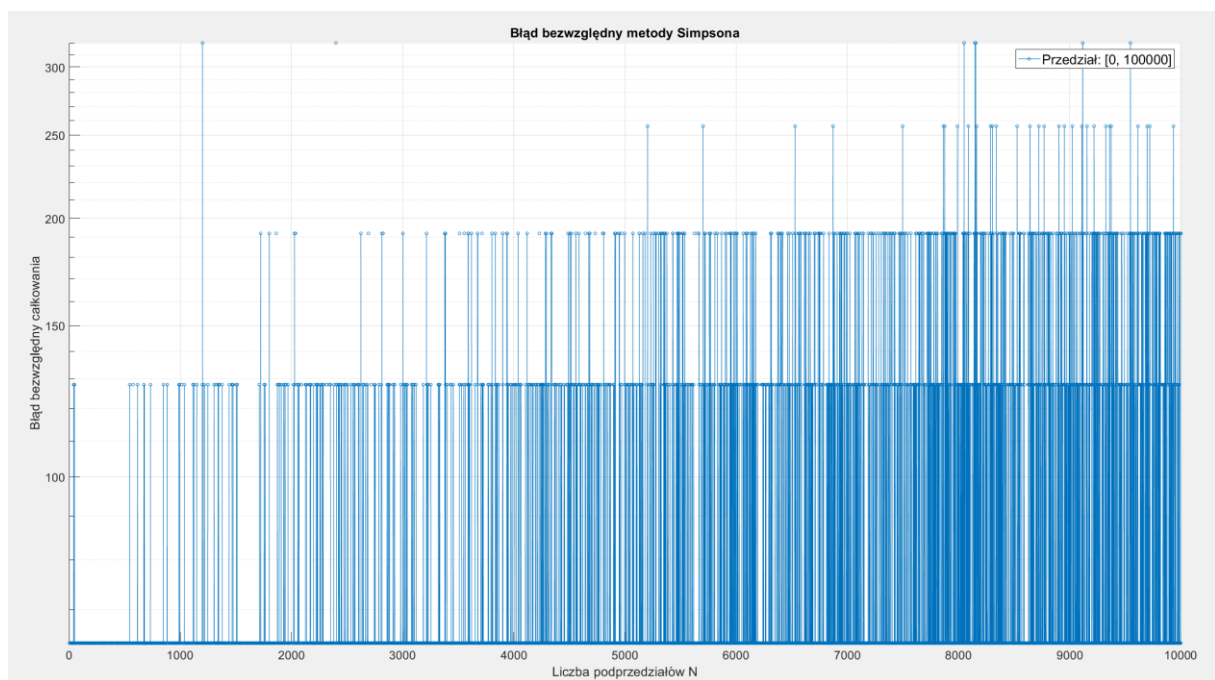
$$\int_0^{100} \sum_{k=0}^{10} \frac{U_k(x) + T_k(x)}{k+1} dx = \frac{20\,439\,160\,573\,898\,615\,993\,027\,154\,845}{160\,083} \approx 1.2768 \times 10^{23}$$

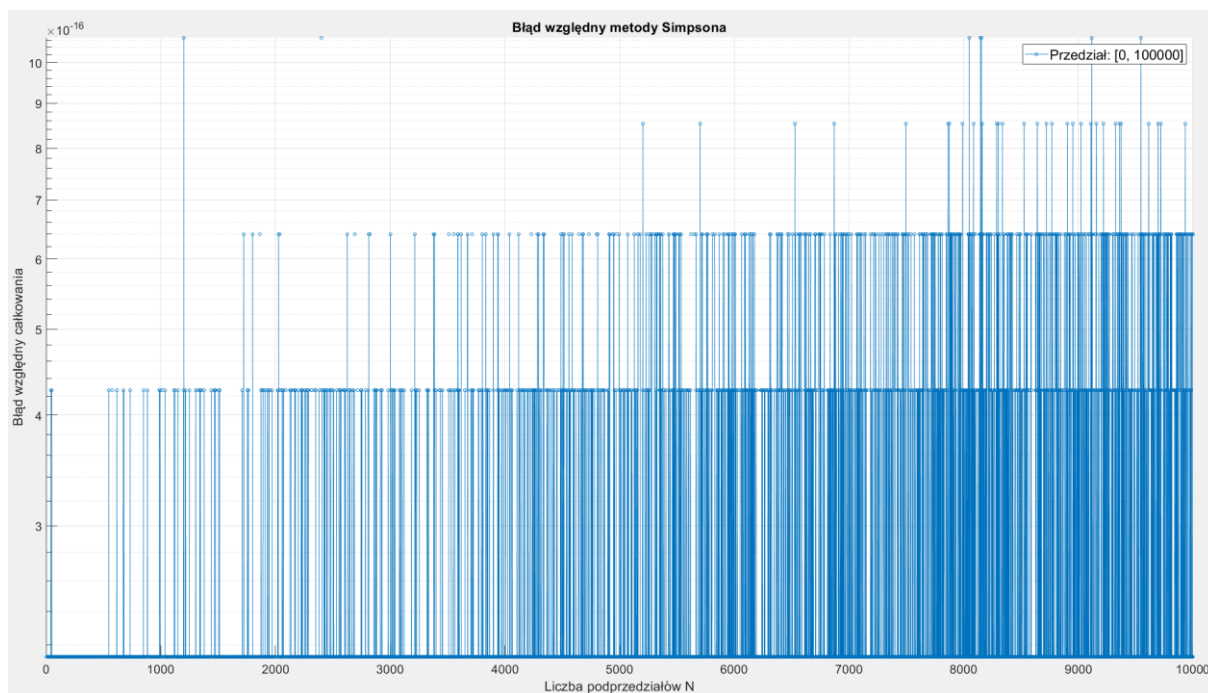


Użyłam trzech wielomianów o tych samych współczynnikach i tego samego stopnia. Jak widać błąd bezwzględny rośnie wraz ze zwiększeniem przedziału całkowania. Tego można było oczekiwać. Wykresy mają bardzo podobny kształt, są tylko przesunięte względem siebie. Żółta funkcja, czyli ta o największym przedziale całkowania, ma dużą wartość, co powoduje duży błąd bezwzględny, bo aż około 10^8 dla dużej liczby podprzedziałów. Błędy względne (wykres poniżej) dla wszystkich z funkcji są bardzo podobne, widzimy jednak, że to kolejność jest odwrotna. To funkcja o najmniejszym przedziale całkowania ma nieco większy błąd.



$$\int_0^{100000} \sum_{k=0}^3 \frac{U_k(x) + T_k(x)}{1000} dx = 300\,001\,999\,980\,000\,000$$



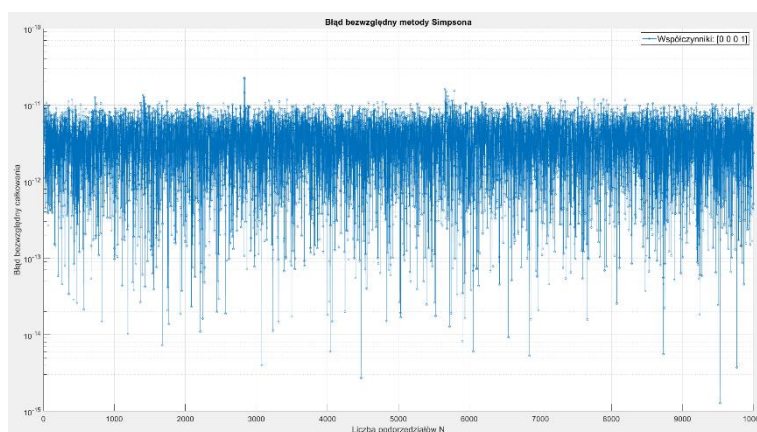
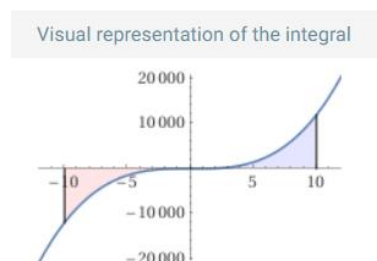


Całka z zaprezentowanej wyżej funkcji zachowuje się dosyć dziwnie. Jest to wielomian trzeciego stopnia, więc już bardzo mała liczba przedziałów daje bardzo dobre przybliżenie wartości całki. Zaskakujące może być jednak, że liczba skoków rośnie wraz ze wzrostem N. Dzieliąc przedział na 10 podprzedziałów otrzymamy wynik zgodny z Wolframem, 10000 podprzedziałów będzie różniło się o 192. Warto zauważyć, że całkując po tak dużym przedziale otrzymujemy dużą wartość całki. Dla tak dużych wartości wynik 300 001 999 980 000 192 nie odbiega tak bardzo od 300 001 999 980 000 000. Błąd względny jest rzędu 10^{-16} , co sugeruje, że metoda działa poprawnie.

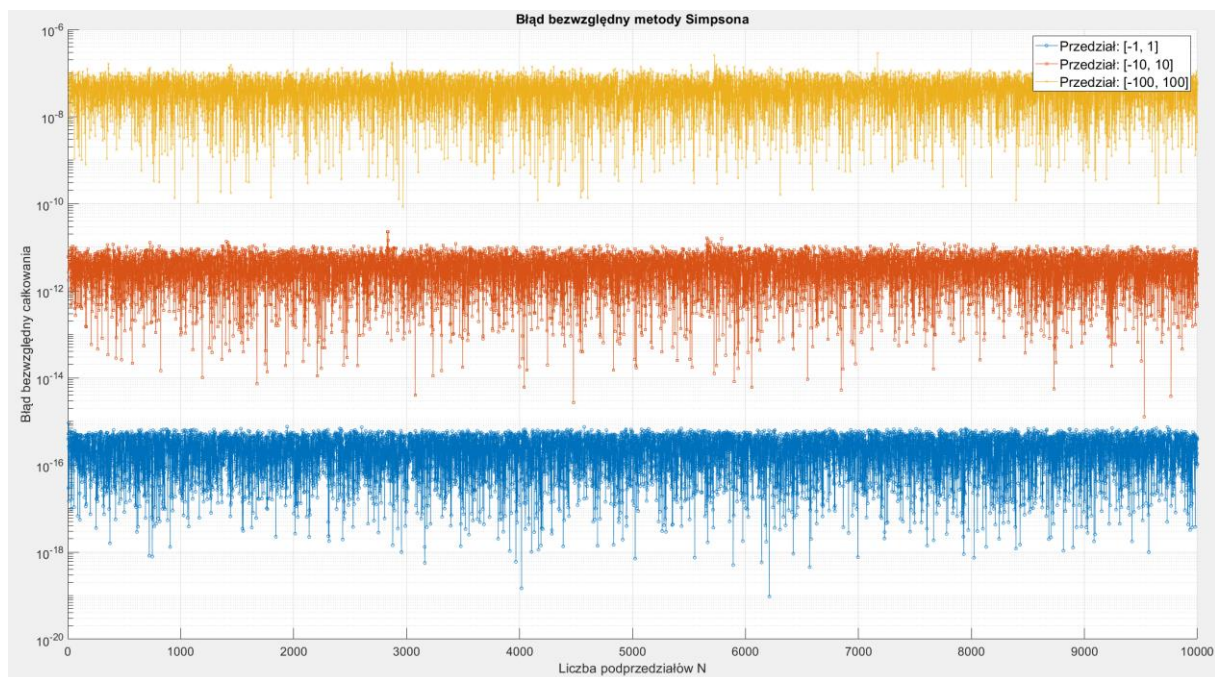
- **Funkcja nieparzysta**

Postanowiłam także sprawdzić jak metoda Simpsona radzi sobie z całką z funkcji nieparzystej. Biorąc wektor $a = [0,0,0,1]$ i symetryczny względem zera przedział wielomian w_n wygląda następująco.

$$\int_{-10}^{10} (T_3(x) + U_3(x)) dx = 0$$



Błąd bezwzględny oscyluje między 10^{-11} a 10^{-15} jednak używając metody Simpsona nie otrzymamy dokładnie 0.



Także tutaj im większy przedział całkowania tym większy błąd bezwzględny.

Podsumowując, metoda Simpsona jest dobrym narzędziem do obliczania całki z sumy wielomianów Czebyszewa. Należy jednak pamiętać o odpowiednim doborze liczby podprzedziałów N (nie ma potrzeby dzielenia na dużo przy małych stopniach wielomianu) oraz o tym, że współczynniki, stopnie wielomianu oraz przedział całkowania mają wpływ na błąd przybliżenia.