

Ćwiczenie nr 29: Fale podłużne w ciałach stałych

1 Wprowadzenie

1.1 Cel doświadczenia

Celem doświadczenia było wyznaczenie modułu Younga dla różnych materiałów na podstawie pomiaru prędkości rozchodzenia się fali dźwiękowej w przecie.

1.2 Opis stanowiska

W skład stanowiska weszły: komputer stacjonarny z zainstalowanym oprogramowaniem Zelscope, mikrofon, zestaw prętów z różnych materiałów, suwmiarka (dokładność 0,05mm), taśma miernicza (dokładność 1mm), młotek, waga elektroniczna (dokładność 1g).

2 Sposób wykonania doświadczenia

Doświadczenie rozpoczęliśmy od zapoznania się ze sprzętem wchodzącym w skład stanowiska, uruchomienia oprogramowania Zelscope i odpowiedniej konfiguracji programu. Następnie ustawialiśmy mikrofon z jednej strony pręta, z drugiej uderzaliśmy za pomocą młotka, aby wprowadzić pręt w ruch drgający i używając programu Zelscope odczytywaliśmy częstotliwości dla kolejnych harmonicznych. Powtórzyliśmy czynności dla trzech materiałów: miedzi, mosiądzu i aluminium. Zmierzyliśmy na koniec średnicę oraz długość próbek stali, mosiądzu i aluminium oraz długość prętów wykonanych z tych materiałów. Zważyliśmy również próbki, aby móc wyznaczyć gęstość.

3 Wyniki pomiarów

Nr harmoniczej	Częstotliwość f [Hz]		
	miedź	mosiądz	aluminium
1	968,994	904,395	1313,525
2	1937,988	1787,256	2648,584
3	2885,449	2691,65	3962,109
4	3854,443	3596,045	5297,168
5	4823,438	4500,439	6610,693
6		5404,834	7924,219

Tabela 1: Pomiar częstotliwości dla drgań harmoniczných wybranych materiałów

Materiał	miedź	mosiądz	aluminium
d[mm]	12,1	12,1	16,25
h [mm]	120	120	120
m [g]	121	114	69

Tabela 2: Pomiar próbek wykonanych z mosiądzu, miedzi i aluminium

	miedź	mosiądz	aluminium
l[cm]	197,9	198,8	196,8

Tabela 3: Pomiary długości prętów

4 Opracowanie wyników pomiarów

4.1 Wyznaczenie prędkości fali oraz niepewności typu A

Materiał	Nr harmoniczej	Częstotliwość f_k [Hz]	Długość fali λ_k [m]	Prędkość fali v [m/s]
miedź	1	968,994	3,958	3835,3
	2	1937,988	1,979	3835,3
	3	2885,449	1,319	3806,9
	4	3854,443	0,990	3814,0
	5	4823,438	0,792	3818,2
Mosiądz	1	904,395	3,976	3595,9
	2	1787,256	1,988	3553,1
	3	2691,65	1,325	3567,3
	4	3596,045	0,994	3574,5
	5	4500,439	0,795	3578,7
	6	5404,834	0,663	3581,6
Aluminium	1	1313,525	3,936	5170,0
	2	2648,584	1,968	5212,4
	3	3962,109	1,312	5198,3
	4	5297,168	0,984	5212,4
	5	6610,693	0,787	5203,9
	6	7924,219	0,656	5198,3

Zbliżone wartości różnicy między częstotliwościami kolejnych harmoniczných dla danego materiału sugerują brak występowania błędów grubych.

Długość fali wyliczaliśmy ze wzoru: $\lambda_k = \frac{2l}{k}$, gdzie k-numer harmoniczných, l-długość pręta, a prędkość fali: $v_k = f_k \lambda_k$

Otrzymane wartości prędkości średniej v_{sr} wraz z niepewnością typu A: $u(v_{sr}) = \sqrt{\frac{\sum(v_i - v_{sr})^2}{n(n-1)}}$.

Miedź	$v_{Cu} = 3821,9 \frac{m}{s}$	$u(v_{Cu}) = 5,8 \frac{m}{s}$
Mosiądz	$v_{CuZn} = 3575,2 \frac{m}{s}$	$u(v_{CuZn}) = 5,9 \frac{m}{s}$
Aluminium	$v_{Al} = 5199,2 \frac{m}{s}$	$u(v_{Al}) = 6,4 \frac{m}{s}$

4.2 Wyznaczenie gęstości materiałów wraz z niepewnością

Przy wyznaczaniu gęstości $\rho = \frac{m}{V}$ korzystamy ze wzoru na objętość walca $V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4}$,

otrzymując $\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}$.

Materiał	m [g]	d [mm]	h [mm]	$\rho [\frac{g}{mm^3}]$	$\rho [\frac{kg}{m^3}]$	$u(\rho) [\frac{kg}{m^3}]$
Miedź	121	12,10	120	0,00877	8770	130
Mosiądz	114	12,10	120	0,00826	8260	130
Aluminium	69	16,25	120	0,002772	2772	50

$$\rho_{Cu} = \frac{4 \cdot 121g}{\pi(12,10mm)^2 \cdot 120mm} \approx 0,00877 \frac{g}{mm^3} = 8770 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{CuZn} = \frac{4 \cdot 114g}{\pi(12,10mm)^2 \cdot 120mm} \approx 0,00826 \frac{g}{mm^3} = 8260 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{Al} = \frac{4 \cdot 69g}{\pi(16,25mm)^2 \cdot 120mm} \approx 0,002772 \frac{g}{mm^3} = 2772 \frac{kg}{m^3}$$

Niepewność obliczamy z prawa przenoszenia niepewności względnej:

$$u(\rho) = \rho \cdot \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{-2u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{-u(h)}{h}\right)^2}$$

Dla wszystkich badanych materiałów:

$$u(m) = 1 \text{ g}$$

$$u(d) = 0,05 \text{ mm}$$

$$u(h) = 1 \text{ mm}$$

$$u(\rho_{Cu}) = 8770 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 \text{ g}}{121 \text{ g}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 0,05 \text{ mm}}{12,10 \text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{-1 \text{ mm}}{120 \text{ mm}}\right)^2} \approx 130 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u(\rho_{CuZn}) = 8260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 \text{ g}}{114 \text{ g}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 0,05 \text{ mm}}{12,10 \text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{-1 \text{ mm}}{120 \text{ mm}}\right)^2} \approx 130 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u(\rho_{Al}) = 2772 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 \text{ g}}{69 \text{ g}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 0,05 \text{ mm}}{16,25 \text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{-1 \text{ mm}}{120 \text{ mm}}\right)^2} \approx 50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

4.3 Wyznaczenie modułu Younga wraz z niepewnością

Korzystając z zależności wynikającej z równania d'Alemberta $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ otrzymujemy wzór na moduł Younga w postaci:

$$E = \rho v^2$$

gdzie

ρ – gęstość materiału

v – prędkość rozchodzenia się fali

Wstawiając wyliczone wcześniej wartości gęstości i prędkości otrzymujemy:

$$E_{Cu} = \rho_{Cu} v_{Cu}^2 = 8770 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(3821,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 128,1 \text{ GPa}$$

$$E_{CuZn} = \rho_{CuZn} v_{CuZn}^2 = 8260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(3575,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 105,6 \text{ GPa}$$

$$E_{Al} = \rho_{Al} v_{Al}^2 = 2772 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(5199,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 74,9 \text{ GPa}$$

Z prawa przenoszenia niepewności względnej:

$$u(E) = E \sqrt{\left(\frac{u(\rho)}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{2u(v)}{v}\right)^2}$$

zatem

$$u(E_{Cu}) = E_{Cu} \sqrt{\left(\frac{u(\rho_{Cu})}{\rho_{Cu}}\right)^2 + \left(\frac{2u(v_{Cu})}{v_{Cu}}\right)^2} = 128,1 \text{ GPa} \sqrt{\left(\frac{130 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{8770 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3821,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2} \approx 2,0 \text{ GPa}$$

$$u(E_{CuZn}) = E_{CuZn} \sqrt{\left(\frac{u(\rho_{CuZn})}{\rho_{CuZn}}\right)^2 + \left(\frac{2u(v_{CuZn})}{v_{CuZn}}\right)^2} = 105,6 \text{ GPa} \sqrt{\left(\frac{130 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{8260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3575,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2} \approx 1,7 \text{ GPa}$$

$$u(E_{Al}) = E_{Al} \sqrt{\left(\frac{u(\rho_{Al})}{\rho_{Al}}\right)^2 + \left(\frac{2u(v_{Al})}{v_{Al}}\right)^2} = 74,9 \text{ GPa} \sqrt{\left(\frac{50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2772 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 6,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5199,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2} \approx 1,4 \text{ GPa}$$

4.4 Porównanie z wartościami tabelarycznymi

Materiał	Wyliczona wartość	Niepewność	Wartość tabelaryczna E ^[1]
Miedź	128,1 GPa	2,0 GPa	110-135 GPa
Mosiądz	105,6 GPa	1,7 GPa	103-124 GPa
Aluminium	74,9 GPa	1,4 GPa	69 GPa

Otrzymane wartości modułu Younga dla miedzi i mosiądzu są zgodne z wartościami tabelarycznymi w zakresie niepewności pomiarowej.

Niepewność rozszerzona dla $k=3$ dla E_{Al} wynosi $U(E_{Al}) = 3 \cdot 1,4 \text{ GPa} = 4,2 \text{ GPa}$

$$|E_{Al} - E_{tabAl}| = 5,9 \text{ GPa} > U(E_{Al})$$

Zatem wyliczona wartość modułu Younga dla aluminium nie jest zgodna z wartością tabelaryczną mimo uwzględnienia niepewności rozszerzonej.

5 Wnioski

Otrzymane wartości modułu Younga dla miedzi i mosiądzu są zgodne z wartościami tabelarycznymi w zakresie niepewności pomiarowej. Wyliczona wartość modułu Younga dla aluminium nie jest natomiast zgodna z wartością tabelaryczną mimo uwzględnienia rozszerzonej niepewności pomiarowej. Powodem takiego wyniku doświadczenia mógł być błąd przypadkowy przy odczytywaniu częstotliwości dla kolejnych harmoniczych, niedokładność pomiarów, błąd systematyczny lub zakłócenia związane z prowadzonymi w laboratorium innymi doświadczeniami generującymi fale. Dodatkowym czynnikiem, który wpłynął na uzyskanie różniące się wartości mogła być jakość używanego sprzętu (mikrofon).

6 Źródła

[1] <https://poradnikinzyniera.pl/modul-younga-wszystko-co-musisz-wiedziec/>, data dostępu 30.10.2024

Załącznik: wyniki pomiarów przesłane po zajęciach 29.10.2024

Pomiary dla próbek				
Materiał	Niepewność	mosiądz	miedź	aluminium
d[mm]	0,05mm	12,1	12,1	16,25
h [mm]	1 mm	120	120	120
m[g]	1g	114	121	69

Długość prętów			
	mosiądz	miedź	aluminium
l[cm]	198,8cm	197,9	196,8

miedź		mosiądz		aluminium	
Nr harmonicznej	f[Hz]	Nr harmonicznej	f[Hz]	Nr harmonicznej	f[Hz]
1	968,994	1	904,395	1	1313,525
2	1937,988	2	1787,256	2	2648,584
3	2885,449	3	2691,65	3	3962,109
4	3854,443	4	3596,045	4	5297,168
5	4823,438	5	4500,439	5	6610,693
		6	5404,834	6	7924,219