

## Ćwiczenie nr 33: Kondensatory

### 1 Wprowadzenie

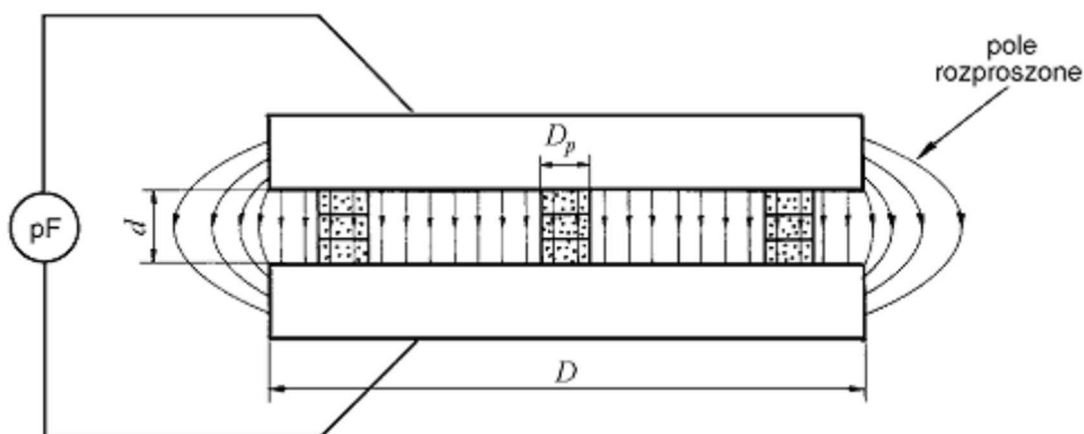
#### 1.1 Cel doświadczenia

Pomiar pojemności kondensatorów powietrznych i z warstwą dielektryka w celu wyznaczenia stałej elektrycznej  $\epsilon_0$  (przenikalności dielektrycznej próżni) i przenikalności względnych  $\epsilon_r$  różnych materiałów.

#### 1.2 Opis stanowiska

W skład stanowiska weszły:

- kondensator płaski zestawiony z dwóch kołowych płyt aluminiowych o płaskiej powierzchni oraz z przekładek wytoczonych z płyty plexiglasowej
- miernik LCR (używany w zakresach 200pF, 200nF)
- śruba mikrometryczna (dokładność 0,01mm)
- linijka (dokładność 1mm)
- płyta PCV, płyta drewniana



Rys. 1. Układ pomiarowy<sup>[1]</sup>

## 2 Sposób wykonania doświadczenia

Doświadczenie rozpoczęliśmy od włączenia miernika LCR, nastawienia zakresu 200pF oraz wyzerowania miernika. Zestawialiśmy następnie kondensator umieszczając między płytami 3 słupki pleksiglasowych przekładek. Wykonaliśmy 5 pomiarów dla wzrastającej liczby (1, 2, 3, 4, 5) przekładek w każdym z trzech słupków krążków, na zakończenie powtórzyliśmy pomiar dla kondensatora z pojedynczymi przekładkami. Mierzyliśmy grubość całego słupka użytego do budowy kondensatora. Wyznaczyliśmy dzięki tym pomiarom funkcję iloczynu  $Cd$  od odległości między okładkami.

W drugiej części doświadczenia zmieniliśmy zakres miernika na 200nF i zmierzaliśmy pojemności kondensatorów zestawionych z okładek metalowych rozdzielonych płytami wykonanymi z PCV oraz drewna.

Dokonaaliśmy również pomiaru średnicy przekładek pleksiglasowych (za pomocą śruby mikrometrycznej) oraz średnicy aluminiowej płyty kondensatora (za pomocą linijki).

## 3 Wyniki pomiarów

### 3.1 Pomiar pojemności kondensatora w zależności od odległości między okładkami

Liczba przekładek	$d1$	$d2$	$d3$	$d = (d1 + d2 + d3)/3$	$C$	$Cd$
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[pF]	[mm·pF]
1	3,85	3,83	3,86	3,85	119,6	460,1
2	6,79	6,74	6,71	6,75	71,3	481,0
3	10,64	10,58	10,54	10,59	48,3	511,3
4	13,49	13,5	13,39	13,46	39,4	530,3
5	17,34	17,39	17,25	17,33	32	554,5
1	3,86	3,85	3,85	3,85	118,7	457,4

Tabela 1. Pomiar pojemności kondensatora w funkcji odległości okładek kondensatora

Średnica płyty kondensatora:  $D = 23,9$  cm

Średnica przekładki pleksiglasowej:  $D_p = 19,52$  mm

Pojemność kondensatora maleje w miarę dokładania kolejnych warstw przekładek, zatem zakładamy, że błędy grube nie wystąpiły.

### 3.2 Pomiar pojemności kondensatora z dielektrykami

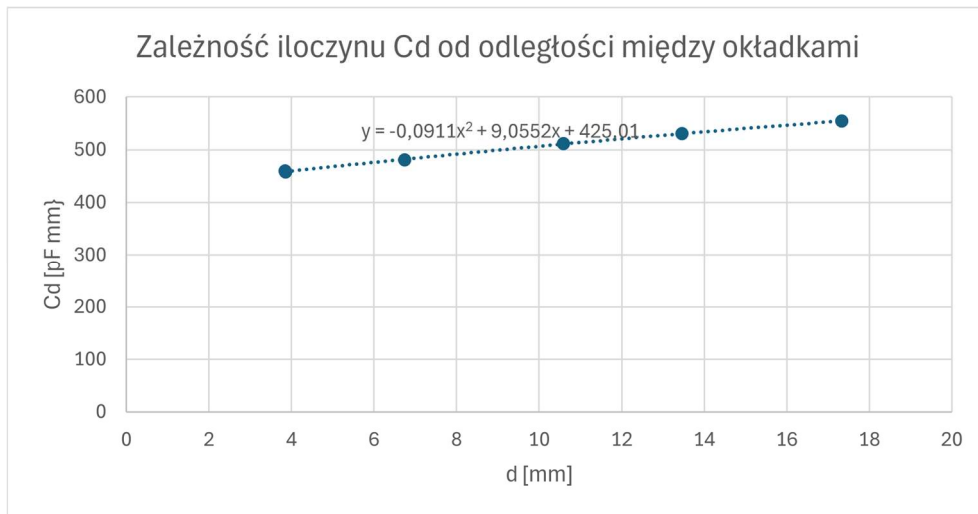
<i>Material</i>	$d$ [mm]	$C$ [nF]
PCV	3,27	0,33
Drewno	12,11	0,12

Tabela 2. Pomiar pojemności kondensatora dla różnych dielektryków

## 4 Opracowanie wyników pomiarów

### 4.1 Wykres

Wykres zależności iloczynu  $Cd$  od odległości między okładkami wraz z dopasowanym wielomianem:



### 4.2 Analiza dopasowanego wielomianu

Wartość ekstrapolowana do  $d=0$  iloczynu  $Cd$  wynosi:

$$(Cd)_{extr} \approx 425,0 \text{ mm} \cdot \text{pF}$$

Korzystając z funkcji REGLINP wiemy również, że:

$$u((Cd)_{extr}) = 2,5 \text{ mm} \cdot \text{pF}$$

### 4.3 Wyznaczenie $\epsilon_0$

Kondensator, którego używamy do wyznaczenia  $\epsilon_0$  traktujemy jako połączenie równoległe kondensatora z dielektrykiem o powierzchni okładek  $3S_p$  i przenikalności  $\epsilon_r$  (pleksiglas) oraz kondensatora próżniowego (przybliżenie dla kondensatora powietrznego używanego w doświadczeniu) o powierzchni okładek  $S - 3S_p$ .

Pojemność tak powstałego kondensatora wynosi:

$$C = \frac{\epsilon_0(S - 3S_p)}{d} + \frac{\epsilon_0\epsilon_r \cdot 3S_p}{d} = \epsilon_0 \frac{S + 3S_p(\epsilon_r - 1)}{d}$$

Stąd:

$$\epsilon_0 = \frac{Cd}{S + 3S_p(\epsilon_r - 1)}$$

$\epsilon_0$  – stała elektryczna

$\epsilon_r$  – przenikalność względna dielektryka (w tym przypadku pleksiglasu)

$S$  – pole powierzchni okładek kondensatora

$S_p$  – pole powierzchni przekładek

$d$  – odległości między okładkami kondensatora

Uwzględniając, że  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  oraz  $S_p = \frac{\pi D_p^2}{4}$ , gdzie  $D$  – średnica kondensatora,  $D_p$  – średnica przekładki oraz że względny udział pola rozproszonego jest najmniejszy dla wartości ekstrapolowanej  $(Cd)_{extr}$ , otrzymujemy wzór końcowy do wyznaczenia  $\epsilon_0$  na podstawie wykonanych pomiarów w postaci:

$$\epsilon_0 = \frac{4}{\pi D^2 + 3(\epsilon_r - 1)D_p^2} (Cd)_{extr}$$

Po wstawieniu danych:

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi} \frac{425,0 \text{ mm} \cdot \text{pF}}{(239 \text{ mm})^2 + 3(2,6 - 1)(19,52 \text{ mm})^2} \approx 0,00917943 \frac{\text{pF}}{\text{mm}} \approx 9,179 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

#### 4.4 Niepewność pomiarowa $u(\varepsilon_0)$

Korzystając z uproszczonego wzoru  $\varepsilon_0 = \frac{4(Cd)_{extr}}{\pi D^2}$  oraz prawa przenoszenia niepewności względnej:

$$\frac{u(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} = \sqrt{\left(\frac{u((Cd)_{extr})}{(Cd)_{extr}}\right)^2 + \left(\frac{-2u(D)}{D}\right)^2}$$

otrzymujemy:

$$u(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{u((Cd)_{extr})}{(Cd)_{extr}}\right)^2 + \left(\frac{-2u(D)}{D}\right)^2}$$

Niepewność  $u((Cd)_{extr})$  podana przez funkcję REGLINP:  $u((Cd)_{extr}) = 2,5 \text{ mm} \cdot \text{pF}$   
Niepewność pomiarowa typu B średnicy kondensatora:  $u(D) = 1 \text{ mm}$

Stąd

$$u(\varepsilon_0) = 9,179 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \sqrt{\left(\frac{2,5 \text{ mm} \cdot \text{pF}}{425,0 \text{ mm} \cdot \text{pF}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 1 \text{ mm}}{239 \text{ mm}}\right)^2} \approx 0,094 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

#### 4.5 Niepewność rozszerzona i porównanie wyliczonej wartości $\varepsilon_0$ z wartością tabelaryczną

Niepewność rozszerzona dla  $k=3$  wynosi:

$$U(\varepsilon_0) = 0,29 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

Wartość tabelaryczna stałej elektrycznej  $\varepsilon_{0t} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$  [2]

$$|\varepsilon_{0t} - \varepsilon_0| = \left| 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} - 9,179 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right| = 0,325 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} > U(\varepsilon_0)$$

Uzyskany wynik nie jest zgodny z tabelaryczną stałą elektryczną  $\varepsilon_{0t} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$  mimo uwzględnienia niepewności rozszerzonej.

#### 4.6 Wyznaczenie względnej przenikalności elektrycznej wybranych dielektryków

Przekształcając wzór  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$  otrzymujemy:

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}$$

Korzystając z wartości tablicowej  $\varepsilon_{0t} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$  i wykonanych pomiarów  $C$ ,  $d$  oraz uwzględniając że  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  dostajemy wartości:

Materiał	$d$ [mm]	$C$ [nF]	$\epsilon_r$
PCV	3,27	0,33	2,717
drewno	12,11	0,12	3,66

Tabela 3. Przenikalność elektryczna wybranych dielektryków

#### 4.7 Niepewność pomiarowa względnej przenikalności elektrycznej wybranych dielektryków

Korzystając z prawa przenoszenia niepewności względnej:

$$\frac{u(\epsilon_r)}{\epsilon_r} = \sqrt{\left(\frac{u(C)}{C}\right)^2 + \left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{-2u(D)}{D}\right)^2}$$

stąd:

$$u(\epsilon_r) = \epsilon_r \sqrt{\left(\frac{u(C)}{C}\right)^2 + \left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{-2u(D)}{D}\right)^2}$$

$$u(d) = 0,01 \text{ mm}$$

$$u(D) = 1 \text{ mm}$$

$$u(C) = \frac{0,01 \text{ nF}}{\sqrt{3}} \approx 0,0058 \text{ nF}$$

dla PCV:

$$u(\epsilon_r) = 2,717 \sqrt{\left(\frac{0,0058 \text{ nF}}{0,33 \text{ nF}}\right)^2 + \left(\frac{0,01 \text{ mm}}{3,27 \text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \text{ mm}}{239 \text{ mm}}\right)^2} \approx 0,054$$

dla drewna:

$$u(\epsilon_r) = 3,66 \sqrt{\left(\frac{0,0058 \text{ nF}}{0,12 \text{ nF}}\right)^2 + \left(\frac{0,01 \text{ mm}}{12,11}\right)^2 + \left(\frac{-2 \text{ mm}}{239 \text{ mm}}\right)^2} \approx 0,18$$

#### 4.8 Niepewność rozszerzona $U(\epsilon_r)$ i porównanie z wartością tabelaryczną

Dla PCV:

Niepewność rozszerzona  $U(\epsilon_r)$  dla  $k=2$ :

$$U(\epsilon_r) = 0,11$$

Wartość tabelaryczna  $\epsilon_{rt}$  dla PCV wynosi 2,8

$$|\epsilon_{rt} - \epsilon_r| = |2,8 - 2,717| = 0,083 < U(\epsilon_r)$$

Wyznaczona wartość względnej przenikalności PCV jest zgodna z wartością tabelaryczną w granicach rozszerzonej niepewności pomiarowej.

Dla drewna:

Niepewność rozszerzona  $U(\epsilon_r)$  dla  $k=2$ :

$$U(\epsilon_r) = 0,36$$

Wartość tabelaryczna  $\epsilon_{rt}$  dla drewna wynosi 4

$$|\epsilon_{rt} - \epsilon_r| = |4 - 3,66| = 0,34 < U(\epsilon_r)$$

Wyznaczona wartość względnej przenikalności drewna jest zgodna z wartością tabelaryczną w granicach rozszerzonej niepewności pomiarowej.

## 4.9 Wyznaczenie prędkości światła

Korzystając z zależności na prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w danym ośrodku, możemy w szczególności wyznaczyć prędkość światła  $c$ , czyli prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Korzystamy z otrzymanej wcześniej wartości  $\epsilon_0$ , natomiast wartość  $\mu_0$  liczymy z definicji ampera i traktujemy jako stałą:

wartość prądu, który płynąc przez dwa nieskończone równoległe przewody odległe o  $a = 1 \text{ m}$  wytwarza siłę  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  na odcinku  $l = 1 \text{ m}$  długości przewodu. Siła ta dana jest wzorem:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a} \quad \text{stąd: } \mu_0 = \frac{2\pi a F}{I^2 l} = \frac{2\pi \cdot 1[\text{m}] \cdot 2 \cdot 10^{-7}[\text{N}]}{(1[\text{A}])^2 \cdot 1[\text{m}]} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

I otrzymujemy:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 9,179 \cdot 10^{-1} \frac{\text{F}}{\text{m}}}} \approx 294\,440\,389 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 294\,400\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 4.10 Niepewność pomiarowa $u(c)$

Korzystając z prawa przenoszenia niepewności względnej

$$\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{2} u(\epsilon_0)}{\epsilon_0}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u(\epsilon_0)}{\epsilon_0}$$

stąd:

$$u(c) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u(\epsilon_0)}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \cdot 294\,400\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{0,094 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}}{9,179 \cdot 10^{-1} \frac{\text{F}}{\text{m}}} \approx 1\,600\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 4.11 Niepewność rozszerzona $U(c)$ i porównanie z wartością tabelaryczną

Niepewność rozszerzona dla  $k=3$ :

$$U(c) = 4\,800\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Porównanie z wartością tabelaryczną:

$$|c - c_t| = \left| 294\,400\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = 5\,392\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} > U(c)$$

Oszacowana prędkość światła nie zgadza się z wartością tabelaryczną  $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [2] mimo uwzględnienia rozszerzonej niepewności pomiarowej.

## 5 Wnioski

Uzyskane wyniki stałej elektrycznej  $\varepsilon_0$  oraz prędkości światła  $c$  nie są zgodne z wartościami tabelarycznymi mimo uwzględnienia rozszerzonej niepewności pomiarowej.

Taki rezultat doświadczenia mógł być spowodowany niedokładnością pomiarów – błędem w odczycie wymiarów, wadliwością miernika LCR lub korzystaniem z przybliżonego wzoru do oszacowania niepewności. W szczególności mógł pojawić się również błąd systematyczny.

Uzyskane wyniki względnej przenikalności elektrycznej PCV oraz drewna są natomiast zgodne z wartościami tabelarycznymi w zakresie rozszerzonych niepewności pomiarowych.

## 5 Źródła

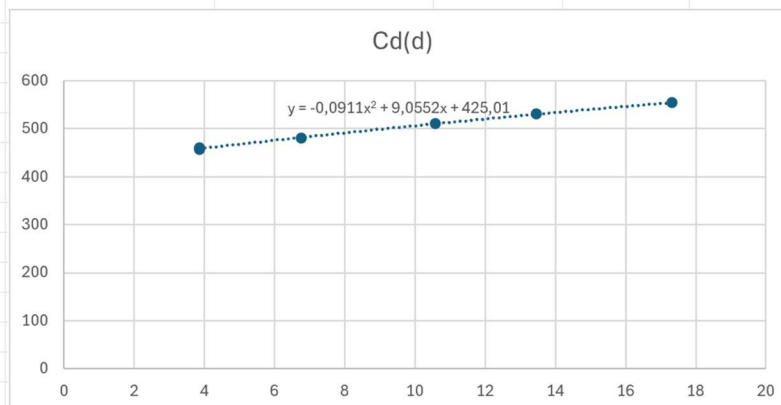
[1] [https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy\\_cwiczen/33\\_opis.pdf](https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy_cwiczen/33_opis.pdf), data dostępu: 18.10.2024

[2] [https://www.cke.gov.pl/images/\\_EGZAMIN\\_MATURALNY\\_OD\\_2023/Informatory/wybrane\\_wzory\\_stale\\_fizykochemiczne\\_EM2023.pdf](https://www.cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/wybrane_wzory_stale_fizykochemiczne_EM2023.pdf), data dostępu: 18.10.2024

# Załącznik: Wyniki pomiarów przesłane po zakończonych zajęciach

Liczba przekładek	$d_1$ [mm]	$d_2$ [mm]	$d_3$ [mm]	$d = (d_1 + d_2 + d_3)/3$ [mm]	$C$ [pF]	$Cd$ [mm·pF]
1	3,85	3,83	3,86	3,84666667	119,6	460,061333
2	6,79	6,74	6,71	6,74666667	71,3	481,037333
3	10,64	10,58	10,54	10,58666667	48,3	511,336
4	13,49	13,5	13,39	13,46	39,4	530,324
5	17,34	17,39	17,25	17,32666667	32	554,453333
1	3,86	3,85	3,85	3,85333333	118,7	457,390667

d[mm]	Cd[pF·mm]
3,8466667	460,0613333
6,7466667	481,0373333
10,586667	511,336
13,46	530,324
17,326667	554,4533333
3,8533333	457,3906667



Cd	425,01	pFmm	średnica przekładki	19,52 mm	"±0,01mm"
			średnica kondensatora	23,9 cm	"±0,1cm"

Materiał	d[mm]	C[nF]
PCV	3,27	0,33
drewno	12,11	0,12