Wibracje akustyczne warstwy materiału
rozwiązanie równania metodą elementów skończonych

Katarzyna Bęben, styczeń 2025

Sformułowanie silne

Dane jest równanie

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u = sinx$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0) = 1$$

$$\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 4$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \ \rightarrow u(x) \in \ \mathbb{R}$$

Sformułowanie wariacyjne

Ze względu na zadany lewostronny warunek Dirichleta za przestrzeń funkcji testowych V przyjmujemy takie v, że v(0) = 0.

Szukamy $u = w + \ \tilde{u}, gdzie\ w \in V, \tilde{u}(0) = 1$

Mnożymy obustronnie zadane równanie przez dowolną funkcję testową $v \in V$ i całkujemy na dziedzinie:

$$\int_0^2 -u''v\,dx - \int_0^2 uv\,dx \ = \int_0^2 vsinx\,dx$$

Całkując przez części pozbywamy się drugiej pochodnej

$$u'(0)v(0) - u'(2)v(2) \ + \int_0^2 u'v'\,dx - \int_0^2 uv\,dx \ = \int_0^2 vsinx\,dx$$

Ponieważ $v \in V$ to $v(0) = 0$

Ponadto $u'(2) - u(2) = 4 \ \Longrightarrow u'(2) = 4 + u(2)$

Korzystając z powyższego i porządkując wyrażenia otrzymujemy:

$$-u(2)v(2) + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uv\, dx \; = \; \int_0^2 vsinx\, dx + 4v(2)$$

Podstawiając $u = w + \tilde{u}$

$$-\tilde{u}(2)v(2) - w(2)v(2) + \int_0^2 (w' + \tilde{u}')v'dx - \int_0^2 (w + \tilde{u})v\, dx \; = \; \int_0^2 vsinx\, dx + 4v(2)$$

Otrzymujemy finalnie:

$$\underbrace{-w(2)v(2) + \int_0^2 w'v'dx - \int_0^2 wv\, dx}_{B(w,v)} = \underbrace{\int_0^2 vsinx\, dx + \int_0^2 \tilde{u}v\, dx \; - \int_0^2 \tilde{u}'v'dx + \tilde{u}(2)v(2) + 4v(2)}_{\tilde{L}(v)}$$

Dyskretyzacja problemu

Równanie liniowe, do którego sprowadza się odnalezienie $w = \; w_0 e_0 + w_1 e_1 + \cdots + w_n e_n$ spełniające równanie $B(w, v) = \tilde{L}(v)$ dla każdego $v \in V$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \cdots & B(e_n, e_1) \\ 0 & B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_n, e_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & B(e_1, e_n) & B(e_2, e_n) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(e_0) \\ \tilde{L}(e_1) \\ \tilde{L}(e_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(e_n) \end{bmatrix}$$

Funkcje bazowe przestrzeni, w której rozwiązujemy problem przyjmujemy jako

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & dla\ x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & dla\ x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & wpp \end{cases}$$

gdzie $h = \frac{2}{n}$, $x_i = 2 \cdot \frac{i}{n}\ dla\ x \in \{0, \ldots, n\}$

Spostrzeżenia:

$$B(e_i, e_j) = 0\ dla\ |i - j| > 2$$

$$B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$$

Rozwiązanie

Do całkowania numerycznego stosujemy metodę 2-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a.

Aby otrzymać rozwiązanie końcowe, dla każdego $w(x)$ dodajemy wartość shiftu $\tilde{u}(x)$

$$u(x) = w(x) + \tilde{u}(x)$$

Przyjmujemy $\tilde{u}(x) = e_0(x)$

Wynik

Dla n=20 otrzymujemy następującą zależność: