

非齐次线性方程求通解

Wednesday, October 19, 2022 09:30

- 解的步骤：
- 1. 求特解  $\alpha$  (非齐)
  - 2. 求基础解系  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  (齐次)
  - 3. 得到通解:  $\alpha + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t$  ( $k_i$  是任意常数)

例: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

解: 1. 建立增广矩阵

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

2. 对增广矩阵做初等行变换  $\rightarrow$  阶梯形矩阵

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. 对阶梯形矩阵做初等行变换  $\rightarrow$  行最简

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

4. 计算基础解系

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 12 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$r(A) = 3$   
 $n - r(A) = 2$   
 $\therefore$  基础解系有 2 个向量构成  
自由变量有 2 个

找主元, 找自由变量.  
 $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{cases}$  (主元)  
 $\begin{cases} x_3 \\ x_5 \end{cases}$  (自由变量)

通解框架为:  $\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$   
特解  $\rightarrow$  基础解系

求特解: 基于非齐次线性方程, 全自由变量都为 0, 代入求得  
求基础解系: 基于齐次线性方程, 全自由变量为  $(1, 0), (0, 1)$ , 代入求得

通解: 
$$\begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$