

求特征值特征向量

Thursday, October 20, 2022 15:52

$$\text{求 } A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix} \text{ 特征值, 特征向量}$$

解: ① $|\lambda E - A| = 0 \rightarrow$ 特征值 λ

② $(\lambda E - A) \cdot x = 0 \rightarrow$ 特征向量 $\left\{ \begin{array}{l} \text{极大线性无关组} \\ \text{基础解系} \end{array} \right.$

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

$\therefore (\lambda E - A) \cdot x = 0$ A 是 n 阶方阵.

n 个方程 n 个未知数齐次方程有非零解 \Rightarrow 克拉默法则

$$|\lambda E - A| = 0$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 0 & 18-\lambda & \lambda-18 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-17 & 4 & 2 \\ 2 & \lambda-10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow (\lambda-18) \begin{vmatrix} \lambda-17 & 4 \\ 2 & \lambda-10 \end{vmatrix} = (\lambda-18) \cdot (\lambda^2 - 27\lambda + 162)$$

$$= (\lambda-18)^2 \cdot (\lambda-9)$$

A 的特征值: 18, 18, 9

当 $\lambda = 18$ 时, $(18E - A)x = 0$

$$(18E - A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元 自由变量

得基础解系: $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$

$\alpha_2 = (-2, 0, 1)^T$

特征向量 α : $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$ (k_1, k_2 不全为 0)

当 $\lambda = 9$ 时 $(9E - A) \cdot x = 0$

$$(9E - A) = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \\ -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元 自由变量

得基础解系: $\alpha_3 = \left[\frac{1}{2}, 1, 1 \right]^T$

特征向量 $\alpha = k_3 \alpha_3$, $k_3 \neq 0$