Buğday, Cebir, Ana Bileşen, Şehir, Uzaklık, Gen, Ağaç, Dil, Evrim, İnanç

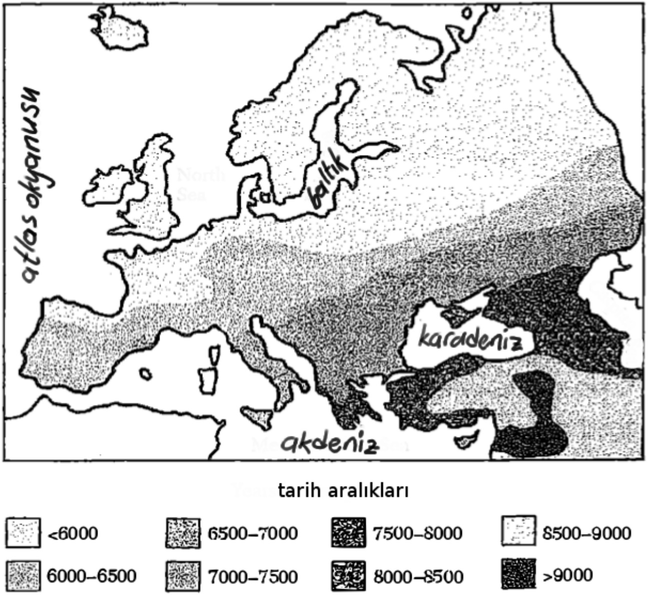
Ferit Öztürk

Boğaziçi Üniversitesi Matematik Topluluğu

II. Matematik ve Toplum Çalıştayı

18 Şubat 2016

(Bilgisayarınızda izlerken "sunum" tercihini seçerek izleyiniz.)


atlas okyanusu
baltık
karadeniz
akdeniz
tarih aralıkları
<6000
6000–6500
6500–7000
7000–7500
7500–8000
8000–8500
8500–9000
>9000

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = ax + by + cz$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir sütun vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak için ilk sütun vektörünü devirip (transpose) satır vektörü yapıyoruz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^D \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir sütun vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak için ilk sütun vektörünü devirip (transpose) satır vektörü yapıyoruz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^D \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir sütun vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak için ilk sütun vektörünü devirip (transpose) satır vektörü yapıyoruz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^D \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir sütun vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak için ilk sütun vektörünü devirip (transpose) satır vektörü yapıyoruz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^D \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

- $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$

- Bir satır vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = (ax + by + cz)_{1\times 1}$$

- s satır u sütun vektörü ise,

$$s \cdot u = |s| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{s,u}$$

- Bir sütun vektörünü bir sütun vektörü ile çarpmak için ilk sütun vektörünü devirip (transpose) satır vektörü yapıyoruz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^D \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

- $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u^D \cdot u$

- $m \times n$ bir matris:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $m \times n$ bir matris:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $A_{m\times n}$ matrisi ile $B_{n\times k}$ matrisini de çarpabiliyoruz:

- $m \times n$ bir matris:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $A_{m\times n}$ matrisi ile $B_{n\times k}$ matrisini de çarpabiliyoruz:

$$(A \cdot B)_{ij} = A\text{'nın } i\text{. satırı çarpı } B\text{'nin } j\text{. sütunu}$$

- $m \times n$ bir matris:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $A_{m\times n}$ matrisi ile $B_{n\times k}$ matrisini de çarpabiliyoruz:

$$(A \cdot B)_{ij} = A\text{'nın } i\text{. satırı çarpı } B\text{'nin } j\text{. sütunu} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

- Bir $A_{m\times n} = (a_{ij})$ matrisinin devriği $n \times m$ bir matris:

$$(A^D)_{ij} = a_{ji}$$

- Bir $A_{m\times n} = (a_{ij})$ matrisinin devriği $n \times m$ bir matris:

$$(A^D)_{ij} = a_{ji}$$

- $(A \cdot B)^D = B^D \cdot A^D$

- Bir $A_{m\times n} = (a_{ij})$ matrisinin devriği $n \times m$ bir matris:

$$(A^D)_{ij} = a_{ji}$$

- $(A \cdot B)^D = B^D \cdot A^D$
- Eğer $A^D = A$ ise A'ya *simetrik* matris diyoruz.

- Bir $A_{m \times n} = (a_{ij})$ matrisinin devriği $n \times m$ bir matris:

$$(A^D)_{ij} = a_{ji}$$

- $(A \cdot B)^D = B^D \cdot A^D$
- Eğer $A^D = A$ ise A'ya *simetrik* matris diyoruz. Simetrik matrisler kare olmak zorunda.

Bir $A_{n \times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İki hizli örnek:

1. $(i^2 = -1)$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n \times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n \times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix},$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir $A_{n\times n}$ matrisi için

$$Av = cv$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir c sayısı varsa, bu c'ye A'nın bir *özdeğeri*, v'ye ise c'ye karşılık gelen bir *özvektör* denir.

İKI HIZLI ÖRNEK:

1. $(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İki hızlı soru:

İKI HIZLI SORU:

1. $n \times n$ bir matrisin tam n adet kompleks özdeğeri olması gerektiği gösterilebilir. Özdeğerlerinin kaç tanesi reeldir?

İKI HIZLI SORU:

1. $n \times n$ bir matrisin tam n adet kompleks özdeğeri olması gerektiği gösterilebilir. Özdeğerlerinin kaç tanesi reeldir?
2. Bir matris için birbirinden (doğrusal olarak) bağımsız kaç özvektör seçilebilir?

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Simetrik matrisler için Spektrum Teoremi

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Simetrik matrisler için Spektrum Teoremi

$n \times n$ bir simetrik matrisin tüm özdeğerleri reeldir.

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Simetrik matrisler için Spektrum Teoremi

$n \times n$ bir simetrik matrisin tüm özdeğerleri reeldir.
Bunlara karşılık gelen tüm özvektörler birbirine dik ve tam n adet seçilebilir.

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Simetrik matrisler için Spektrum Teoremi

$n \times n$ bir simetrik matrisin tüm özdeğerleri reeldir.
Bunlara karşılık gelen tüm özvektörler birbirine dik ve tam n adet seçilebilir.

Dolayısıyla teoremin verdiği (hatta birim uzunlukta seçilebilecek) özvektörler ile $\mathbb{R}^n$'nin her vektörünü ifade edebiliriz.

Bu iki soruya birden cevap veren bir teorem:

Simetrik matrisler için Spektrum Teoremi

$n \times n$ bir simetrik matrisin tüm özdeğerleri reeldir.
Bunlara karşılık gelen tüm özvektörler birbirine dik ve tam n adet seçilebilir.

Dolayısıyla teoremin verdiği (hatta birim uzunlukta seçilebilecek) özvektörler ile $\mathbb{R}^n$'nin her vektörünü ifade edebiliriz. Yani o özvektörler $v_1, \ldots, v_n$ olsun; her $u \in \mathbb{R}^n$ vektörü için öyle $d_1, \ldots, d_n$ reel sayıları vardır ki

$$u = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i$$

diye yazabiliriz.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.
- Her k için P_k noktasını haritasında işaretliyor.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.
- Her k için P_k noktasını haritasında işaretliyor.
- P_k'de n adet değişkeninin ölçümünü yapıyor:

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.
- Her k için P_k noktasını haritasında işaretliyor.
- P_k'de n adet değişkeninin ölçümünü yapıyor: örneğin, sıcaklık, nem, metrekarede böcek sayısı, böcek türü sayısı vs vs.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

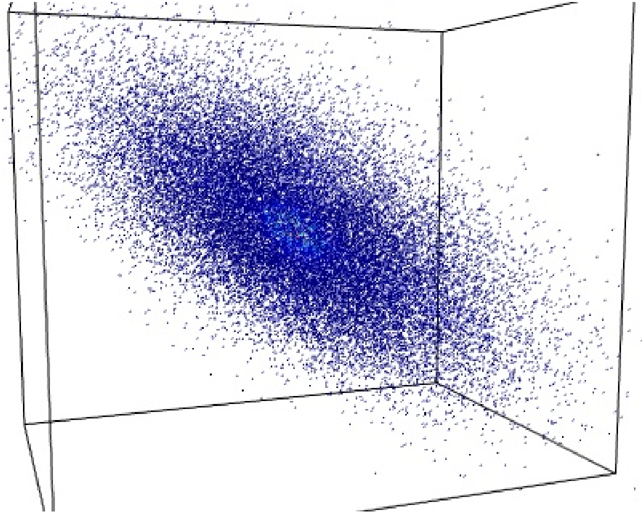
- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.
- Her k için P_k noktasını haritasında işaretliyor.
- P_k'de n adet değişkeninin ölçümünü yapıyor: örneğin, sıcaklık, nem, metrekarede böcek sayısı, böcek türü sayısı vs vs.
- Böylece matrisinin s_k satırını oluşturuyor.

Bir bilim insanı olan Fulya hoca arazide araştırma yapıyor.

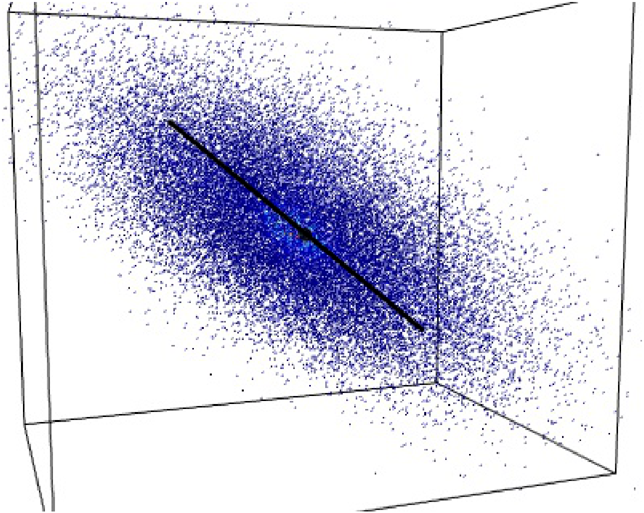
- m adet noktada duraklıyor: $P_1, \ldots, P_m$.
- Her k için P_k noktasını haritasında işaretliyor.
- P_k'de n adet değişkeninin ölçümünü yapıyor: örneğin, sıcaklık, nem, metrekarede böcek sayısı, böcek türü sayısı vs vs.
- Böylece matrisinin s_k satırını oluşturuyor.
- Okuldaki odasına döndüğünde elinde $m \times n$ bir A matrisi var.

A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor.

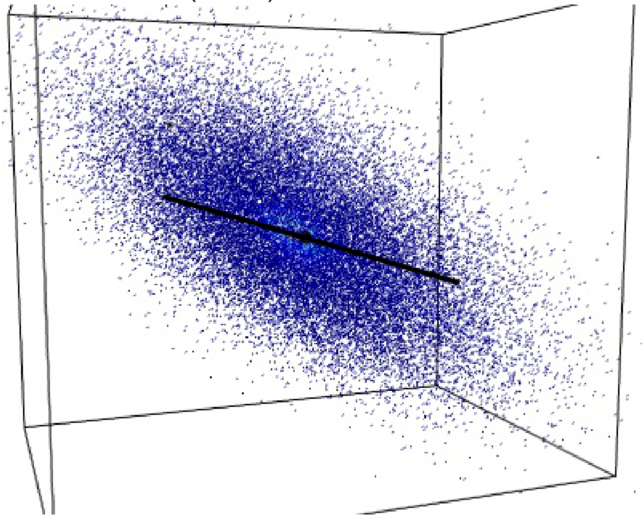
A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor. Şöyle bir *veri bulutumuz* var ($n = 3$):



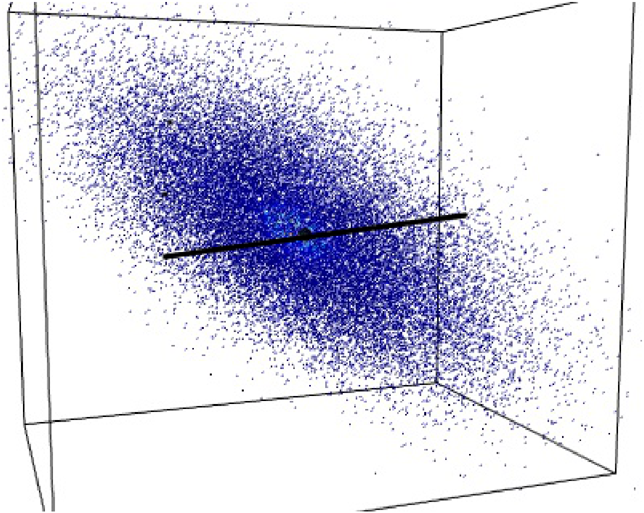
A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor. Şöyle bir *veri bulutumuz* var ($n = 3$):



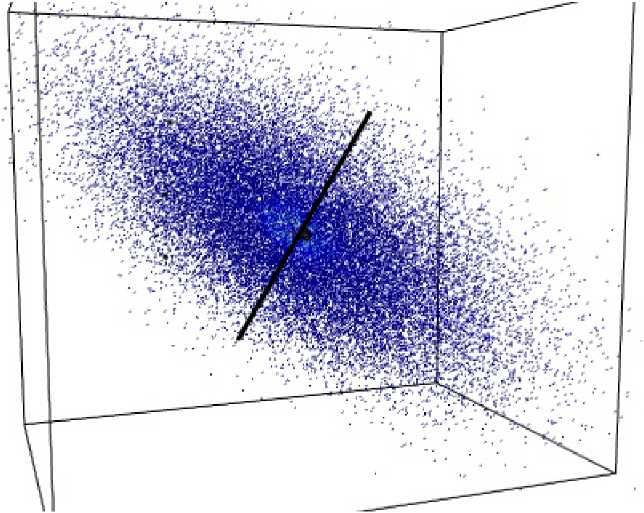
A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor. Şöyle bir *veri bulutumuz* var ($n = 3$):



A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor. Şöyle bir *veri bulutumuz* var ($n = 3$):



A'nın her bir satırı $\mathbb{R}^n$'de bir noktaya karşılık geliyor. Şöyle bir *veri bulutumuz* var ($n = 3$):



Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$iz_u s_k \quad = \quad |s_k| \cdot \cos\theta_{u,s_k}$$

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$(iz_u s_k)^2 = (|s_k| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2$$

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$\begin{aligned}(iz_u s_k)^2 &= (|s_k| \cdot \cos \theta_{u,s_k})^2 \\ &= (|s_k| \cdot |u| \cdot \cos \theta_{u,s_k})^2\end{aligned}$$

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$\begin{aligned}(iz_u s_k)^2 &= (|s_k| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2 \\ &= (|s_k| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2 \\ &= (s_k \cdot u)^2\end{aligned}$$

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$\begin{aligned}(iz_u s_k)^2 &= (|s_k| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2 \\ &= (|s_k| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2 \\ &= (s_k \cdot u)^2\end{aligned}$$

Fulya hocanın sorusu: Veri bulutu ne doğrultuda uzanıyor?

Öyle bir birim $u \in \mathbb{R}^n$ vektörü bulun ki

$$\sum_{k=1}^{m} (s_k \cdot u)^2$$

mümkün olan en büyük olsun.

Öyle bir u (birim) yönü bulacağız ki s_k'lerin u'ya izdüşümü uzunlukları en fazla olsun.

$$\begin{aligned}(iz_u s_k)^2 &= (|s_k| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2\\ &= (|s_k| \cdot |u| \cdot \cos\theta_{u,s_k})^2\\ &= (s_k \cdot u)^2\end{aligned}$$

Fulya hocanın sorusu: Veri bulutu ne doğrultuda uzanıyor?

Öyle bir birim $u \in \mathbb{R}^n$ vektörü bulun ki

$$\sum_{k=1}^{m} (s_k \cdot u)^2$$

mümkün olan en büyük/en küçük olsun.

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} - - - & s_1 & - - - \\ - - - & s_2 & - - - \\ & \vdots & \\ - - - & s_m & - - - \end{bmatrix}$$

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} --- & s_1 & --- \\ --- & s_2 & --- \\ & \vdots & \\ --- & s_m & --- \end{bmatrix}$$

ve bu yüzden

$$A \cdot u \quad = \quad \begin{bmatrix} s_1 \cdot u \\ s_2 \cdot u \\ \vdots \\ s_m \cdot u \end{bmatrix}$$

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} --- & s_1 & --- \\ --- & s_2 & --- \\ & \vdots & \\ --- & s_m & --- \end{bmatrix}$$

ve bu yüzden

$$|A \cdot u|^2 = | \begin{bmatrix} s_1 \cdot u \\ s_2 \cdot u \\ \vdots \\ s_m \cdot u \end{bmatrix} |^2$$

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} --- & s_1 & --- \\ --- & s_2 & --- \\ & \vdots & \\ --- & s_m & --- \end{bmatrix}$$

ve bu yüzden

$$|A \cdot u|^2 = | \begin{bmatrix} s_1 \cdot u \\ s_2 \cdot u \\ \vdots \\ s_m \cdot u \end{bmatrix} |^2 = \sum_{k=1}^{m} (s_k \cdot u)^2$$

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} --- & s_1 & --- \\ --- & s_2 & --- \\ & \vdots & \\ --- & s_m & --- \end{bmatrix}$$

ve bu yüzden

$$(Au)^D(Au) = |A \cdot u|^2 = | \begin{bmatrix} s_1 \cdot u \\ s_2 \cdot u \\ \vdots \\ s_m \cdot u \end{bmatrix} |^2 = \sum_{k=1}^{m} (s_k \cdot u)^2$$

Ama A matrisi şöyle idi:

$$A = \begin{bmatrix} --- & s_1 & --- \\ --- & s_2 & --- \\ & \vdots & \\ --- & s_m & --- \end{bmatrix}$$

ve bu yüzden

$$u^D A^D A u = (Au)^D (Au) = |A \cdot u|^2 = | \begin{bmatrix} s_1 \cdot u \\ s_2 \cdot u \\ \vdots \\ s_m \cdot u \end{bmatrix} |^2 = \sum_{k=1}^{m} (s_k \cdot u)^2$$

$X = A^D A$ diyelim.

$X = A^D A$ diyelim.

Fulya hocanın sorusu: Veri bulutu ne doğrultuda uzanıyor?

Öyle bir birim $u \in \mathbb{R}^n$ vektörü bulun ki

$$R(u) = u^D X u$$

mümkün olan en büyük/en küçük olsun.

- X matrisi $n \times n$ kare matris.

- X matrisi $n \times n$ kare matris.
- Üstelik simetrik: $X^D = (A^D A)^D = A^D (A^D)^D = A^D A = X$.

- X matrisi $n \times n$ kare matris.
- Üstelik simetrik: $X^D = (A^D A)^D = A^D (A^D)^D = A^D A = X$.
- X'in özdeğerlerinin hepsi reel: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$.

- X matrisi $n \times n$ kare matris.
- Üstelik simetrik: $X^D = (A^D A)^D = A^D (A^D)^D = A^D A = X$.
- X'in özdeğerlerinin hepsi reel: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$.
- Karşılık gelen birim özvektörler $v_1, v_2, \ldots, v_n$ olsun.

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun.

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun.
  $R(v_1) = v_1^D X v_1$

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun.
  $R(v_1) = v_1^D X v_1 = v_1^D a_1 v_1$

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun.
  $R(v_1) = v_1^D X v_1 = v_1^D a_1 v_1 = a_1 |v_1|^2 = a_1$

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun. $R(v_1) = v_1^D X v_1 = v_1^D a_1 v_1 = a_1 |v_1|^2 = a_1$
- $u = c_1 v_1 + c_2 v_2$ için

$$\begin{aligned} R(u) &= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D X (c_1 v_1 + c_2 v_2) \\ &= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D (c_1 a_1 v_1 + c_2 a_2 v_2) \\ &= c_1^2 a_1 + c_2^2 a_2 \end{aligned}$$

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun.
  $R(v_1) = v_1^D X v_1 = v_1^D a_1 v_1 = a_1 |v_1|^2 = a_1$
- $u = c_1 v_1 + c_2 v_2$ için

$$
\begin{aligned}
R(u) &= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D X (c_1 v_1 + c_2 v_2) \\
&= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D (c_1 a_1 v_1 + c_2 a_2 v_2) \\
&= c_1^2 a_1 + c_2^2 a_2
\end{aligned}
$$

- Benzer biçimde genel bir $u = \sum_i c_i v_i$ için

$$R(u) = \sum_i c_i^2 a_i$$

- Soruyu çözmek için bir deneme: $u = v_1$ olsun. $R(v_1) = v_1^D X v_1 = v_1^D a_1 v_1 = a_1 |v_1|^2 = a_1$
- $u = c_1 v_1 + c_2 v_2$ için

$$
\begin{aligned}
R(u) &= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D X (c_1 v_1 + c_2 v_2) \\
&= (c_1 v_1 + c_2 v_2)^D (c_1 a_1 v_1 + c_2 a_2 v_2) \\
&= c_1^2 a_1 + c_2^2 a_2
\end{aligned}
$$

- Benzer biçimde genel bir $u = \sum_i c_i v_i$ için

$$R(u) = \sum_i c_i^2 a_i$$

- u birim ise $\sum_i c_i^2 = 1$ olmalı.

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ sayılarının toplamları 1 olan c_i^2 sayılarıyla ağırlıklı ortalamasını alırsanız

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ sayılarının toplamları 1 olan c_i^2 sayılarıyla ağırlıklı ortalamasını alırsanız
  en çok a_1 en az a_n elde edersiniz.

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ sayılarının toplamları 1 olan c_i^2 sayılarıyla ağırlıklı ortalamasını alırsanız
  en çok a_1 en az a_n elde edersiniz.
- Fulya hocanın sorusuna tam cevap:

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ sayılarının toplamları 1 olan c_i^2 sayılarıyla ağırlıklı ortalamasını alırsanız
  en çok a_1 en az a_n elde edersiniz.
- Fulya hocanın sorusuna tam cevap:

  VERI BULUTU BIRINCI ANA BILEŞEN OLAN v_1 YÖNÜNDE UZANIR.

- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ sayılarının toplamları 1 olan c_i^2 sayılarıyla ağırlıklı ortalamasını alırsanız
  en çok a_1 en az a_n elde edersiniz.
- Fulya hocanın sorusuna tam cevap:

  VERI BULUTU BIRINCI ANA BILEŞEN OLAN v_1 YÖNÜNDE UZANIR.

  O BILEŞENLERI ÇIKARINCA KALAN BULUT, IKINCI ANA BILEŞEN v_2 YÖNÜNDE UZANIR VS VS.

- Bir ülkede rastgele 10 şehir seçin; biribirlerine uzaklıklarını 10'a 10 bir A matrisine yerleştirin.

- Bir ülkede rastgele 10 şehir seçin; biribirlerine uzaklıklarını 10'a 10 bir A matrisine yerleştirin.

	Boston	Chicago	Dallas	Denver	osAngeles	Miami	NewYork	Phoenix	Pittsburgh	nFrancisco	Seattle
Boston	0	983	1815	1991	3036	1539	213	2664	792	2385	2612
Chicago	983	0	1205	1050	2112	1390	840	1729	457	2212	2052
Dallas	1815	1205	0	801	1425	1332	1604	1027	1237	1765	2404
Denver	1991	1050	801	0	1174	2041	1780	836	1411	1765	1373
LosAngele	3036	2112	1425	1174	0	2757	2825	398	2456	403	1909
Miami	1539	1390	1332	2041	2757	0	1258	2359	1250	3097	3389
NewYork	213	840	1604	1780	2825	1258	0	2442	386	3036	2900
Phoenix	2664	1729	1027	836	398	2359	2442	0	2073	800	1482
Pittsburgh	792	457	1237	1411	2456	1250	386	2073	0	2653	2517
SanFranci	2385	2212	1765	1765	403	3097	3036	800	2653	0	817
Seattle	2612	2052	2404	1373	1909	3389	2900	1482	2517	817	0

- Bir ülkede rastgele 10 şehir seçin; biribirlerine uzaklıklarını 10'a 10 bir A matrisine yerleştirin.

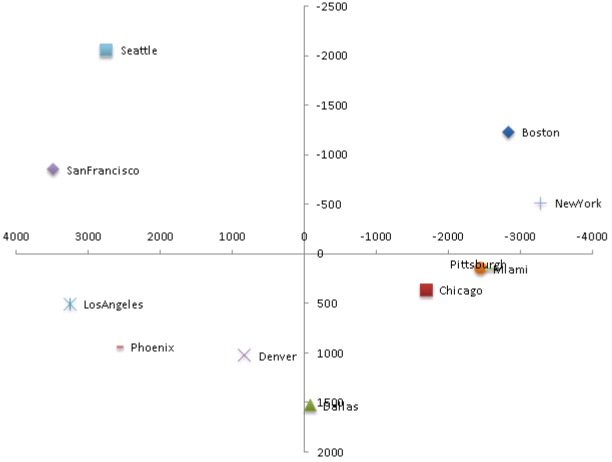
	Boston	Chicago	Dallas	Denver	osAngeles	Miami	NewYork	Phoenix	Pittsburgh	ıFrancisco	Seattle
Boston	0	983	1815	1991	3036	1539	213	2664	792	2385	2612
Chicago	983	0	1205	1050	2112	1390	840	1729	457	2212	2052
Dallas	1815	1205	0	801	1425	1332	1604	1027	1237	1765	2404
Denver	1991	1050	801	0	1174	2041	1780	836	1411	1765	1373
LosAngele	3036	2112	1425	1174	0	2757	2825	398	2456	403	1909
Miami	1539	1390	1332	2041	2757	0	1258	2359	1250	3097	3389
NewYork	213	840	1604	1780	2825	1258	0	2442	386	3036	2900
Phoenix	2664	1729	1027	836	398	2359	2442	0	2073	800	1482
Pittsburgh	792	457	1237	1411	2456	1250	386	2073	0	2653	2517
SanFranci	2385	2212	1765	1765	403	3097	3036	800	2653	0	817
Seattle	2612	2052	2404	1373	1909	3389	2900	1482	2517	817	0

- $X = A^D A$ 10'a 10 matrisinin birinci ve ikinci Ana Bileşenlerini bulun.

- Bir ülkede rastgele 10 şehir seçin; biribirlerine uzaklıklarını 10'a 10 bir A matrisine yerleştirin.

	Boston	Chicago	Dallas	Denver	osAngeles	Miami	NewYork	Phoenix	Pittsburgh	ıFrancisco	Seattle
Boston	0	983	1815	1991	3036	1539	213	2664	792	2385	2612
Chicago	983	0	1205	1050	2112	1390	840	1729	457	2212	2052
Dallas	1815	1205	0	801	1425	1332	1604	1027	1237	1765	2404
Denver	1991	1050	801	0	1174	2041	1780	836	1411	1765	1373
LosAngele	3036	2112	1425	1174	0	2757	2825	398	2456	403	1909
Miami	1539	1390	1332	2041	2757	0	1258	2359	1250	3097	3389
NewYork	213	840	1604	1780	2825	1258	0	2442	386	3036	2900
Phoenix	2664	1729	1027	836	398	2359	2442	0	2073	800	1482
Pittsburgh	792	457	1237	1411	2456	1250	386	2073	0	2653	2517
SanFranci	2385	2212	1765	1765	403	3097	3036	800	2653	0	817
Seattle	2612	2052	2404	1373	1909	3389	2900	1482	2517	817	0

- $X = A^D A$ 10'a 10 matrisinin birinci ve ikinci Ana Bileşenlerini bulun. A'nın her bir satırı, bu iki yöndeki bileşenleriyle güzelce yakınlaştırılabilir.


-2500
-2000
-1500
-1000
-500
0
500
1000
1500
2000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
-2000
-3000
-4000
Seattle
Boston
SanFrancisco
NewYork
Pittsburgh
Miami
Chicago
LosAngeles
Phoenix
Denver
Dallas

- 100’den fazla insan geni grubu belirleniyor.

- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.

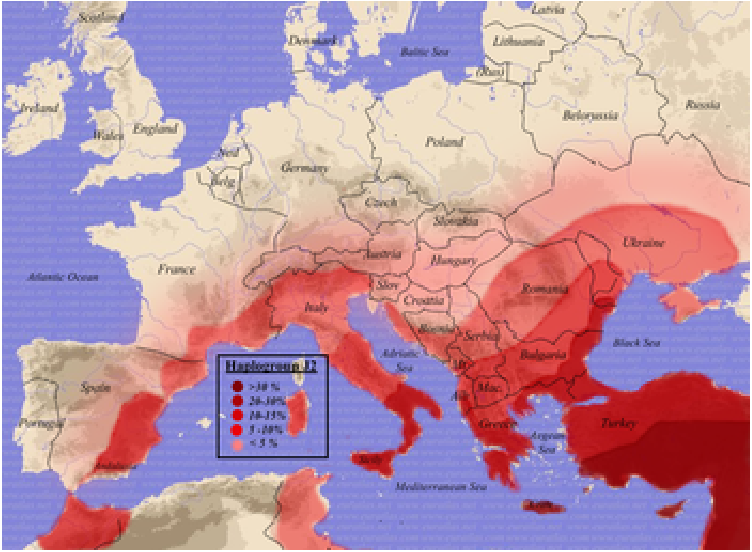
- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.
- Elde edilen A matrisi 1000'e 100 bir matris.

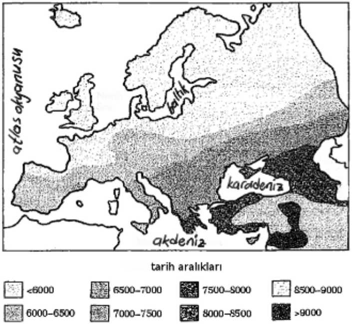
- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.
- Elde edilen A matrisi 1000'e 100 bir matris.
- $X = A^D A$ 100'e 100 simetrik matrisinin en büyük özdeğeri ve buna karşılık gelen v_1 özvektörü bulunuyor.

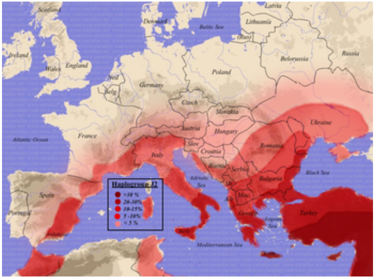
- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.
- Elde edilen A matrisi 1000'e 100 bir matris.
- $X = A^D A$ 100'e 100 simetrik matrisinin en büyük özdeğeri ve buna karşılık gelen v_1 özvektörü bulunuyor.
- v_1, ölçülen coğrafyada gen grupları frekanslarının başat yönünü veriyor.

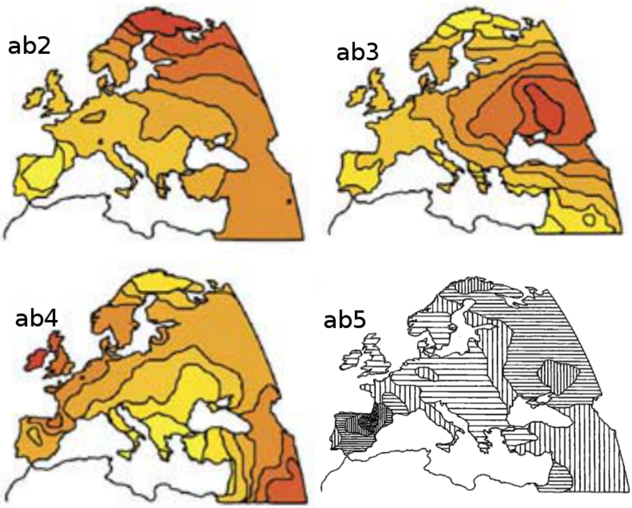
- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.
- Elde edilen A matrisi 1000'e 100 bir matris.
- $X = A^D A$ 100'e 100 simetrik matrisinin en büyük özdeğeri ve buna karşılık gelen v_1 özvektörü bulunuyor.
- v_1, ölçülen coğrafyada gen grupları frekanslarının başat yönünü veriyor.
- Ölçüm alınan her bölgede ölçüm vektörünün v_1 yönündeki bileşeninin uzunluğuna bakılıyor.

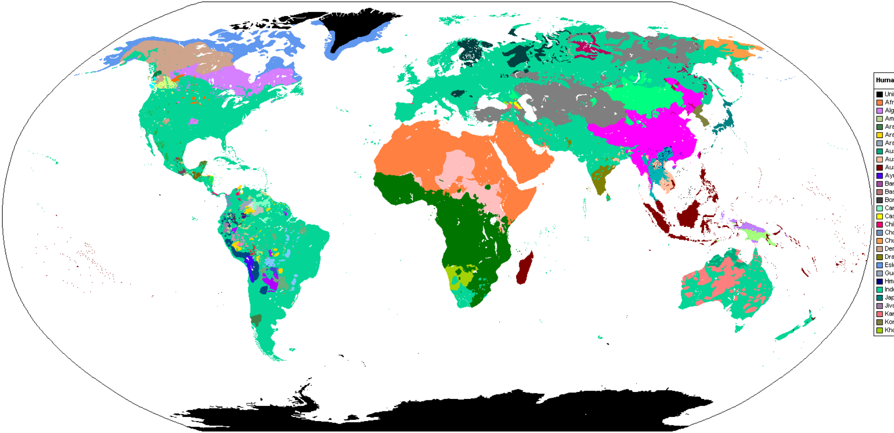
- 100'den fazla insan geni grubu belirleniyor.
- Avrupa ve Batı Asya ülkelerinden binlerce araştırmacı, bu gen gruplarının çeşitli bölgelerde (belki 1000 bölgede) görülme frekanslarını saptıyor.
- Elde edilen A matrisi 1000'e 100 bir matris.
- $X = A^D A$ 100'e 100 simetrik matrisinin en büyük özdeğeri ve buna karşılık gelen v_1 özvektörü bulunuyor.
- v_1, ölçülen coğrafyada gen grupları frekanslarının başat yönünü veriyor.
- Ölçüm alınan her bölgede ölçüm vektörünün v_1 yönündeki bileşeninin uzunluğuna bakılıyor.
- O uzunluk ne kadar fazlaysa, ölçüm vektörü başat gen frekanslarına o kadar sahip.

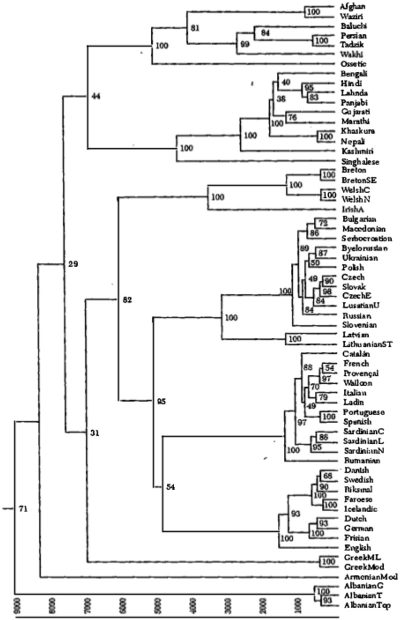

Scotland
Denmark
Baltic Sea
Latvia
Lithuania
Ireland
Wales
England
Poland
Belorussia
Russia
Germany
Czech
Slovakia
Ukraine
Austria
Hungary
France
Atlantic Ocean
Romania
Croatia
Italy
Serbia
Black Sea
Adriatic Sea
Bulgaria
Spain
Greece
Turkey
Aegean Sea
Sicily
Mediterranean Sea


atlas okyanusu
baltık
karadeniz
akdeniz
tarih aralıkları
<6000
6000–6500
6500–7000
7000–7500
7500–8000
8000–8500
8500–9000
>9000

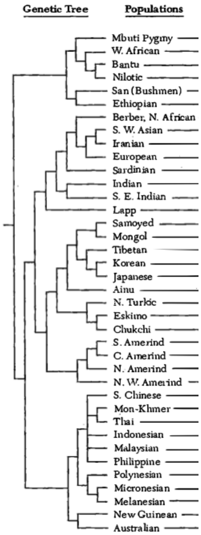

Scotland
Ireland
Wales
England
Denmark
Baltic Sea
Latvia
Lithuania
Belorussia
Russia
Poland
Germany
Czech
Slovakia
Ukraine
Austria
Hungary
France
Atlantic Ocean
Romania
Croatia
Italy
Black Sea
Bulgaria
Spain
Portugal
Greece
Turkey
Mediterranean Sea
Haplogroup J2


ab2
ab3
ab4
ab5

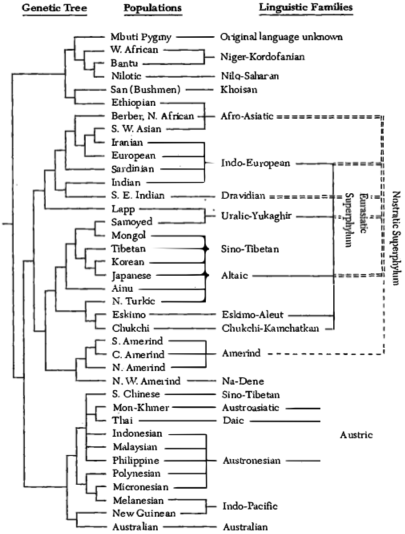



Afghan
Waziri
Baluchi
Persian
Tadzik
Wakhi
Ossetic
Bengali
Hindi
Lahnda
Panjabi
Gujarati
Marathi
Khaskura
Nepali
Kashmiri
Singhalese
Breton
BretonSE
WelshC
WelshN
IrishA
Bulgarian
Macedonian
Serbocroatian
Byelorussian
Ukrainian
Polish
Czech
Slovak
CzechE
LusatianU
Russian
Slovenian
Latvian
LithuanianST
Catalan
French
Provençal
Walloon
Italian
Ladin
Portuguese
Spanish
SardinianC
SardinianL
SardinianN
Rumanian
Danish
Swedish
Riksmal
Faroese
Icelandic
Dutch
German
Frisian
English
GreekML
GreekMod
ArmenianMod
AlbanianG
AlbanianT
AlbanianTop
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000

Gen yakınlığını temel alarak kurulan ağaçlar, dil yakınlığı ağaçlarına müthiş bir benzerlik gösterir.



Gen yakınlığını temel alarak kurulan ağaçlar, dil yakınlığı ağaçlarına müthiş bir benzerlik gösterir.



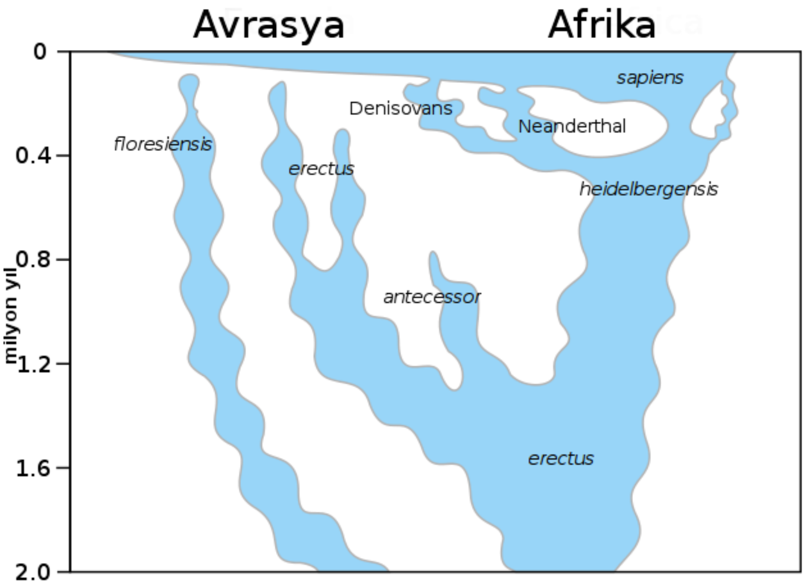
- Arkeolojik bulgular ve yüzlerce tam/parça iskelet (1830 - ...)

- Arkeolojik bulgular ve yüzlerce tam/parça iskelet (1830 - ...)
- *Homo Sapiens* ile aynı türden olan bir başka insansı: Neandertal (*Homo Sapiens Neanderthalensis*)

- Arkeolojik bulgular ve yüzlerce tam/parça iskelet (1830 - ...)
- *Homo Sapiens* ile aynı türden olan bir başka insansı: Neandertal (*Homo Sapiens Neanderthalensis*)
- Modern insanla yüzde 99,7 gen uyumu...

- Arkeolojik bulgular ve yüzlerce tam/parça iskelet (1830 - ...)
- *Homo Sapiens* ile aynı türden olan bir başka insansı: Neandertal (*Homo Sapiens Neanderthalensis*)
- Modern insanla yüzde 99,7 gen uyumu...
- Yaklaşık 350.000 yıl önceden 40.000 yıl önceye kadar...

- Arkeolojik bulgular ve yüzlerce tam/parça iskelet (1830 - ...)
- *Homo Sapiens* ile aynı türden olan bir başka insansı: Neandertal (*Homo Sapiens Neanderthalensis*)
- Modern insanla yüzde 99,7 gen uyumu...
- Yaklaşık 350.000 yıl önceden 40.000 yıl önceye kadar...


Avrasya
Afrika
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
milyon yıl
sapiens
Denisovans
Neanderthal
floresiensis
erectus
heidelbergensis
antecessor
erectus

Birçok bilim dalında yüzbinlerce bilim insanının bulgularının ortak çıktısını anlamlandırmaya çalışıyoruz.

Birçok bilim dalında yüzbinlerce bilim insanının bulgularının ortak çıktısını anlamlandırmaya çalışıyoruz.
fiziksel antropoloji, primatoloji, arkeoloji, paleontoloji, nörobiyoloji, etoloji (hayvan davranış bilimi), dilbilim, evrimsel psikoloji, embriyoloji, genetik...

Kaynaklar:

- Cavalli-Sforza, L.L., *Genes, Peoples, and Languages.* North Point Press, 2000.
- Cavalli-Sforza, L.L., Menozzi, P., Piazza, A. *The History and Geography of Human Genes*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- Novembre, J., Stephens, M., *Interpreting principal component analyses of spatial population genetic variation.* Nature Genetics, v. 40, no. 5, 646–649, 2008.
- ve tabii ki Wikipedia...