

ООО «СТЦ»

Тестовое задание

Криптография

Пожалуйста, присылайте решения в виде **pdf**, оформленные в Word или \LaTeX (не от руки). Стиль оформления документа — на ваше усмотрение.

Помните, что при проверке Вас не будет рядом, чтобы дать какие-то еще комментарии, поэтому не стесняйтесь расписывать свои решения подробно, если считаете, что какой-то шаг требует большей детализации. Все, что Вы хотите сказать, должно быть сказано в документе.

Во всех заданиях, если не указано иное, символом n обозначено натуральное число. Как и обычно в отечественной практике, мы начинаем натуральный ряд с единицы, так что $n \in \mathbb{N}$.

Если у Вас остались какие-то вопросы — пишите их ответом на это письмо.

8 июня 2023 г.

Часть I. Основы анализа

Задача 1. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-6)^n - 5^{n+1}}{5^n - (-6)^{n+1}}, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(k+1), \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot 2n}. \quad (4)$$

Задача 2. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad |A| < +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = B, \quad |B| < +\infty$$

и $f(x) > h(x)$ при любом x . Верно ли, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x > \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x))^x,$$

если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x = \alpha, \quad |\alpha| < +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x))^x = \beta, \quad |\beta| < +\infty?$$

Задача 3. Найдутся ли такие функции $r(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ вещественного аргумента, чтобы для любого x было выполнено $r(x) \sin x + p(x) \cos x = q(x)$, и совпадали производные от обеих частей равенства?

Задача 4. Разложите в ряд МакЛорена функцию

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Задача 5. Пусть исследуется на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}.$$

С одной стороны,

$$\frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} < \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} < \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

так что ряд оказывается сходящимся. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} &= \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2 + n + 2 - n - 1}{n^2 + n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{n + 1}{n^2 + n + 1} \right) \sim \\ &\sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n + 1}{n^2 + n + 1} \right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} : \end{aligned}$$

ряд расходится. Поясните различие в результатах.

Примечание. Запись

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

означает, что ряды обладают одинаковой сходимостью, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Задача 6. Найдите интеграл

$$\int (1 + x + x \ln x) x^x dx.$$

Задача 7. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx.$$

Часть II. Комбинаторика и теоретико-числовые методы

Задача 1. Дана битовая последовательность длиной n бит. Найдите минимальное количество единиц, которые должна содержать данная последовательность, чтобы при этом обязательно нашлась подпоследовательность из m идущих подряд единиц.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать из чисел $1, 2, 3, \dots, 100$ не менее шести чисел так, чтобы среди выбранных было одинаковое количество четных и нечетных? (В идеале ответ не должен содержать суммирование по параметру.)

Задача 3. Дан полный граф на 101 вершине G_{101} .

1. Найдите максимальное число ребер, которое можно удалить из G_{101} , чтобы граф остался связным.
2. Найдите минимальное число ребер, которое можно удалить из G_{101} , чтобы граф стал двудольным.

Задача 4. Докажите, что число $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ делится на 3.

Задача 5. Найдите последнюю цифру числа $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 999 \cdot 1000$.

Задача 6. Какое число нужно прибавить к числу $(n^{100} - 1)^{100}(n^{101} + 1)^{101}$, чтобы результат делился на n ?

Задача 7. Докажите, что число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19 при любом n .

Задача 8. Решите уравнение $x = 97^{256} \pmod{765}$.

Задача 9. Пусть $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ — упорядоченные решения уравнения

$$1080n = 1463\varphi(n),$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Найдите s_9 .

Часть III. Вычисления

Задачи настоящего раздела предполагают написание вычислительных алгоритмов. Допускается использовать ту среду разработки, которая для Вас наиболее удобна: Matlab, Maple, Mathematica, Mathcad, VBA, C++ или другую.

Использование встроенных функций, непосредственно предназначенных для решения поставленной задачи, допускается только с целью сравнения результатов, полученных Вами, с тем, как эти результаты видят разработчики численного пакета. Так, если основная задача состоит в приближенном вычислении определенного интеграла, то при работе в пакете Matlab использование функции `sum` для суммирования элементов вектора допускается (это вспомогательная операция), а использование функции `trapz` (и подобных ей) для поиска значения интеграла — только для целей демонстрации.

Стратегия решения, количество и структура комментариев, глубина и объем проверок входных данных, чистота кода, организация вычислений — все это остается на Ваше усмотрение.

Задача 1. Напишите программу для нахождения матрицы, обратной к

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица A — квадратная, порядка n . Входные данные: n — порядок матрицы, α и β — произвольные вещественные числа.

Задача 2. Напишите программу для вычисления наименьшего значения функции

$$f(x) = x + A \cdot 10^{-(\alpha x^{1-\beta} + \gamma x + \delta)}$$

при $x \geq 0$. Входные данные:

$$10^{30} \leq A \leq 10^{50}, \quad 0 < \alpha < 10, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \delta < 50.$$

Задача 3. Датчик случайных чисел вырабатывает q -ичную последовательность длины $N \geq 1000$. Пусть S — сумма всех чисел последовательности, $p < 1$ — положительное число.

Напишите программу, которая позволяет по входным параметрам q , N и p найти (возможно меньший) отрезок $[d_1, d_2]$, содержащий S с вероятностью, не меньшей p . Найдите $[d_1, d_2]$ для параметров $q = 7$, $N = 2022$, $p = 0,95$.

П р и м е ч а н и е. Под « q -ичной последовательностью» понимается последовательность чисел, записанных в десятичной системе счисления, из диапазона от 0 до $q - 1$ (по аналогии с двоичной последовательностью, которая образована числами 0 и 1).

Сумма S считается по обычным правилам сложения десятичных чисел — таким образом, она находится в диапазоне от 0 до $N(q - 1)$.