Math Software

Analysis and exploration of Julia set

郑皓蔚 3200104204

浙江大学信息与计算科学系

2022 年 7 月 4 日

目录

引言

Julia 集合

朱利亚集合 [1] 是一个在复平面上组成分形的点的集合，使用复二次多项式进行迭代。朱利亚集合的图像表现出一个精心设计的无限复杂的边界，在放大倍率增加的情况下，它展示了越来越精细的递归细节。

在数学上，朱利亚集合的边界被定义为是分形曲线，此递归细节的样式取决于所检查的集合边界的区域。

与 Manderbort 集合的联系

与曼德博集合 [2] 不相同的是，朱利亚集合迭代公式中的固定常数与选取的点无关。换而言之，朱利亚集合的图像与迭代复常数 c 有着密切的关联。对 c 引入一个极小的偏差也会使得图像有很大的变化。

图像与 c 在曼德博集合上的位置区域也有紧密联系 [3]:

- 若 c 点属于曼德博集合，则朱利亚集合的图像联通
- 若 c 点不属于曼德博集合，则朱利亚集合的图像不连通，集合内的点称为 dust

正是这些特性以及满足分形的性质，研究朱利亚集合的图像性质以及其与曼德博集合的联系具有着重要的数学意义。

数学理论

迭代公式

朱利亚集合利用复二次多项式 [4] 来定义迭代：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

其中 c 是一个给定的复常数。从 $z = (x, y)$ 开始迭代，$z_{n+1} = z_n^2 + c$，每次迭代的值依序如下数列所示：

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0))) \cdots)$$

不同的参数 c 与初始复数 z 可能使迭代值的模逐渐发散到无限大，或收敛在有限的区域内。两者的区别如下：

- 曼德博集合是在满足初始复数 $z = 0$ 的前提下，使其不扩散的所有复数 c 的集合
- 而朱利亚集合是对于给定的 c，使其不扩散的所有初始复数 z 的集合

收敛条件

因为朱利亚集合是闭集，再加上所有的点都包含围绕原点半径为 2 的封闭盘中，故该集合是一个紧集。一个点 z 属于朱利亚集合是闭集当且仅当 $|z_n| \leq 2, \forall n \geq 0$，否则序列 z_n 将发散到无穷。这与曼德博集合的判定方法较为类似。

算法思想

迭代算法

由于需要计算机绘制朱利亚集合的图像，所以在实际算法实现上有以下几个问题和解决方案：

- 无法真正无穷步迭代判断收敛，故在最大迭代次数内判定收敛
- 二维复平面并不离散，故要将平面网格化
- 绘制图像是点阵图，存在失真的情况，故需要设置放大倍数 dimension

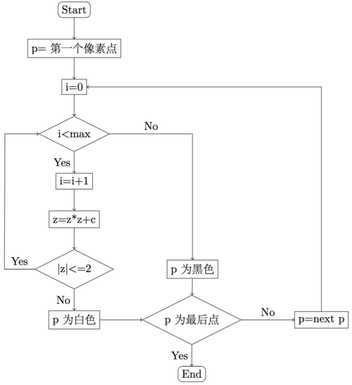
图像绘制

本文采用直接生成 bmp 格式的文件并改变其中的像素点 RGB 数值达到绘制图像的效果。而 bmp 格式中每一个像素点由三个 Byte 构成，设置有关 bmp 格式的基本参数信息，然后根据上述迭代算法得到每一个像素点的颜色信息，最后再将颜色信息存入对应的地址即可。

算法实现

伪代码和流程图

```
Read c
For every pixel p
i=0
z=complex of p
While i<max:
  If |z|>2 then break
  Else z=z^2+c
If i=max then
  mark pixel as black
Else mark as white
```



性质研究

更改迭代复常数 c 为 (0.38,-0.249) 并对其进行局部细节的放大可得以下图像：

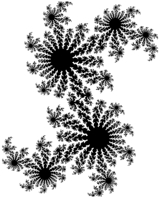


图 1: dim=2,c=0.38-0.249i

图 2: dim=0.01,c=0.38-0.249i

对于朱利亚集合图像任意倍数放大，仍然保留有着无限精细的结构，并且图案具有某种程度上的相似性。由此可见，朱利亚集合和曼德博集合相似，具有分形图形的以下两个性质：

- 自相似性，即整体与局部以某种方式相似
- 边界无限精细

关联性研究

由《分形几何》[5] 中阐述的理论，使朱利亚集合联通的迭代复常数点应该属于曼德博集合，选取两个迭代复常数分别属于曼德博集合以及它的补集，分别得到以下两个朱利亚集合的图像，由图3,4的图像性质得以验证上述结论。

图 3: c=0.38-0.249i

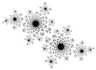


图 4: c=-0.4+0.6i

将曼德博集合根据形状划分成如图5区域，并选取迭代复常数 c 分别在区域 1、2 中，则有以下图6,7形状：

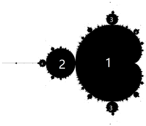


图 5: 集合划分

图 6: c=0.1+0.3i

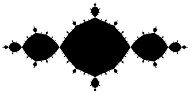


图 7: c=-1

- c 在 1 区域内，集合边界为简单闭曲线，有吸引不动点
- c 在 2 区域内，图像全部由四叉点组成，有吸引 2 周期轨。

事实上，由于曼德博集合所具有的分形性质，这种区域的划分可以无限进行下去。

结论

根据以上的算法以及算例分析，不难得到以下结论:

- 朱利亚集合性质
  - 与曼德博集合类似，由简单递推公式得来，具有分形性质
  - 对图像放大任意倍数后，仍然具有精细的分形结构和递归细节
- 与曼德博集合联系
  - 集合图像与 c 相关: 当 c 属于曼德博集合时，朱利亚集合为联通点集
  - 图像类型与 c 所属的曼德博集合的区域位置有关，具体可根据图像特性无限划分区域

事实上，朱利亚集合与曼德博集合就是一个四维分形在不同方向上的二维切片。

参考文献

Wikipedia contributors.
Julia set — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.
[Online; accessed 4-July-2022].

Wikipedia contributors.
Mandelbrot set — Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set&oldid=1094796296, 2022.
[Online; accessed 1-July-2022].

Tam s Vicsek.
Fractal growth phenomena.
World scientific, 1992.

Juan Carlos Ponce Campuzano.
Complex analysis-the julia set, 2022.

K. Falconer.
Techniques in fractal geometry.
Techniques in fractal geometry, 1997.