浙江大學

Mathematical Report

Math Software

Generation and Exploration of Manderbrot Set

Author: Haowei Zheng

Studnet Id: 3200104204

Date: 2022 年 7 月 1 日

摘要

本文介绍了曼德博集合的背景以及定义，以及相关的数学理论。同时，本文针对曼德博集合进行了图像生成的代码实现以及分析，同时针对不同的迭代次数以及缩放程度进行图像分析，给出了相关的数值算例。针对以上的数值算例，本文进行了一定的分析。

关键词: 曼德博集，迭代

1 引言

曼德博集合 [1] 是一个在复平面上组成分形的点的集合，使用复二次多项式进行迭代。曼德博集合的图像表现出一个精心设计的无限复杂的边界 [2]，在放大倍率增加的情况下，它展示了越来越精细的递归细节; 在数学上，曼德博集合的边界被定义为是分形曲线, 此递归细节的样式取决于所检查的集合边界的区域。

曼德博集合在数学圈外也很受欢迎，既因为它的美学吸引力，也因为它是应用简单规则产生的复杂结构的一个例子。它是数学可视化，展现数学之美的最著名例子之一。

本文将介绍并探究曼德博集合图像生成的原理以及通过计算机迭代实现一定精度的曼德博集代码实现。

2 背景介绍

曼德博集合与分形定义 [3] 紧密相关，而曼德博本人也提出了分形这个概念。其中分形满足以下几个特点:

1. 具有无限精细的结构
2. 比例自相似性
3. 一般它的分数维大子它的拓扑维数
4. 可以由简单的方法定义，并由递归、迭代产生

而曼德博集合完美满足了上述几个特点，作为分形理论的典型例子，研究曼德博集合具有重要的意义。

3 数学理论

利用复二次多项式来定义迭代:

$$f_c(z) = z^2 + c$$

其中 c 是一个复数参数。从 $z = 0$ 开始迭代，$z_{n+1} = z_n^2 + c$，每次迭代的值依序如下数列所示:

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0))) \cdots)$$

不同的参数 c 可能使迭代值的模逐渐发散到无限大，也可能收敛在有限的区域内。曼德博集合 M 就是使其不扩散的所有复数 c 的集合。

因为曼德博集合是闭集，再加上所有的点都包含围绕原点半径为 2 的封闭盘中，故该集合是一个紧集。更具体地说，一个点 c 属于曼德博集合是闭集，当且仅当 $|z_n| \leq 2, \forall n \geq 0$. 换句话说，曼德博集合中的点 c 必须满足 z_n 的绝对值小于等于 2，否则序列 z_n 将发散到无穷。

4 算法

4.1 迭代算法

由于需要计算机绘制曼德博集合的图像，并且使用无穷步迭代判断收敛，所以并不能严格求解出每个点的收敛情况。因此，本文采用了一种近似算法。即设置一个最大迭代次数 `maximum_iterator`, 如果在迭代次数内 $z_n > 2$, 则认为该点在迭代序列中会发散指无穷，即不属于曼德博集合；反之则认为该点收敛，属于曼德博集合。同时，由于在二维复平面当中点并不离散，所以将平面网格化，只考虑网格上的点是否属于曼德博集合，并最终输出图像。

其中迭代算法的伪代码如下:

```
For 图像中的每一个像素点 p
c = p代表的复平面上的复数
While 循环次数i小于maximum_iterator:
    If |z| > 2 then break
    Else z = z^2 + c
If i = maximum_iterator then
    标记像素点为黑
Else 标记像素点为白
```

4.2 绘制图像

本文采用直接生成 bmp 格式的文件并改变其中的像素点 RGB 数值达到绘制图像的效果。而 bmp 格式中每一个像素点由三个 Byte 构成，设置有关 bmp 格式的基本参数信息，然后根据上述迭代算法得到每一个像素点的颜色信息，最后再将颜色信息存入对应的地址即可。

5 数值算例

通过上述算法思路实现的代码需要提供几个参数，分别是展示图像的中心点 ox,oy 以及全图显示的图像半径尺寸 $dimension$. 同时，可以在程序中修改最大迭代次数 $maximum_iterator$。

首先考虑改变最大迭代次数并输出图像，得到以下对应图像：

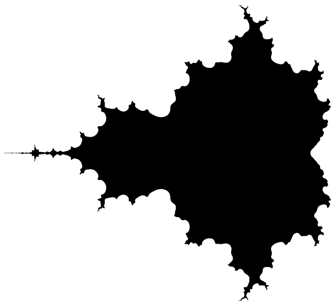

图 1: N=10,ox=0,oy=0,dimension=2

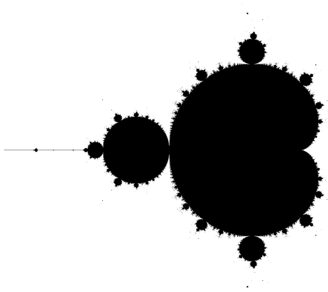

图 2: N=100,ox=0,oy=0,dimension=2

由此可见，迭代次数越大，图像也就更加精细，边界上的细节也就更多。

改变中心点的位置 ox,oy, 会得到以下对应图像：

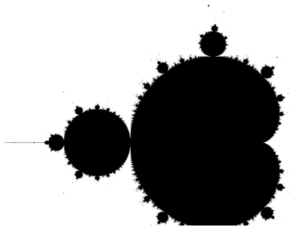

图 3: N=100,ox=0.3,oy=0.5,dimension=2

改变图像半径尺寸 $dimension$, 进行图像的缩放, 得到一下对应图像。

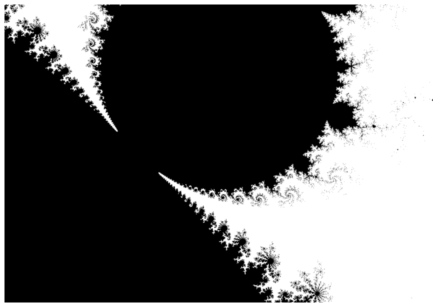

图 4: N=100,ox=0.3,oy=0.5,dimension=0.1

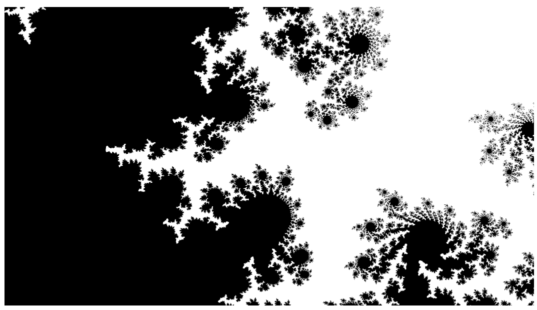

图 5: N=100,ox=0.3,oy=0.45,dimension=0.01

不难发现，曼德博集合进行放大后仍然有着无限精细的结构，并且图案具有某种程度上的相似性。由此可见，曼德博集合具有分形图形特性。

6 结论

由算法可知，曼德博集合图像可以通过简单的迭代得到；同时，根据以上的数据算例，首先验证了算法的正确性，其次不难发现，曼德博集合具有上下对称性。其实不难从迭代公式本身推得该结论；同时，曼德博集合也满足分形的特征，

经过数倍放大之后仍具有无限精细的结构，并且图案具有某种程度的相似性。

参考文献

[1] Wikipedia contributors. Mandelbrot set — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set&oldid=1094796296`, 2022. [Online; accessed 1-July-2022].

[2] Tam s Vicsek. *Fractal growth phenomena*. World scientific, 1992.

[3] Benoit B Mandelbrot and Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, volume 1. WH freeman New York, 1982.