浙江大學

MATHEMATICAL REPORT

MATH SOFTWARE

Proof of Taylor Theorem

Author: Haowei Zheng

Studnet Id: 3200104204

Date: 2022 年 6 月 27 日

目录

带有佩亚诺型余项的泰勒公式是解决多项式的手段，而多项式逼近函数是近似计算和理论分析的一个重要内容。如果函数在 f 在 x_0 处可导，则有

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{1}$$

即在点 x_0 附近，用一次多项式 $f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$ 逼近函数 $f(x)$ 时，其误差为 $(x-x_0)$ 的高阶无穷小量。下面考虑用二次或者高于二次的多项式去逼近。

1 问题描述

1.1 定义

考察任意一 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{2}$$

逐次求他们在点 x_0 的各阶导数，得到

$$p_n(x_0) = a_0, p_n^{'}(x_0) = a_1, p_n^{''}(x_0) = 2!a_2, \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n,$$

即

$$a_0 = p_n(x_0), a_1 = \frac{p_n^{'}(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{p_n^{''}(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

由此可见，多项式 $n_n(x)$ 的各项系数由其所在点 x_0 的各阶导数值唯一确定。对于一般的函数 f, 设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，由这些导数构造一个 n 次多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{3}$$

称为函数 f 在点 x_0 的**泰勒多项式**,$T_n(x)$ 的各项系数 $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k = 1, 2, \cdots, n)$ 称为**泰勒系数**, 由上面对于多项式系数的讨论，易知 $f(x)$ 与其泰勒多项式 $T_n(x)$ 在点 x_0 有相同的函数值和相同的直至 n 阶导数值，即

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

下面将要证明 $f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n)$, 即以 (2) 式所示的泰勒多项式逼近 $f(x)$ 时，其误差关于 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小量.

1.2 定理

若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数，则有 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$，即

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \tag{4}$$

2 证明

证明. 设

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), Q_n(x) = (x - x_0)^n$$

现在只要证

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{Q_n(x)} = 0$$

由关系式 (3) 可知,

$$R_n(x_0) = R_n^{'}(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0,$$

并易知

$$Q_n(x_0) = Q_n^{'}(x_0) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(x_0) = 0, Q_n^{(n)}(x_0) = n!.$$

因为 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 所以在 x_0 的某邻域 $\mathbf{U}(x_0)$ 上 f 存在 $n-1$ 阶导函数. 于是, 当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 且 $x \to x_0$ 时, 允许接连使用洛必达法则 $n-1$ 次, 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{Q_n(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{'}(x)}{Q_n^{'}(x)} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n(n-1)\cdots 2(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□