Metoda różnic skończonych

Rozpatrzmy równanie:

$$y''(x) - 5y'(x) + 10y(x) = 10x \qquad (*)$$

$$y(0) = 0 \;, \; y(1) = 100 \qquad \left(y'(0) \approx \frac{y(1) - y(0)}{1} \right)$$

Wybór siatki na osi x, np.

$X_0 = 0{,}0$

$X_1 = 0{,}1$

$\vdots$

$X_{10} = 1{,}0$

$$y''(x_i) - 5y'(x_i) + 10y(x_i) = 10x_i$$

$$y''_i - 5y'_i + 10y_i = 10x_i \qquad (**)$$

Uwaga: rozwiązanie dla x_0 i x_{10} są ustalone $y(x_0) = 0$, $y(x_{10}) = 100$.

Do (**) wstawiamy wzory różnicowe na pochodne $y'(x_i)$ i $y''(x_i)$.

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Otrzymujemy z (**)

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 5\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 10y_i = 10x_i \qquad (***)$$

Metody rozwiązań

1° metoda bezpośrednia, rozwiązanie układu równań liniowych

2° metoda pośrednia (wylicz y_i) i zastosuj iterację

<u>Ad. 1°</u>

$$(***) \,/\cdot 2h^2$$

$$2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i+1} - 5hy_{i+1} + 5hy_{i-1} + 20h^2 y_i = 20h^2 x_i$$

$$\underbrace{(2-5h)}_{=c} y_{i+1} + \underbrace{(20h^2-4)}_{=b} y_i + \underbrace{(2+5h)}_{a} y_{i-1} = \underbrace{20h^2 x_i}_{=r_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 9$$

$i = 1$ $\qquad by_1 + cy_2 = r_1 - ay_0 \qquad (y_0 = 0)$

$i = 2$ $\qquad ay_1 + by_2 + cy_3 = r_2$

$i = 3$ $\qquad ay_2 + by_3 + cy_4 = r_3$

$\vdots$

$i = 8$ $\qquad ay_7 + by_8 + cy_9 = r_8$

$i = 9$ $\qquad ay_8 + by_9 = r_9 - cy_{10} \qquad (y_{10} = 100)$

Mrs-4

$$\begin{pmatrix} b & c & & & & \\ a & b & c & & & \\ & a & b & c & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & a & b & c \\ & & & & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - a y_0 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_8 \\ r_9 - c y_{10} \end{pmatrix}$$

Ad. 2°

wzór iteracyjny (wylicz y_i)

$$y_i = \frac{1}{2-10h^2}\left[\left(1-\frac{5h}{2}\right)y_{i+1} + \left(1+\frac{5h}{2}\right)y_{i-1} - 10h^2x_i\right]$$

Schemat Jacobiego

$$y_i^{(j)} = \qquad y_{i+1}^{(j-1)} \qquad y_{i-1}^{(j-1)}$$

Schemat Gaussa-Siedela

$$y_i^{(j)} = \qquad y_{i+1}^{(j-1)} \qquad y_{i-1}^{(j)}$$

Mrs-5

ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNICOWEJ DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ WŁASNYCH

$$\underset{\approx}{A}\,\underset{\sim}{x} = \lambda\,\underset{\sim}{x} \quad \text{lub} \quad (\underset{\approx}{A} - \lambda \underset{\approx}{I})\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \qquad (*)$$

λ – wartość własna

$\underset{\sim}{x}$ – wektor własny

Z algebry liniowej: Równanie $(*)$ posiada nietrywialne rozwiązanie (tzn. takie, że $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$), jeśli

$$\det(\underset{\approx}{A} - \lambda \underset{\approx}{I}) = 0 . \qquad (**)$$

Stąd znajdujemy różne wartości λ, a z $(*)$ odpowiadające im wektory własne.

RW-2

Przykład: równanie oscylatora harmonicz.

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \quad \text{na } \langle 0, L \rangle$$

$$0 = y_0 = y(0) = y(L) = y_L$$

$$y''(x) = -\omega^2 y(x), \quad \lambda = -\omega^2$$

$$y''(x) = \lambda y(x)$$

Szukamy λ i $y(x)$

Dyskretyzacja $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$, $x_i - x_{i-1} = h$

$$y_i'' = \lambda y_i$$

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \lambda y_i$$

$i = 1, \dots, n-1$

Ogólnie $a_i = \frac{1}{h^2}$, $b_i = -\frac{2}{h^2}$, $c_i = \frac{1}{h^2}$

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = \lambda y_i$$

$i=1 \quad b_1 y_1 + c_1 y_2 = \lambda y_1 + a_1 y_0$

$i=2 \quad a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 = \lambda y_2$

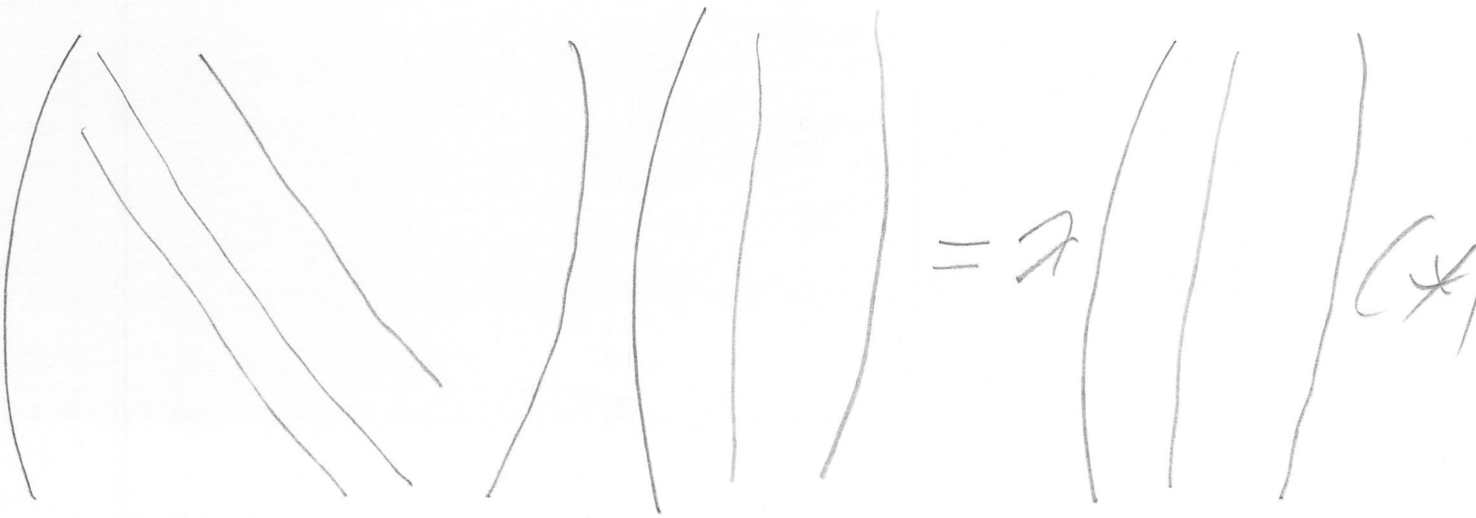
$i=3 \quad a_3 y_2 + b_3 y_3 + c_3 y_4 = \lambda y_3$

$\vdots$

$i=n-2 \quad a_{n-2} y_{n-3} + b_{n-2} y_{n-2} + c_{n-2} y_{n-1} = \lambda y_{n-2}$

$i=n-1 \quad a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = \lambda y_{n-1} - c_{n-1} y_n$

RW-3



$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{y} = \lambda\,\underset{\sim}{y}$$

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})\,\underset{\sim}{y} = 0$$

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0$$

stąd w ogólności

$\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_{n-2}$

λ_i wstawiamy do i wyznaczamy odpowiadający mu wektor własny