RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

$$\boxed{\begin{aligned} & y'(x) = f(x, y(x)) \\ & y(x_0) = a \end{aligned}}$$ np. $\frac{dy(x)}{dx} = 5x + 3$

$y(0) = -3$

$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ np. $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 10\frac{dy}{dx} + x$

$y(x_0) = a, \; y'(x_0) = b$ $\quad y(0) = 0$

$y'(0) = 10$

Rozwiązywanie metodą Eulera

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h y'(x_0) =$$

$$= y(x_0) + h f(x_0, y(x_0))$$

$$y_{i+1} \approx y_i + h f(x_i, y_i)$$

(prosta metoda Eulera)

Równania drugiego rzędu

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Np. $$\begin{cases} y''(x) = a y(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu sprowadzamy do układu dwóch równań pierwszego rzędu. Stosujemy podstawienie

$y'(x) = t(x)$, $\quad (y''(x) = t'(x))$

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = f(x, y(x), t(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ t(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Zapis wektorowy

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ t'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(x) \\ f(x, y(x), t(x)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ t(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} t(x) \\ f(x, y(x), t(x)) \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{y}'(x) = \underset{\sim}{f}(x)$ – równanie różniczk.

$\underset{\sim}{y}(x_0) = \underset{\sim}{y_0}$ – w-k początkowy

RRZ-7

Rozwiązanie np. metodą Eulera

$$\underset{\sim}{y}_{i+1} = \underset{\sim}{y}_i + h\underset{\sim}{f}_i$$

$i = 0$

$$\underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_0 + h\underset{\sim}{f}_0$$

$i = 1$

$$\underset{\sim}{y}_2 = \underset{\sim}{y}_1 + h\underset{\sim}{f}_1$$

itd

Przykład.

$$y''(x) = \underbrace{a y(x) + b y'(x)}_{= f(x, y(x), y'(x))}, \quad y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'$$

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = f(x, y(x), t(x)) = a y(x) + b t(x) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ t(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} t(x) \\ a y(x) + b t(x) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f} \Rightarrow \underset{\sim}{y}_{i+1} = \underset{\sim}{y}_i + h \underset{\sim}{f}_i$$

$$\underset{\sim}{y}_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ t_{i+1} \end{bmatrix}, \quad y_{i+1} = y(x_{i+1}), \quad t_{i+1} = t(x_{i+1})$$

$$\underset{\sim}{f}_i = \begin{bmatrix} t_i \\ a y_i + b t_i \end{bmatrix}$$

Analogicznie metody Rungego - Kutty

P1

Przykład R-nie oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$x(t_0) = x(0) = 0 = x_0 \ (m)$$

$$\dot{x}(t_0) = v(t_0) = v_0 = 10 \ (m/s)$$

układ r-ń

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$v_0 = 10$

Z metody Eulera

$$x_{i+1} = x_i + \tau v_i$$

$$v_{i+1} = v_i + \tau(-\omega^2 x_i) = v_i - \tau\omega^2 x_i$$

Niech $\omega^2 = 10 \ (\frac{1}{s^2})$, $\tau = 0{,}1 (s)$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \tau v_0 \\ v_1 = v_0 - \tau\omega^2 x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \tau v_1 \\ v_2 = v_1 - \tau\omega^2 x_1 \end{cases}$$

wstawić liczby i policzyć