RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

$$\boxed{\begin{aligned} &y'(x) = f(x, y(x)) \\ &y(x_0) = a \end{aligned}}$$

np. $\frac{dy(x)}{dx} = 5x + 3$

$y(0) = -3$

$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ np. $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 10 \frac{dy}{dx} + x$

$y(x_0) = a, \; y'(x_0) = b$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 10$

$y(x_0) = a, \; y(x_1) = c$

Rozwiązywanie metodą Eulera

$h \ll 1$

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h\, y'(x_0) =$$

$$= y(x_0) + h\, f(x_0, y(x_0))$$

$$y_{i+1} \approx y_i + h\, f(x_i, y_i)$$

(prosta metoda Eulera)

Udoskonalenia

(1) $y(x_0+h) \approx y(x_0) + h\,y'(x_0+\frac{h}{2}) =$

$= y(x_0) + h\,f(x_0+\frac{h}{2}, y(x_0+\frac{h}{2}))$

$y_{i+1} \approx y_i + h\,f(x_i+\frac{h}{2}, y(x_i+\frac{h}{2}))$

(2) $y(x_0+h) \approx y(x_0) + h\,\frac{y'(x_0) + y'(x_0+h)}{2} =$

$= y(x_0) + h\,\frac{f(x_0, y(x_0)) + f(x_0+h, y(x_0+h))}{2}$

$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$ (*)

Ad. (1) Zmodyfikowana metoda Eulera
Najpierw oszacuj $y(x_0+\frac{h}{2}) = y(x_0) + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)$

Ad(2) Ulepszona metoda Eulera
Np. najpierw ~~z~~ metody Eulera znajdź y_{i+1}, wstaw to do $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ i dopiero znajdź y_{i+1} ze wzoru (*)

Dyskusja

$$|y_{h/2}(x_0+h) - y_h(x_0+h)| < \delta$$

Równania drugiego rzędu

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Np. $\begin{cases} y''(x) = a\,y(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Równanie różniczkowe drugiego rzędu sprowadzamy do układu dwóch równań pierwszego rzędu.

Stosujemy podstawienie

$$y'(x) = t(x), \quad (y''(x) = t'(x))$$

RRZ-6

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = f(x, y(x), t(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ t(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Zapis wektorowy

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ t'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(x) \\ f(x, y(x), t(x)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ t(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} t(x) \\ f(x, y(x), t(x)) \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{y}'(x) = \underset{\sim}{f}(x)$ – równanie różniczk.

$\underset{\sim}{y}(x_0) = \underset{\sim}{y}_0$ – w-k początkowy

Rozwiązanie np. metodą Eulera

$$\underset{\sim}{y}_{i+1} = \underset{\sim}{y}_i + h \underset{\sim}{f}_i$$

$i=0$

$$\underset{\sim}{y}_1 = \underset{\sim}{y}_0 + h \underset{\sim}{f}_0$$

$i=1$

$$\underset{\sim}{y}_2 = \underset{\sim}{y}_1 + h \underset{\sim}{f}_1$$

itd

Przykład.

$$y''(x) = \underbrace{a\,y(x) + b\,y'(x)}_{= f(x, y(x), y'(x))}, \quad y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'$$

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = f(x, y(x), t(x)) = a\,y(x) + b\,t(x) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ t(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} t(x) \\ a\,y(x) + b\,t(x) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f} \Rightarrow \underset{\sim}{y}_{i+1} = \underset{\sim}{y}_i + h\,\underset{\sim}{f}_i$$

$$\underset{\sim}{y}_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ t_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} y_{i+1} = y(x_{i+1}) \\ t_{i+1} = t(x_{i+1}) \end{matrix}$$

$$\underset{\sim}{f}_i = \begin{bmatrix} t_i \\ a\,y_i + b\,t_i \end{bmatrix}$$

Analogicznie metody Rungego-Kutty

Stałe ruchu (Całki ruchu)

Mogą być użyte do kontroli jakości (dokładności) rozwiązań.

Np. równanie

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$$

Niech $m = k = 1$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -x}, \quad x = x(t), \; v = v(t)$$

z definicji prędkości $\boxed{\frac{dx}{dt} = v}$.

Korzystając z prostej metody Eulera:

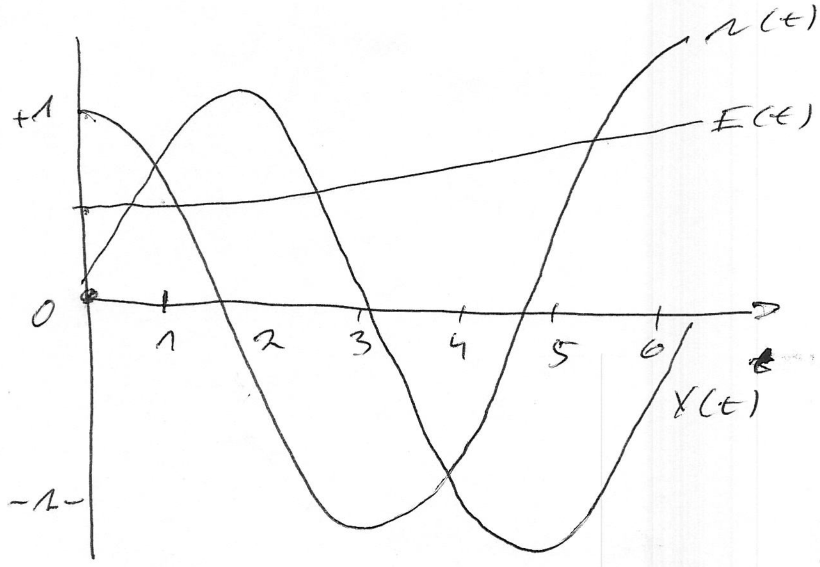
$$v(t_0+\delta) = v(t_0) + \delta \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0} = v(t_0) - \delta x(t_0),$$

$$x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} = x(t_0) + \delta v(t_0).$$

Sprawdzaj po każdym kroku stałą ruchu

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Wyniki dla $x(t_0=0)=0,\ v(t_0=0)=1$



Poprawa: (1) użyj prostej met. E

$$v\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)=v(t_0)+\frac{\delta}{2}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0}=v(t_0)-\frac{\delta}{2}x(t_0)$$

$$x\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)=x(t_0)+\frac{\delta}{2}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}=x(t_0)+\frac{\delta}{2}v(t_0)$$

(2) użyj zmodyfikowanej met. E

$$v(t_0+\delta)=v(t_0)+\delta\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0+\frac{\delta}{2}}=v(t_0)-\delta x\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)$$

$$x(t_0+\delta)=x(t_0)+\delta\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0+\frac{\delta}{2}}=x(t_0)+\delta v\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)$$

Uwaga! Można wymusić dokładność w zachowaniu stałej ruchu

np. $x(t_0+\delta)=x(t_0)+\delta v(t_0)$

i $|v(t_0+\delta)|$ z $E=\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$

i tylko znak v z

$$v(t_0+\delta)=v(t_0)-\delta x(t_0)$$

Czy jest to korzystne?