INTERPOLACJA

I. Lagrange'a

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} L_{j,n}(x) f(x_j)$$

$p(x)$ wielomian stopnia $n-1$

$$L_{j,n}(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

Zawsze w interpolacji zachodzi

$$p(x_j) = f(x_j)!$$

I. Hermite'a

x	$f(x)$	$f'(x)$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} h_{jn}(x) f(x_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \overline{h_{jn}}(x) f'(x_j)$$

$p(x)$ – wielomian stopnia $2n-1$

$$h_{jn} = \left[1 - 2(x - x_j)\, l'_{jn}(x_j)\right] l^2_{jn}(x)$$

$$\overline{h_{jn}} = (x - x_j)\, l^2_{jn}(x)$$

I. funkcjami giętymi (splinami)

Mamy

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$

Potrzebujemy

$f'(x)$, $x \in \langle x_1, x_n \rangle$

Bierzemy po cztery punkty!

$x_j \leq x \leq x_{j+1}$

$$P_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j$$

Wyznaczamy współczynniki przy założeniu ciągłości pochodnej w punktach x_j.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{3.13}$$

and determine a, b, c, and d by requiring that

$$p(x_1) = f(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2),$$

$$p'(x_1) = f'(x_1), \quad \text{and} \quad p'(x_2) = f'(x_2). \tag{3.14}$$

This interpolating polynomial will be continuous, as was the Lagrange interpolating polynomial, and its first derivative will also be continuous! With some effort, we can determine the appropriate coefficients and find

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(1-2(x-x_1))(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^2} f(x_1) + \frac{(1-2(x-x_2))(x-x_1)^2}{(x_1-x_2)^2} f(x_2) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^2} f'(x_1) + \frac{(x-x_2)(x-x_1)^2}{(x_1-x_2)^2} f'(x_2). \end{aligned} \tag{3.15}$$

וכו׳. $p'(x_i) = f'(x_i)$ $i=1,2$

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$f(x_1) \approx f(x) + (x_1 - x) f'(x)$$

$$f(x_2) \approx f(x) + (x_2 - x) f'(x)$$

Wstawiamy wielomian $p(x)$, taki, że

$$f(x_1) = p(x) + (x_1 - x) p'(x)$$

$$f(x_2) = p(x) + (x_2 - x) p'(x)$$

stąd

$$p(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$