#4 PRZYBLIŻANIE POCHODNYCH ZA POMOCĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

$$(1)\quad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{V}(x)+\dots$$

$$(2)\quad f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{V}(x)+\dots$$

z (1)

$$(3)\quad f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\underbrace{-\frac{h}{2!}f''(x)-\frac{h^2}{3!}f'''(x)-\dots}_{=O(h)}$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h)$$

z (2)

$$(4)\quad f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+\frac{h}{2!}f''(x)-\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\dots$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h)$$

$(3)+(4) \rightarrow$

$$(5)\quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2\cdot 3!} f'''(x) + \ldots$$

$$- \frac{h^4}{2\cdot 5!} f^{v}(x) - \frac{h^6}{2\cdot 7!} f^{vii}(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

$$h < 1 \Rightarrow O(h^2) < O(h)$$

$(1)+(2) \rightarrow$

$$(6)\quad f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} f^{iv}(x) + \ldots$$

$$- \frac{2h^4}{6!} f^{vi}(x) - \frac{2h^6}{8!} f^{viii}(x)\ldots$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Ekstrapolacja Richardsona

z (5) przy $h \longrightarrow 2h$

$$(7)\; f'(x) = \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{2 \cdot 2h} - 2^2 \frac{h^2}{3!} f'''(x) +$$

$$- 2^4 \frac{h^4}{5!} f^{v}(x) - 2^6 \frac{h^6}{7!} f^{vii}(x) - \ldots$$

Dwa sposoby

1° Równanie (5) pomnóż przez 2^2 i odejmij od niego (7)

wszystko podziel przez $2^2 - 1 = 3$

nowa dość skomplikowana formuła

zawiera błąd $= O(h^4)$

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} +$$

$$+ O(h^4)$$

Analogicznie

$$f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16 f(x-h) - 30 f(x) + 16 f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2} + O(h^4)$$

prowadzi do skomplikowanych wzorów

2° Podejście numeryczne!

Nowe oznaczenia $D_1(h)$, $D_1(2h)$, $D_2(h)$, $D_2(2h)$, $D_3(h)$ itp.

$$D_2(h) = \frac{2^2 D_1(h) - D_1(2h)}{2^2 - 1} + O(h^4)$$

$$D_3(h) = \frac{2^4 D_2(h) - D_2(2h)}{2^4 - 1} + O(h^6)$$

$$D_4(h) = \frac{2^{2\cdot 3} D_3(h) - D_3(2h)}{2^{2\cdot 3} - 1} + O(h^{2\cdot(3+1)})$$

Ogólnie

$$D_{i+1}(h) = \frac{2^{2i} D_i(h) - D_i(2h)}{2^{2i} - 1} + O(h^{2(i+1)})$$

Np. $h = 0{,}01$ $f''(2)$

h	$D_1(h)$			
$2h$	$D_1(2h)$	$D_2(h)$		
$4h$	$D_1(4h)$	$D_2(2h)$	$D_3(h)$	
$8h$	$D_1(8h)$	$D_2(4h)$	$D_3(2h)$	$D_4(h)$
$16h$	$D_1(16h)$	$D_2(8h)$	$D_3(4h)$	$D_4(2h)$