CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f_i \qquad (1)$$

$$f_i = f(x_i)$$

Metody proste

1. Metoda trapezów

Wzór (1) ma dać dokładne rozwiązanie dla $f(x)=1$ i $f(x)=x$ czyli $n=1$

$x_0 = a$, $x_1 = b$

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_1} 1\,dx = x_1 - x_0 = W_0 + W_1 \\ I &= \int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = W_0 x_0 + W_1 x_1 \end{aligned}\right\}$$

stąd wagi $W_0 = W_1 = \dfrac{x_1 - x_0}{2} = \dfrac{h}{2}$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

2. Metoda Simpsona (parabol)

Wzór (1) ma dać dokładne rozwiązanie dla $f(x) = 1, x, x^2$, tutaj $n=2$

$x_0 = a, \ x_1, \ x_2 = b$

$$\left.\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} 1\,dx &= \underline{x_2 - x_0 = w_0 + w_1 + w_2} \\
\int_{x_0}^{x_2} x\,dx &= \underline{\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2} \\
\int_{x_0}^{x_2} x^2\,dx &= \underline{\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2}
\end{aligned}\right\}$$

Stąd wagi $w_0 = w_2 = \frac{h}{3}, \quad w_1 = \frac{4h}{3}$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) + \mathcal{O}(h^5)$$

3. Metoda Simpsona 3/8

Wzór (1) ma dać dokładny wynik dla

$f(x) = 1, x, x^2, x^3$; $n = 3$

Wynik:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + O(h^5)$$

4. Metoda Boole'a

$f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$, $n = 4$

Wynik:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) + O(h^7)$$

Metody złożone

1. Metoda Eulera-McClaurina (złożona metoda trapezów)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + \frac{f_n}{2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(f_0' - f_n'\right) +$$
$$- \frac{h^4}{720}\left(f_0''' - f_n'''\right) + \dots$$

2. Metoda Simpsona

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

3. Reszta analogicznie

Całkowanie Romberga

$$I_1(h) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{, z krokiem } h$$

$$I_1\left(\frac{h}{2}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{, z krokiem } 2h \text{ ,}$$

$$I_2(h) = \frac{2^2 I_1\left(\frac{h}{2}\right) - I_1(h)}{2^2 - 1} + O(h^4)$$

$$I_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^2 I_1\left(\frac{h}{4}\right) - I_1\left(\frac{h}{2}\right)}{2^2 - 1} + O(h^4)$$

$$I_3(h) = \frac{2^{2\cdot 2} I_2\left(\frac{h}{2}\right) - I_2(h)}{2^{2\cdot 2} - 1} + O(h^6)$$

$$I_{i+1}(h) = \frac{2^{2i} I_i\left(\frac{h}{2}\right) - I_i(h)}{2^{2i} - 1} + O\left(h^{2(i+1)}\right)$$

WYKORZYSTANIE METODY CAŁKOWANIA ROMBERGA

RZĄD BŁĘDU $\sim h^2$ $\quad \sim h^4$ $\quad \sim h^6 \ \ldots$

$$
\begin{array}{llll}
I_1(h) & & & \\
I_1(2h) & I_2(h) & & \\
I_1(4h) & I_2(2h) & I_3(h) & \ldots \\
I_1(8h) & I_2(4h) & I_3(2h) & \\
I_1(16h) & I_2(8h) & I_3(4h) & \\
I_1(32h) & I_2(16h) & I_3(8h) & \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

OSZACOWANIE BŁĘDU W MET. TRAPEZÓW

1° punkt a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big[f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{4!} f^{IV}(a) + \ldots \Big] dx =$$

$$= h f(a) + \frac{h^2}{2!} f'(a) + \frac{h^3}{3!} f''(a) + \frac{h^4}{4!} f'''(a) + \ldots \quad (*)$$

ponieważ

$$\int_a^b (x-a)^n\,dx = \int_a^b (x-a)^n\,d(x-a) = \left.\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b =$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n+1}, \qquad (da = 0)$$

2° punkt b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big[f(b) + (x-b) f'(b) + \frac{(x-b)^2}{2!} f''(b) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(b) + $$

$$+ \frac{(x-b)^4}{4!} f^{IV}(b) + \dots \Big] dx =$$

$$= h f(b) - \frac{h^2}{2!} f'(b) + \frac{h^3}{3!} f''(b) - \frac{h^4}{4!} f'''(b) + \dots \quad (**)$$

ponieważ

$$\int_a^b (x-b)^n dx = \int_a^b (x-b)^n d(x-b) = \frac{(x-b)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b =$$

$$= -\frac{(-h)^{n+1}}{n+1}, \quad (db = 0)$$

3° dodaj stronami (*) i (**), obie strony podziel przez 2

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{h^2}{2\cdot 2!}\left[f'(a)-f'(b)\right] + \frac{h^3}{2\cdot 3!}\left[f''(a)+f''(b)\right]$$

$$+ \frac{h^4}{2\cdot 4!}\left[f'''(a)-f'''(b)\right] + \frac{h^5}{2\cdot 5!}\left[f^{IV}(a)+f^{IV}(b)\right] + \ldots \quad (***)$$

4° rozwiń $f'(x)$ wokół a

$$f'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f'''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{IV}(a) + \ldots$$

wstaw $x = b$

$$f'(b) = f'(a) + hf''(a) + \frac{h^2}{2!}f'''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{IV}(a) + \ldots$$

5° rozwiń $f'(x)$ wokół b

$$f'(x) = f'(b) + (x-b) f''(b) + \frac{(x-b)^2}{2!} f'''(b) + \frac{(x-b)^3}{3!} f^{iv}(b) + \ldots$$

wstaw $x = a$

$$f'(a) = f'(b) - h f''(b) + \frac{h^2}{2!} f'''(b) - \frac{h^3}{3!} f^{iv}(b) + \ldots$$

6° z wyrażeń na $f'(b)$ i $f'(a)$ oblicz

$$f''(a) + f''(b) = \frac{2}{h}\left[f'(b) - f'(a)\right] - \frac{h}{2!}\left[f'''(a) - f'''(b)\right] - \frac{h^2}{3!}\left[f^{iv}(a) + f^{iv}(b)\right] + \ldots$$

7° analogicznie rozwiń $f'''(x)$ wokół a i b i znajdź, że

$$f^{IV}(a) + f^{IV}(b) = \frac{2}{h}\left[f'''(b) - f'''(a)\right] + \ldots$$

itd.

8° wstaw dwa ostatnie wyniki do (***)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2!}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{h^2}{2\cdot 3!}\left[f'(a)-f'(b)\right] - \frac{h^4}{720} \times$$

$$\times \left[f'''(a) - f^{(4)}(b)\right] + \ldots$$

9° z p. 8° wzór na metodę Eulera-McLaurina (złożoną metodę trapezów)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(f_0' - f_n'\right) - \frac{h^4}{720} \times$$

$$\times \left(f_0''' - f_n'''\right) + \ldots$$