RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

Przykłady równań

falowe $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2} - v^2 \Delta u(\vec{r},t) = 0$$

gdzie $$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}, \quad \vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{r} = (x,y,z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

dyfuzji $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial t} - k\Delta u(\vec{r},t) = 0$$

Schrödingera

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right] u(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial t}$$

METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH — RRCz-2

Rozpatrzmy rozwiązywanie równania falowego jednowymiarowego

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

siatka $x_0, x_1 \dots x_n$, $x_i = i\delta$, $i = 0 \dots n$

$t_0, t_1 \dots t_m$, $t_j = j\tau$, $j = 0 \dots m$

$$u_i^j = u(x_i, t_j) \qquad \text{dyskretyzacja}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=x_i,\ t=t_j} = \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx$$

$$\approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}$$

wstawiamy do (1)

$$0=\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}-v^2\,\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{\delta^2}$$

Stąd (zad. dom.)

$$u_i^{j+1}=\frac{\tau^2 v^2}{\delta^2}\left(u_{i+1}^j+u_{i-1}^j\right)+2\left(1-\frac{\tau^2 v^2}{\delta^2}\right)u_i^j-u_i^{j-1}$$

Znając wartości funkcji u na siatce x w dwóch poprzednich chwilach czasu np. t_0 i t_1 możemy wyznaczyć u_i^2.

Uwaga! Odpowiedni dobór kroków zwiększa dokładność i upraszcza równanie

np. niech $1-\frac{\tau^2 v^2}{\delta^2}=0$

$$v^2=\frac{\delta^2}{\tau^2}\Rightarrow v=\frac{\delta}{\tau}\quad\left(\text{prędk.}=\frac{\text{droga}}{\text{czas}}\right)$$

wtedy

$$u_i^{j+1}=u_{i+1}^j+u_{i-1}^j-u_i^{j-1}$$

RRCz-4

Dwuwymiarowe równanie dyfuzji.

Przypadek statyczny

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial t} - k\,\Delta u(\vec{r},t) = 0$$

założenie $u(\vec{r},t) = u(x,y)$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial t} = 0$$

$$0 = \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

Siatka $x_0, x_1 \dots x_n$, $x_i = i\delta$ $i=0 \dots n$

$y_0, y_1, \dots, y_m$, $y_j = j\tau$ $j=0 \dots m$

Dyskretyzacja $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\tau^2}$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = 0$$

zad. dom.

$$u_{ij} = \frac{\delta^2 \tau^2}{2\delta^2 + 2\tau^2}\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\delta^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\tau^2}\right)$$

Dla $\delta = \tau$

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

Warunki brzegowe typu

- Dirichleta
- Neumanna