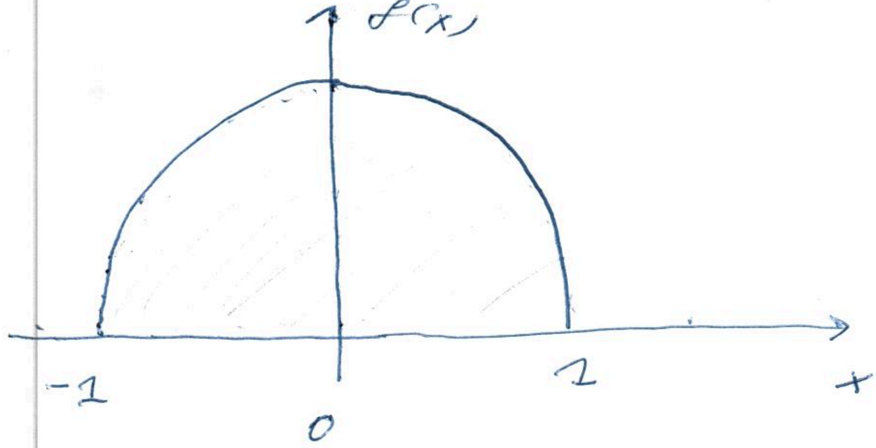
Ostrzeżenie!

Np. oblicz pole pod krzywą

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na odcinku $\langle -1, 1 \rangle$



$$P = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Bardzo słaba zbieżność, nawet przy użyciu całkowania Romberga. Przyczyną jest nieskończoność pochodnej $f'(x)$ w 1 i -1. Należy użyć gęstszej siatki na końcach.

Można to zrobić elegancko przez zamianę zmiennych $x = \cos\theta$,

$$P = \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta,$$ ponieważ

$dx = d\cos\theta = -\sin\theta\, d\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \sin\theta$

$x = -1 \rightarrow \theta = \pi$

$x = 1 \rightarrow \theta = 0$

Przykład: ugięcie światła na krawędzi.

Natężenie ugiętego światła w zależności od v proporcj. do przebytej drogi

$$I(v) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[C(v) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S(v) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\},$$

gdzie I_0 - natężenie światła padającego

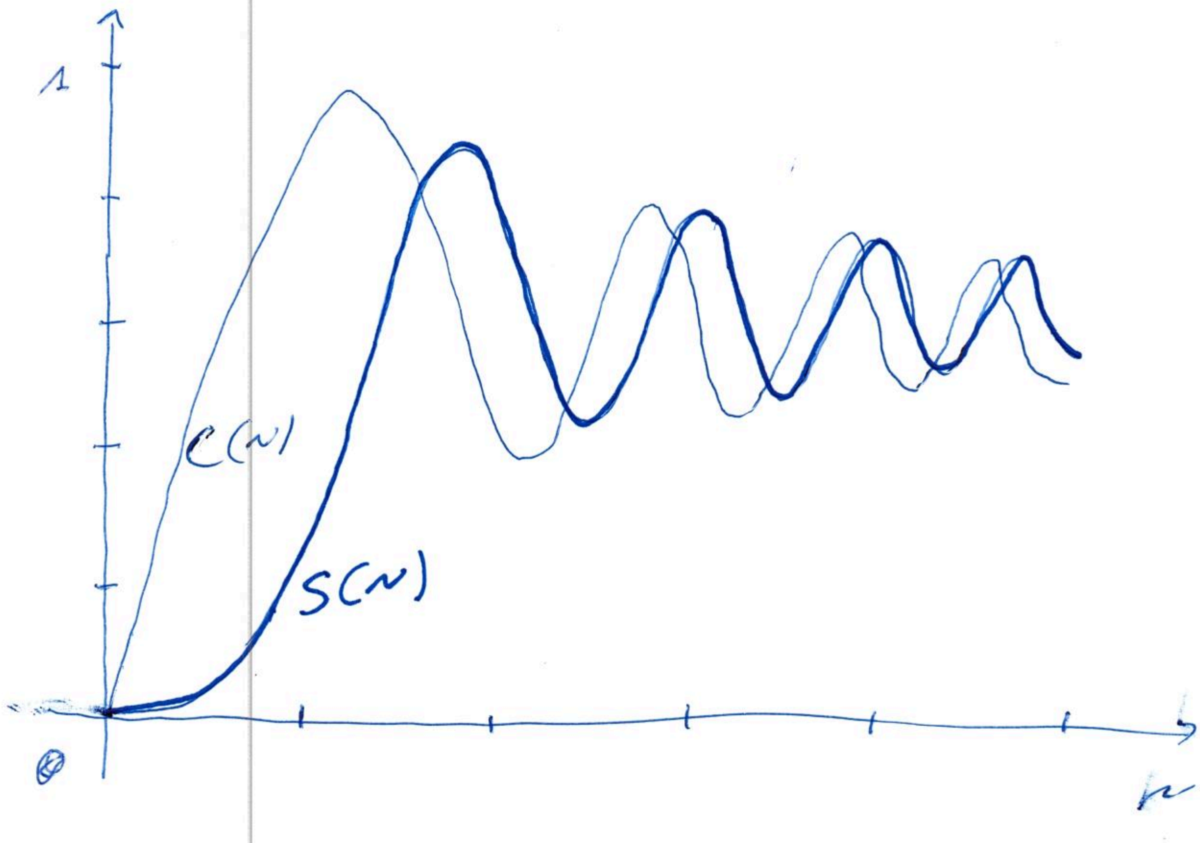
$C(v), S(v)$ - całki Fresnela

$$C(v) = \int_0^v \cos(\pi w^2/2)\, dw$$

$$S(v) = \int_0^v \sin(\pi w^2/2)\, dw.$$

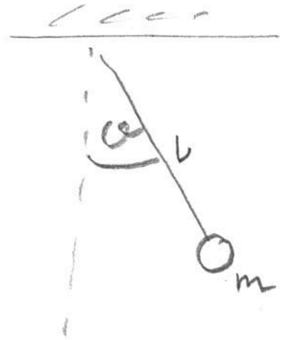
Można obliczyć $\dfrac{I(v)}{I_0}$

i zrobić wykres.


1
C(v)
S(v)
0
v

PROSTE WAHADŁO

Z równania Newtona



$$mL\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$$

Dla małych drgań $\sin\vartheta \approx \vartheta$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L}\vartheta$$

Rozwiązanie jest kombinacją liniową $\cos\sqrt{\frac{g}{L}}\,t$ i $\sin\sqrt{\frac{g}{L}}\,t$, dla warunku początkowego $\vartheta(t=0)=\vartheta_0$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0\cos\sqrt{\frac{g}{L}}\,t.$$

Jednak,

spróbujmy rozwiązać dokładne r-nie

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta \quad \Big/ \cdot \dot{\vartheta}$$

$$\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \quad \Big/ \int dt$$

$$\int \dot{\vartheta}\ddot{\vartheta}\,dt = -\frac{g}{l}\int \dot{\vartheta}\sin\vartheta\,dt$$

$$\int \dot{\vartheta}\,d\dot{\vartheta} = \frac{g}{l}\int d\cos\vartheta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{g}{l}\cos\vartheta + C$$

Stałą C wyznaczamy z w-ku

$$\dot{\vartheta}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C = -\frac{g}{l}\cos\vartheta_0$$

$$\vartheta_0 = \vartheta(t=0)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}$$

$$\int / \quad dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}$$

$$\underbrace{\int_0^T dt}_{T} = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}$$

ponieważ w czasie T wahadło przebędzie czterokrotnie drogę z 0 do ϑ_0

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}\right)}}$$

Podstawiamy (pomysł Legendre'a)

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta_0}{2}}$$

PH-4

$\vartheta = 0 \Rightarrow \sin\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$

$\vartheta = \vartheta_0 \Rightarrow \sin\xi = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\vartheta_0} (po\ \vartheta) \to \int_0^{\pi/2} (po\ \xi)$$

arcsin / $\sin\xi \sin\frac{\vartheta_0}{2} = \sin\frac{\vartheta}{2}$

d / $\arcsin\left(\sin\xi \sin\frac{\vartheta_0}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{\sin\frac{\vartheta_0}{2}\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\sin^2\xi}} = \frac{1}{2}d\vartheta \quad / 2$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin\frac{\vartheta_0}{2}\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\sin^2\xi}\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\xi}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\sin^2\xi}}}_{= K\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right)}$$

całka eliptyczna pierwszego rodzaju

Ogólna całka eliptyczna pierwszego rodzaju

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

Teraz można dla różnych początkowych wychyleń ϑ_0 znajdować T

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\sin^2\xi}}$$

Zad. Oblicz całkę, zrób tabelkę

ϑ_0	T
⋮	⋮