Metody Rungego-Kutty

Metody Eulera są przykładami szerszej klasy rozwiązań zwanych metodami Rungego-Kutty, które zawierają $f(x, y(x))$ obliczoną dla różnych argumentów.

Przykład:

$$y' = f(x,y) \Rightarrow y(x_0+h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(\tau, y)\, d\tau$$

problem

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(\tau, y)\, d\tau \approx h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{mid}\right),$$

$$y_{mid} = y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$y_{mid} \approx y(x_0) + \frac{h}{2} f(x_0, y_0), \quad y_0 = y(x_0)$$

W końcu: $y(x_0+h) = y(x_0) + h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0\right)$

$$f_0 = f(x_0, y_0)$$

Jest to wzór na metodę RK rzędu 2, równoważny ze zmodyfikowaną met. E.

Rozwiązywanie metodą Rungego-Kutty
czwartego rzędu

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \frac{h}{6}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3\right) + \mathcal{O}(h^5)$$

gdzie

$$f_0 = f(x_0, y_0), \quad y_0 = y(x_0)$$

$$f_1 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0\right)$$

$$f_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(x_0 + h, y_0 + h f_2\right)$$

Przykład

$$y''(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

$$f(x, y(x), y'(x)) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}$$

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = \dfrac{t(x)}{x} - \dfrac{y(x)}{x^2} \end{cases}$$

$$f(x, y(x), t(x)) = \frac{t(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}$$

$$\begin{cases} y'(x) = t(x) \\ t'(x) = f(x, y(x), t(x)) \end{cases}$$

Metoda Eulera (pierwszy krok)

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h\, t_0 \\ t_1 = t_0 + h\, f(x_0, y_0, t_0) \end{cases}$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (pierwszy krok)

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(\overset{\overset{t_0}{|||}}{f_0^t} + 2\overset{\overset{t_0}{|||}}{f_1^t} + 2\overset{\overset{t_0}{|||}}{f_2^t} + \overset{\overset{t_0}{|||}}{f_3^t}\right) \\ t_1 = t_0 + \frac{h}{6}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{h}{6} 6t_0 = y_0 + h t_0 \\ t_1 = t_0 + \frac{h}{6}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3\right) \end{cases}$$

$$f_0 = f(x_0, y_0, t_0) = \frac{t_0}{x_0} - \frac{y_0}{x_0^2}$$

$$f_1 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0, t_0\right) = \frac{t_0}{x_0 + \frac{h}{2}} - \frac{y_0 + \frac{h}{2} f_0}{\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2}$$

$$f_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_1, t_0\right) = \frac{t_0}{x_0 + \frac{h}{2}} - \frac{y_0 + \frac{h}{2} f_1}{\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2}$$

$$f_3 = f\left(x_0 + h, y_0 + h f_2, t_0\right) = \frac{t_0}{x_0 + h} - \frac{y_0 + h f_2}{\left(x_0 + h\right)^2}$$