3

RUML-1

Rozwiązywanie układów równań liniowych

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = r_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = r_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = r_n$$

lub

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = r_1 \qquad \text{~~dla~~}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = r_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i = r_n$$

lub

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = r_j \qquad \text{dla } j = 1 \dots n$$

n - równań
n - niewiadomych

$a_{ij}, x_i, r_j \in R$

$$\frac{a_2}{b_1} \Big/ \; b_1 x_1 + c_1 x_2 = r_1 \quad (1)$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = r_2 \quad (2)$$

$$a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = r_3 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = r_{n-1} \quad (n-1)$$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = r_n \quad (n)$$

$(2) - (1) \to (2')$

$$\left(b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1}\right) x_2 + c_2 x_3 = r_2 - \frac{a_2}{b_1} r_1 \quad (2')$$

означим

$$\beta_1 = b_1, \quad \beta_2 = b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1}$$

$$\rho_1 = r_1, \quad \rho_2 = r_2 - \frac{a_2}{b_1} r_1$$

$$\beta_1 x_1 + c_1 x_2 = \rho_1 \quad (1)$$

$$\frac{a_3}{\beta_2} \Big/ \; \beta_2 x_2 + c_2 x_3 = \rho_2 \quad (2')$$

$(3) - (2') \to (3')$

RUML-2

Inny zapis macierzowy

$$\underset{\approx}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{r}$$

, gdzie

$\underset{\approx}{A}$ macierz współczynników,

$\underset{\sim}{x}$ - wektor niewiadomych

$\underset{\sim}{r}$ - wektor wyrazów wolnych

Metoda eliminacji Gaussa w układzie trójdiagonalnym

$$\underset{\approx}{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

$$\left(b_3 - \frac{a_3 b_2}{\beta_2}\right) x_3 + c_3 x_4 = r_3 - \frac{a_3}{\beta_2}\rho_2 \quad (3')$$

$$\beta_3 = b_3 - \frac{a_3 b_2}{\beta_2}, \quad \rho_3 = r_3 - \frac{a_3}{\beta_2}\rho_2$$

itd.

Otrzymujemy układ dwudiagonalny

$$\beta_j = b_j - \frac{a_j b_{j-1}}{\beta_{j-1}}, \quad \rho_j = r_j - \frac{a_j}{\beta_{j-1}}\rho_{j-1}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1 x_1 + c_1 x_2 &= \rho_1 \quad (1)\\
\beta_2 x_2 + c_2 x_3 &= \rho_2 \quad (2)\\
\beta_3 x_3 + c_3 x_4 &= \rho_3 \quad (3)\\
&\vdots\\
\beta_{n-1} x_{n-1} + c_{n-2} x_n &= \rho_{n-1} \quad (4)\\
\beta_n x_n &= \rho_n \quad (5)
\end{aligned}
$$

stąd $x_n = \dfrac{\rho_n}{\beta_n}$, $x_{n-1} = \dfrac{\rho_{n-1} - c_{n-2} x_n}{\beta_{n-1}}$

$$x_{n-2} = \frac{\rho_{n-2} - c_{n-2} x_{n-1}}{\beta_{n-2}}$$

itd

ogólnie $\displaystyle \underset{j=1,2,\dots,n-1}{} x_{n-j} = \frac{\rho_{n-j} - c_{n-j} x_{n-j+1}}{\beta_{n-j}}$

2° przypadek ogólny

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \quad \Big/ \frac{a_{j1}}{a_{11}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad (n)$$

Krok pierwszy: eliminacja x_1 ze wszystkich równań oprócz pierwszego

weź j-te równanie

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn-1}x_{n-1} + a_{jn}x_n = b_j$$

i odejmij pierwsze pomnożone przez $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$

$$\left(a_{j2} - \frac{a_{12}a_{j1}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{j3} - \frac{a_{13}a_{j1}}{a_{11}}\right)x_3 + \dots$$

$$+ \left(a_{jn} - \frac{a_{1n}a_{j1}}{a_{11}}\right)x_n = b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}}b_1$$

$$i = 2, \dots, n$$

następnie prowadzimy eliminację x_2 z $n-2$ równań w kroku drugim

$$(\ )(\ ) = (\ )$$

wszystkie przypadki podstawowe

RUAL - 6

Można zrobić tego rodzaju podejście przez mnożenie układu $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$

za pomocą odpowiednich macierzy i tak

eliminacja x_1 z n-2 równań odpowiada mnożeniu przez macierz

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n1}/a_{11} & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}$$

czyli $\underset{\sim}{M_1}\,\underset{\sim}{A}\,x = \underset{\sim}{M_1}\,\underset{\sim}{b}$

eliminacja x_2 z n-2 równań

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 & 0 & \\ 0 & -a_{42}/a_{22} & 0 & 1 & \\ 0 & -a_{n2}/a_{22} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie a_{kj} to są już odpowiednie elementy po układzie po wykonaniu operacji

3° metoda Crouta [illegible]

$A = L U$, gdzie

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & u_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie r-nia macierzowego

$$A x = b$$

$$L U x = b$$

(2) $U x = z$ (rozwiązanie metodą podstawiania od tyłu)

(1) $L z = b$ (rozwiązanie metodą podstawiania od przodu)

RURL-8

przykład 4 x 4

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{l_{11}\ 0\ 0\ 0} & & & \\ \cancel{l_{21}\ l_{22}\ 0\ 0} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & \cancel{u_{12}\ u_{13}\ u_{14}} & & \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = l_{11}$ | $a_{12} = l_{11} u_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$

$a_{21} = l_{21}$ | $a_{13} = l_{11} u_{13} \Rightarrow u_{13} \ \frac{a_{13}}{l_{11}}$

$a_{31} = l_{31}$ | $a_{14} = l_{11} u_{14} \Rightarrow u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$

$a_{41} = l_{41}$

$a_{22} = l_{21} u_{12} + l_{22} \Rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12}$

itd.

Ogólnie

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk}$$

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} u_{ij}\right) / l_{kk}$$

✓