# DYSKRETNA TRANSFORMATA FOURIERA

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$g(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

Z def. DFT

$$g(n\Delta\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta t)\, e^{-i 2\pi m n/N}$$

gdzie $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

odwrotna DFT

$$f(m\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n\Delta\omega)\, e^{i 2\pi m n/N}$$

Uwaga: sumy są skończone, w odróżnieniu od szeregu Fouriera, gdzie sumowanie było nieskończone.

Złożoność obliczeniowa $O(N^2)$!

# SZYBKA TRANSFORMATA FOURIERA
(wg. Danielsona i Lanczosa)

$$g(n\Delta\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta t)\, e^{-i2\pi mn/N} =$$

$$= \sum_{m=0\,(\text{po parzystych})}^{N-1} f(m\Delta t)\, e^{-i2\pi mn/N} +$$

$$+ \sum_{m=0\,(\text{po nieparzystych})}^{N-1} f(m\Delta t)\, e^{-i2\pi mn/N} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j\Delta t)\, e^{-i2\pi\, 2jn/N} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f((2j+1)\Delta t)\, e^{-i2\pi(2j+1)n/N},$$

gdzie $m = 2j$ w pierwszej sumie i

$m = 2j+1$ w drugiej sumie.

Dalej

$$g(n\Delta\omega) = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j\Delta t)\, e^{-i2\pi jn/(N/2)}$$

$$+\ e^{-i2\pi n/N} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f((2j+1)\Delta t)\, e^{-i2\pi jn/(N/2)} =$$

$$= g_{parzyste}(n\Delta\omega) + e^{-i2\pi n/N}\, g_{nieparzyste}(n\Delta\omega)$$

złożoność obliczeniowa $2 \times \Theta\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2\right)$

przy podziale k-tym, o ile $N = 2^k$

złożoność wynosi $\Theta(N \lg N)$.

Wtedy zmienna dyskretna $n\Delta\omega$

przejdzie w zmienną ciągłą $\omega$,

a sumowanie w całkowanie!

2 (4)
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

2 (5)
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Mówimy, że $g(\omega)$ jest transformatą Fouriera $f(t)$ i oznaczamy jako

$$\mathcal{F}[f(t)] = g(\omega),$$

natomiast $f(t)$ jest odwrotną transformatą $g(\omega)$ i ozn.

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\omega)] = f(t).$$

Można rozszerzyć transformatę Fouriera na więcej wymiarów, np. dwa wymiary

$$\mathcal{F}[f(x,y)] = g(k_x, k_y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

lub trzy wymiary

$$\mathcal{F}[f(x,y,z)] = g(k_x, k_y, k_z) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\, e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}\, dx\, dy\, dz$$

$$\mathcal{F}[f(\vec{r})] = g(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\circ\vec{r}}\, d\vec{r}$$

po całej przestrzeni