Przykład R-nie oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$x(t_0) = x(0) = 0 = x_0 \ (m)$$

$$\dot{x}(t_0) = v(t_0) = v_0 = 10 \ (m/s)$$

układ r-ń I

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$v_0 = 10$

2 metody Eulera

$$x_{i+1} = x_i + \tau v_i$$

$$v_{i+1} = v_i + \tau(-\omega^2 x_i) = v_i - \tau\omega^2 x_i$$

przyjmij $\omega^2 = 10 \ (\frac{1}{s^2})$, $\tau = 0{,}1 \ (s)$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \tau v_0 \\ v_1 = v_0 - \tau\omega^2 x_0 \end{cases}$$

wstawić liczby i policzyć

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \tau v_1 \\ v_2 = v_1 - \tau\omega^2 x_1 \end{cases}$$

Stałe ruchu (Całki ruchu)

Mogą być użyte do kontroli jakości (dokładności) rozwiązań.

Np. równanie

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m}$$

przy $m = k = 1$

$$\frac{dv}{dt} = -x, \qquad x = x(t),\ v = v(t)$$

z definicji prędkości $\frac{dx}{dt} = v$.

Konstatując z prostej metody Eulera:

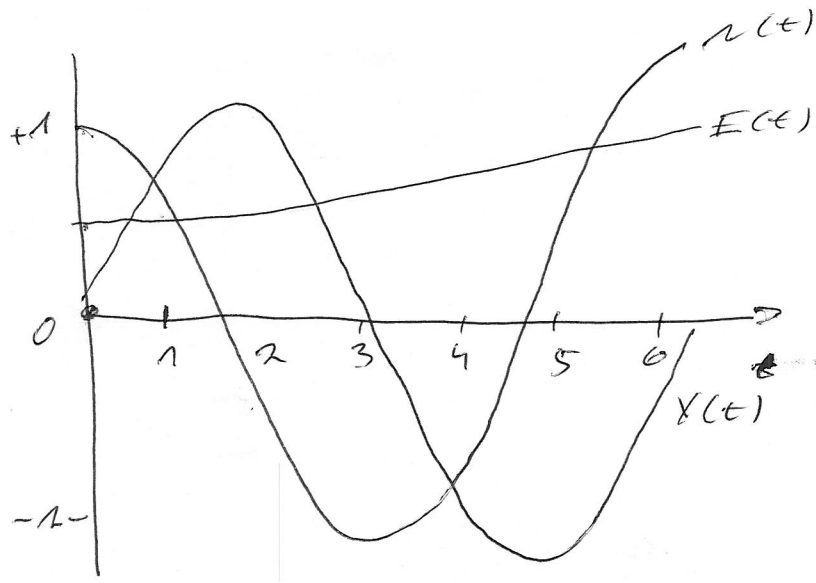
$$v(t_0+\delta) = v(t_0) + \delta \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0} = v(t_0) - \delta x(t_0),$$

$$x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} = x(t_0) + \delta v(t_0).$$

Sprawdzamy po każdym kroku stałą ruchu

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Wyniki dla $x(t_0=0)=0$, $v(t_0=0)=1$



Poprawa: (1) wiąż prostej met. E

$$v\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right) = v(t_0) + \frac{\delta}{2}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0} = v(t_0) - \frac{\delta}{2}x(t_0)$$

$$x\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right) = x(t_0) + \frac{\delta}{2}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} = x(t_0) + \frac{\delta}{2}v(t_0)$$

(2) wiąż zmodyfikowanej met. E

$$v(t_0+\delta) = v(t_0) + \delta\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t_0+\frac{\delta}{2}} = v(t_0) - \delta x\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)$$

$$x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0+\frac{\delta}{2}} = x(t_0) + \delta v\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right)$$

Uwaga! Można wymusić dokładność w zachowaniu stałej ruchu

np. $x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta v(t_0)$

i $|v(t_0+\delta)|$ z $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

i tylko małą v

$$v(t_0+\delta) = v(t_0) - \delta x(t_0)$$

Czy jest to konieczne?