MAT 111: OBLIG 3 Kasper Melheim

KASPER MELHEIM - GR.12

1 $g(x) = 12x + 4 - \cos x$, $g'(x) = 12 + \sin x$

Veit at $g(x) = 0$ har ein løysing for $x = b$ i intervallet $(-1, 2,0)$

a $x_0 = 0$

$b < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0 = 0$

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_1 = 0 - \frac{12 \cdot 0 + 4 - \cos 0}{12 + \sin 0} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$$x_2 = -0,25 - \frac{12 \cdot (-0,25) + 4 - \cos(-0,25)}{12 + \sin(-0,25)} = -0,2526451669$$

$$x_3 = x_2 - \frac{12 \cdot x_2 + 4 - \cos(x_2)}{12 + \sin(x_2)} = -0,2526454553$$

$x_4 = -0,2526454553$

Ut i frå verdiane vi har fått ser vi at rekka stemmer

$b < \dots < x_3 < x_2 < \dots < x_1 < x_0 = 0$

$b < \dots < -0,25264575 < -0,2526451669 < \dots < -0,25 < 0 = 0$

Ser at $x \approx -0,2526454553 = b$

b $x_2 - b < 0,0000003$

Bruker teorem 2 s. 229 og setter inn verdiene vi rekna ut i 1a):

$-0,2526451669 - (-0,2526454553) < 0,0000003$

$0,0000002884 < 0,0000003$

Stemmer

c $g(x) = 12x + 4 - \cos x$ Kasper Melheim

$g'(x) = 12 + \sin x$

$12x + 4 = \cos x$

$12x = \cos x - 4$

$x = \dfrac{\cos x - 4}{12} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x - 4}{12}$

$x_0 = 0$

$x_{n+1} = f(x_n)$

$x_1 = f(x_0) = \dfrac{\cos 0 - 4}{12} = -\dfrac{1}{4}$

$x_2 = f(x_1) = \dfrac{\cos(-\frac{1}{4}) - 4}{12} = -0{,}2525406315$

$x_3 = f(x_2) = \dfrac{\cos(x_2) - 4}{12} = -0{,}2526447135$

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{4}$

$x_2 = -0{,}2526451669$

$x_3 = -0{,}2526454553$

Ser her at begge metodene beveger seg inn mot roten, men Newtons metode er tydelig meir effektiv.

Sjekker om $f(-0{,}25265)$ og $f(-0{,}25264)$ får svar med forskjellige forteikn:

$f(-0{,}25265) < 0$

$f(-0{,}25264) > 0$

Ser då at $b = -0{,}252645$ kan være eit bra svar.

2 Kasper Melheim

a $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Vi veit at $e^x > 0$ for alle x.

Sjekker om vi kan bruke l'Hôpital.

$f(x) = e^x - 1 - x$, $\lim_{x \to 0} f(x) = \underline{0}$

$g(x) = x^2$, $\lim_{x \to 0} g(x) = \underline{0}$

$g'(x) = 2x \neq 0$ på intervallet

$(0, 1)$, $0 < x < 1$

Feks.

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ gir $\left[\frac{0}{0}\right]$.

l'Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ gir fortsatt $\left[\frac{0}{0}\right]$.

l'Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Kaspar Melheim

b Finnes det reelle tall a og b s. A.

$$f(x) \begin{cases} \frac{e^{ax+b}-1}{x} & , x>0 \\ \frac{x}{2}+1 & , x \le 0 \end{cases}$$

er deriverbar? Finn a og b.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2}+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax+b}-1}{x} = \frac{e^b-1}{0} = \infty$$

$f(x)$ ikkje kont i $x=0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{e^{ah+b}-1}{h}-0}{h} \overset{l'H}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \frac{\frac{e^{ah+b}\cdot(ah+b)'}{1}}{1}$$

$$= e^{ah+b}\cdot a = e^b \cdot a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{2}+1}{h} \overset{l'H}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \frac{\frac{1}{2}}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$e^b \cdot a \ne \frac{1}{2}$ er $f(x)$ ikkje deriverbar i $x=$

Kasper Melhus

c

$$f'(x) \begin{cases} \dfrac{e^{-x}(e^x - x - 1)}{x^2}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x \le 0 \end{cases}$$

$f'(x) = \frac{1}{2}$ for alle $x \le 0$

$$\cancel{\frac{e^{-x}(e^x - x - 1)}{x^2}}$$

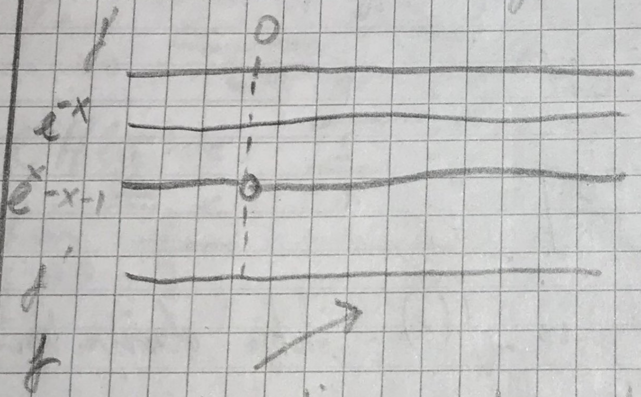
$$\cancel{\left(\frac{e^{-x} - 1}{x}\right)' = \frac{-e^{-x} \cdot x - (e^{-x} - 1) \cdot 1}{x^2}}$$

$$\frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2} = 0$$

$e^{-x}(e^x - x - 1)$ $\quad x > 0$

$e^x - x - 1 > 0$ for $x > 0$

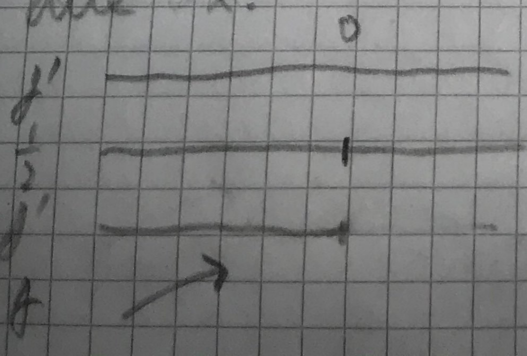
$e^{-x} > 0$ for $x > 0$



Så f stiger for alle x i $(0, \infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{2}$, $x \le 0$

Ser at $f'(x) = \frac{1}{2}$ er positiv for alle alle x.



Kasper Melheim

Så f stiger på $(-\infty, 0]$.

Grafen f er da strengt voksende på $(-\infty, 0]$ og $(0, \infty)$

Kan da si at f er strengt voksende for alle x.

d Siden f strengt voksende for alle x.

$\frac{x}{2} + 1$ kan vi skrive om til $\frac{1}{2}x + 1$. Da har vi den på formen $ax + b$, altså likning for en rett linje. Veit derfor at denne vil skjære y-aksen i 1, og alltid være stigende.

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0$$
$$\frac{1}{2}x = -1$$
$$x = -2 \Rightarrow \text{Skjærer } x\text{-aksen i } (-2, 0).$$

Siden $\frac{1}{2}x + 1$ er definert for $x \leq 0$, har vi globalt maks i $(0, 1)$, siden $\frac{e^x - 1}{x}$ aldri skjærer x-aksen.

Lokalt min i $[0, -1)$.

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-1}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{x}{2}+1 & ,x\le 0\end{cases}$$

Kasper Melheim

Finne horisontal asymptote:

$\dfrac{e^{-x}-1}{x} \Rightarrow x$ går mot uendelig

$\dfrac{e^{-x}}{x} \Rightarrow$ vil gå mot 0.

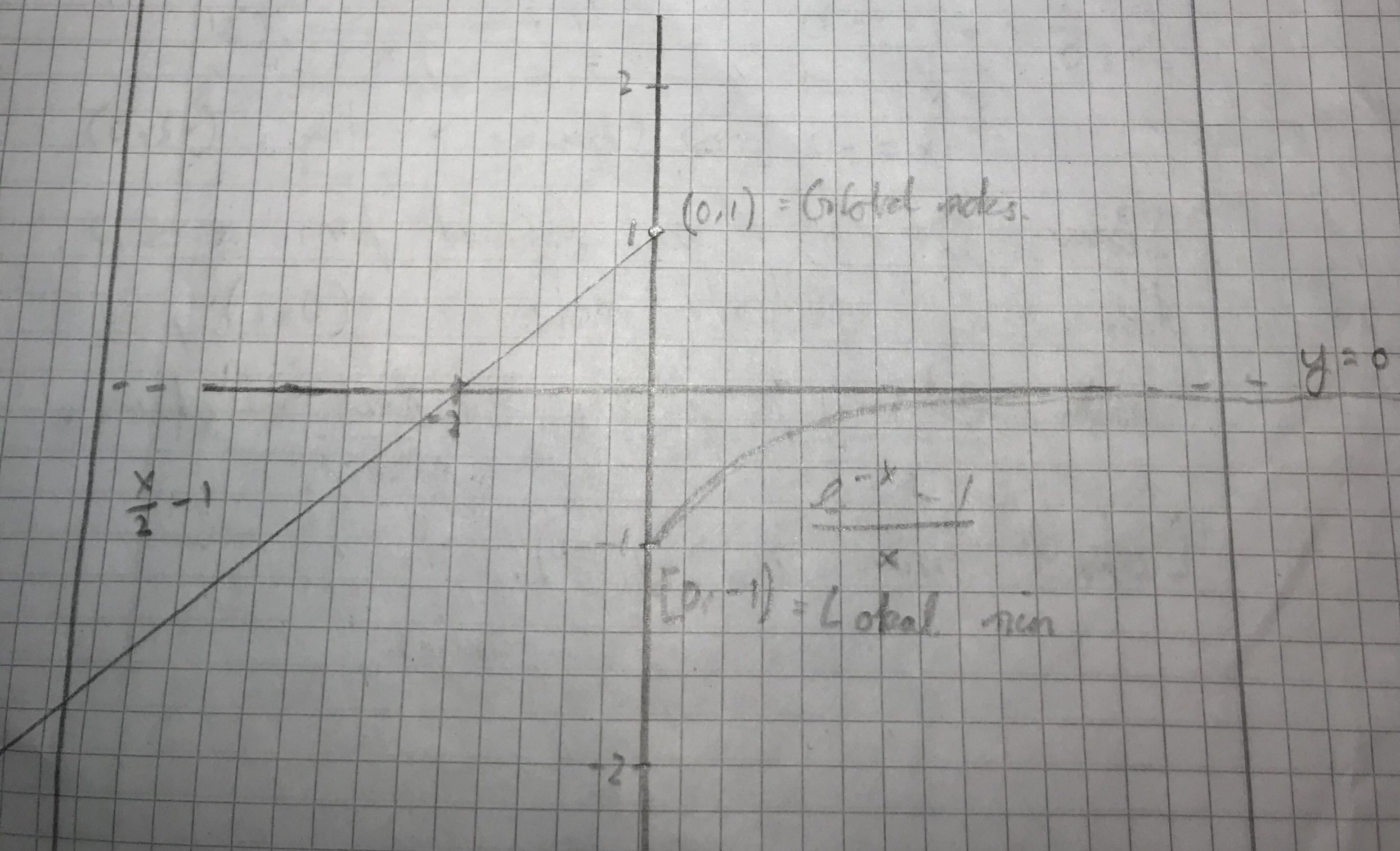
Horisontal asymptote i $y=0$.

Vertikal asymptote:

$\dfrac{e^{-x}-1}{x} \Rightarrow x=0$

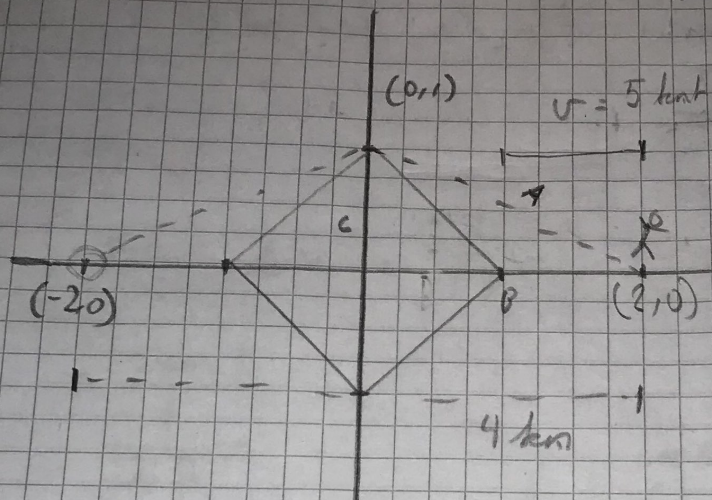
$e^{-x}-1 = e^{-0}-1 = 0$

x må vere større enn 0,
har derfor ikkje vertikal asymptote.



Kasper Meltheim

3 $|x|+|y| = 1$ vil sjå ut som eit kvadrat vridd 45°. Donald står i (2,0), fengselet i (-2,0). Sjå teigning. $|y| = 1 - |x|$ går gjennom (1,0), (-1,0), (0,1) og (0,-1).



Generelt sett er ei rett linje raskeste veien å bevege seg i. Ser då på kor Donald kan holde same retning med minst mulig skifting utafor sumpen, for så inni sumpen.

Rett linje inni sump der han går i sump i (1,0):

$$\text{Tid}_{sump} = \frac{1\,(km)}{5\,(km/t)} + \frac{1\,(km)}{5\,(km/t)} + \frac{2\,(km)}{\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,(km/t)}$$

$$= 0{,}906 \text{ timer} = \underline{54{,}36 \text{ min}}$$

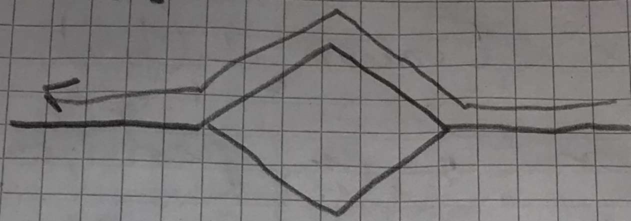
Hypotenus A lengd: $\sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\text{Tid}_{ute} = \frac{\sqrt{5}\,(km)}{5\,km/t} + \frac{\sqrt{5}\,(km)}{5\,(km/t)} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894 \text{ timer}$$

$= \underline{53{,}66 \text{ min}}$. Raskest utafor, går forbi (0,1) i sumpen.

Kasper Melheim

$Tid_{ute\,2}$ =



$$= \frac{1\,(km)}{5\,(km/t)} + \frac{1\,(km)}{5\,(km/t)} + \frac{\sqrt{2}\,(km)}{5\,(km/t)} + \frac{\sqrt{2}\,(km)}{5\,(km/t)}$$

$= 0{,}966$ timer $= \underline{57{,}94 \text{ min}}$

$Tid_{ute\,2}$ er <u>raskest</u>

OBLIG 3 Kasper M?lheim

4 La $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$

a $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$

$f(0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{0^2-1} = 1$

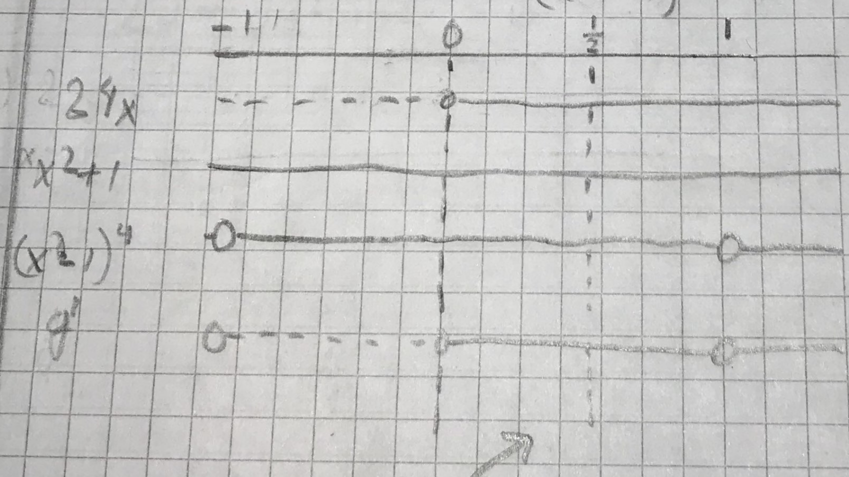
$f''(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f''(0) = \frac{2\cdot 0}{(0^2-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$

$P_2(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = \underline{\underline{x}}$

b Vis at f''' er strengt voksende på $(0, \frac{1}{2})$

$f'''(x) = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$ Set $= g(x)$

$g'(x)$ er da: $+\frac{24x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$



Ser at grafen er strengt voksende på intervallet $(0, \frac{1}{2})$.

4 b $f'''(x) = \frac{-2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$ Kasper Melheim

Taylors theorem (Teorem 12) gir at alle x i det åpne intervallet om 0 der f''' er definert, er differansen

$E_2(x) = f(x) - P_2(x)$

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!} x^3 = \frac{\frac{-2(3s^2+1)}{(s^2-1)^3}}{3!} x^3 = -\frac{3s^2+1}{3(s^2-1)^3} x^3$$

der s er mellom x og 0.

I vårt tilfelle $0 < s < x < \frac{1}{2}$

$s \in (0, \frac{1}{2})$

Vi setter $g(s) = -\frac{3s^2+1}{3(s^2-1)^3}$

Da er $g'(s) = \frac{4s(s^2+1)}{(s^2-1)^4}$

I intervallet $0 < s < \frac{1}{2}$ vil $4s$, (s^2+1) og $(s^2-1)^4$ alltid være positive.

$g(s)$ er ~~dsfs~~ strengt voksende på intervallet.

Dermed

$$g(0) < g(s) < g(\tfrac{1}{2})$$

$$g(0) = \frac{1}{3} < g(s) = \frac{-3s^2+1}{3(s^2-1)^3} < g(\tfrac{1}{2}) = \frac{112}{81}$$

Videre er $\frac{1}{3} x^3 < g(s) x^3 < \frac{112}{81} x^3$

$E_2(x) = f(x) - P_2(x)$, adderer derfor $P_2(x)$ i alle ledd og får:

$$P_2(x) + \frac{1}{3} x^3 < f(x) < P_2(x) + \frac{112}{81} x^3 \quad i \ (0, \tfrac{1}{2})$$

4c Vi veit frå a) at Kasper Medhus

$P_2(x) = x$

Setter dette inn i det vi fant i b):

$$x + \frac{1}{3}x^3 < f(x) < x + \frac{112}{81}x^3$$

Setter inn $x = \frac{1}{3}$ og får:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} < f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3} + \frac{112}{81} \cdot \frac{1}{3^3}$$

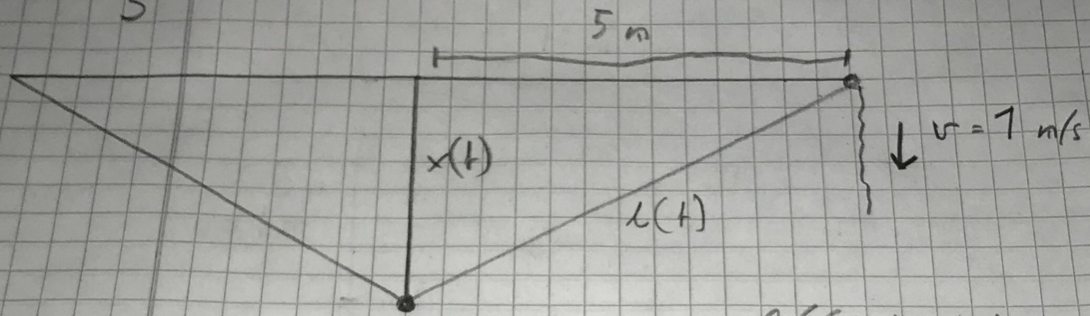
$$\Rightarrow \frac{28}{81} < f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{841}{2187}$$

Da er $f\left(\frac{1}{3}\right) \in \left(\frac{28}{81}, \frac{841}{2187}\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) \in (0{,}345679012\overline{3}, 0{,}38454503\overline{89})$$

Kasper Melheim

5



$x(t_0) = 3$, da er $l'(t_0) = 1$ m/s

Finn $x'(t_0)$:

$$l(t) = 2\sqrt{5^2 + x(t)^2}$$

$$l'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5^2 + x(t)^2}} \cdot 2x(t) \cdot x'(t)$$

$t = t_0$

$$1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5^2 + 3^2}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot x'(t_0)$$

$$1 = \frac{6}{\sqrt{34}} \cdot x'(t_0)$$

$$x'(t_0) = \frac{\sqrt{34}}{6} = \underline{\underline{0{,}97 \text{ m/s}}}$$