Kasper Melheim

MAT 111: OBLIGATORISK INNLEVERING 2

KASPER MELHEIM - GRUPPE 12

1

a l = lengd

s = breidde og tykkelse

$l + s + s \leq 90\,cm$ der $l \leq 60\,cm$

Finn største lovlige volum.

Volum $= V = l \cdot s^2$ og

$l = 90 - 2s$

$\Rightarrow V = s^2(90 - 2s) \Rightarrow V = 90s^2 - 2s^3$

$$\frac{dV}{ds} = 180s - 6s^2$$

$$6s^2 = 180s$$

$$6s = 180$$

$$s = \frac{180}{6} = \underline{30}$$

Bredde og tykkelse må da være $\underline{30\,cm}$

Lengda er då: $l = 90 - 2 \cdot 30 = \underline{30\,cm}$

$V = l\,s^2 = 30 \cdot 30^2 = \underline{\underline{27000\,cm^3}}$

<u>Største lovlige volumet er 27 L</u>

1 Kasper Melheim

b Vis at $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a-b|$

Bruker MVT:

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

Set $f(x) = \cos x$:

$$\cos'(c)(b-a) = \cos(b) - \cos(a)$$

$$\Rightarrow |\cos'(c)|\,|b-a| = |\cos(b) - \cos(a)|$$

Vi veit at $\cos'(c) = -\sin(c)$ ligg mellom -1 og 1 for alle c. Kan derfor skrive om til : Positiv siden absoluttverdi:

$$|\cos a - \cos b| \leq |a-b|$$

c $r > 1$ og $r \in \mathbb{R}$

Begrunn for at $x \geq -1$ er

$$(1+x)^r \geq 1 + rx$$

Set inn $x = -1$:

$$(1+(-1))^r \geq 1 + r \cdot (-1)$$

$$0 \geq 1 - r$$

$$-1 \geq -r \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{r \geq 1}$$

2 Kasper M[illegible]

a $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2 + \cos x$

$f'(x) = 6x^2 + 2x - 4 - \sin x$

$f''(x) = 12x + 2 - \cos x$

$f'''(x) = 12 + \sin x$

1 Vis at $f'''(x) > 0$ for alle x:

Vi veit at $-1 < \sin x < 1$.
Ser da at $f'''(x)$ vil være positiv for alle x.

2 Begrunn at $f''(x)$ har nøyaktig 1 nullpunkt:

$$\left.\begin{aligned} f''(-1) &< 0 \\ f''(1) &> 0 \end{aligned}\right\}$$ IVT sier det er minst 1 nullpunkt i $(-1, 1)$

Vi veit at $f'''(x) > 0$ for alle x.
Rolle's Theorem sier da:
Det finnes en c som at $f'''(x) = 0$.
Men $f'''(x)$ er større enn 0 for alle x og er strengt voksende

$\Rightarrow$ $f''(x)$ har kun et nullpunkt.

2 b

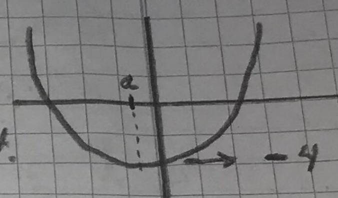
Kasper Melhus

Begrunn at $y = f'(x)$ er strengt avtagende på $(-\infty, a]$ og strengt voksende på $[a, \infty)$.

Veit at $f''(x)$ har nøyaktig 1 løsning i $f''(a) = 0$.

$f'(x) = 6x^2 - \sin x + 2x - 4$

Dersom påstanden stemmer ser det ut som at $f'(x)$ har bunnpunkt i a.



Om $f'(x) < 0$ i $(-\infty, a]$ er den strengt avtakende på intervallet.

Om $f'(x) > 0$ i $[a, \infty)$ er den strengt voksende i intervallet.

1 $(-\infty, a]$: Siden $x_1 < x_2$ og $f(x_2) < f(x_1)$ er $f'(x)$ strengt avtakende på intervallet.

$[a, \infty)$: Siden $x_1 < x_2$ og $f(x_2) > f(x_1)$ er $f'(x)$ strengt voksende på intervallet. | Def. 6 s. 140

2 Vis at $f'(x)$ har 2 nullpunkt b_1 og b_2 der $b_1 < x < b_2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) > 0 \\ f'(0) < 0 \\ f'(1) > 0 \end{array}\right\}$$ IVT gir eit nullpunkt i $(-1, 0)$ og eit i $(0, 1)$.

Vi veit $f'(x)$ stiger i $[a, \infty)$ og synker i $(-\infty, a]$. Derfor kun 2 løsninger.

Kasper Melheim

c Vis at $f(x)$ har nøyaktig 3 nullpunkt.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{array}\right\}$$

Nullpunkt i intervalla: $(-2,-1)$, $(-1,0)$ og $(1,2)$. IVT

$f'(x) = 6x^2 + 2x - 4 - \sin x$

$f'(x)$ er strengt voksende i $(2,1)$ og $(-1,-2)$. Derfor må det vere nøyaktig 3 nullpunkt for $f(x)$.

3 a Vis at $(x, y) = (0, 1)$ ligg på kurva: Kasper Melheim

$$(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$$

Venstre: $(x^2 + y^2 + x)^2 = (0^2 + 1^2 + 0)^2 = \underline{1}$

Høgre: $(x^2 + y^2) = 0^2 + 1^2 = \underline{1}$

Punktet ligg på kurva.

Implisitt derivasjon:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 + x)^2 = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2)$$

$$2(x^2 + y^2 + x) \cdot \left(2x + 2y\frac{dy}{dx} + 1\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

Derivate i punktet $(0, 1)$:

$$2(0^2 + 1^2 + 0) \cdot \left(2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx} + 1\right) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 4\frac{dy}{dx} + 2 = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = -1}} \Rightarrow y - 1 = -x$$

3 b $\quad (x(t)^2 + y(t)^2 + x(t))^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ Kasper Melheim

Set $t = t_0$ og vi har:

$x(t_0) = 0$

$y(t_0) = 1$

$x'(t_0) = 41$

$y'(t_0) = ?$

$$2(x(t_0)^2 + y(t_0)^2 + x(t_0)) \cdot (2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) + x'(t_0))$$

$$= 2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0)$$

Set inn verdier:

$$2(0^2 + 1^2 + 0^2)(2 \cdot 0 \cdot 41 + 2 \cdot 1 \cdot y'(t_0) + 41)$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot 41 + 2 \cdot 1 \cdot y'(t_0)$$

$$\Longrightarrow 4y'(t_0) + 82 = 2y'(t_0)$$

$$\Longrightarrow 2y'(t_0) = -82$$

$$\underline{y'(t_0) = -41} \quad \Longrightarrow \quad y - 1 = -41x$$

4 Kasper Melheim

a) La $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \tan x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (x) - \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (\tan x)$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} x = \underline{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \underline{-\infty}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \infty = \underline{\underline{-\infty}}$$

b) Begrunn at f^{-1} finnes i $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ser på den deriverte:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$f'(x) > 0$ på D_f siden $(\cos x)^2$ med $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ alltid er positiv.

f er strengt voksende, er 1-til-1 og har inverse f^{-1}!

4 c $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Kasper Melhein

Finn $(f^{-1})'(x)$ i $\frac{\pi}{4} - 1$.

$y = f^{-1}(x)$

$x = f(y)$

$x = y - \tan y$

$1 = \dfrac{d}{dx} f(y) = \dfrac{d}{dy} f(y) \dfrac{dy}{dx} = f'(y) \dfrac{dy}{dx}$

$= \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 y}\right) \dfrac{dy}{dx}$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\cos^2 y}}$

$f^{-1}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = y$

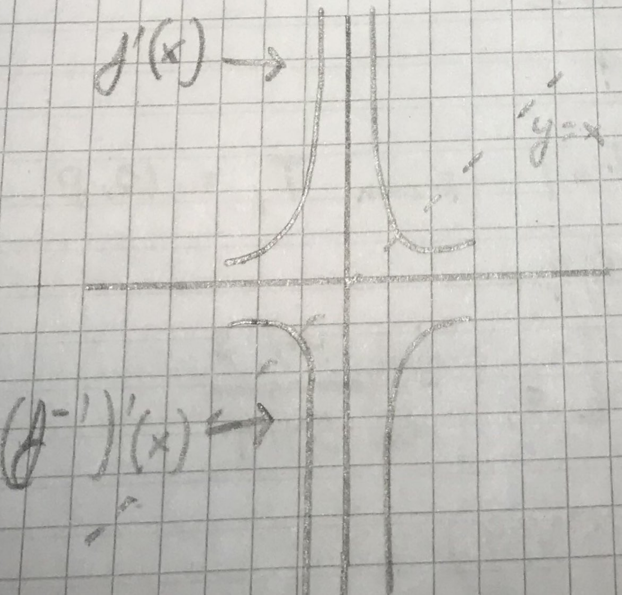
$f(y) = \frac{\pi}{4} - 1$

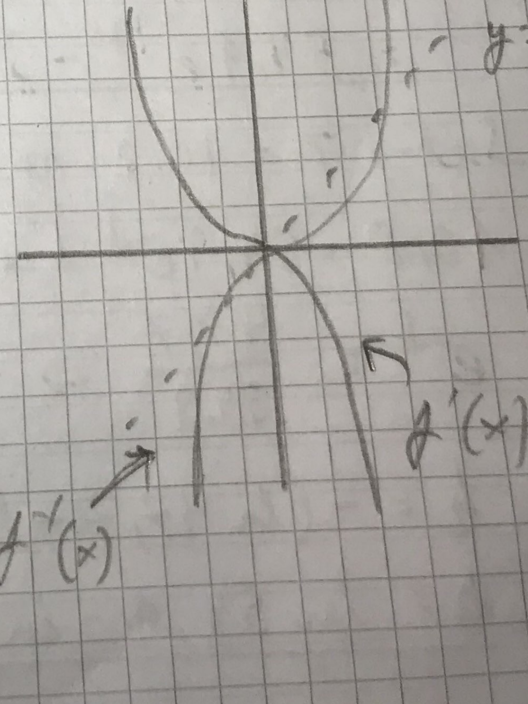
$\frac{\pi}{4} - 1 = y - \tan y$ | Vi veit at $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Så y må vere $\underline{\frac{\pi}{4}}$

$(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{1 - 2} = \underline{\underline{-1}}$

d





5

$T(0) = 18$ der $t = 0$

og $T(t)$ er temp med hensyn på tiden t.

$T_{ute} = -36{,}9°C \Rightarrow$ utetemp

$T_0 = 18°C \Rightarrow$ ved $t = 0$

$T_1 = 10{,}8°C \Rightarrow$ ved $t = 1$

Finn t når $T(t) = 0$:

Newton: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ute})$

$$\int \frac{dT}{T - T_{ute}} = -k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln(T - T_{ute}) = -kt + C$$

$$\Rightarrow T - T_{ute} = e^{-kt} \cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow \underline{T = e^{-kt} \cdot e^{C} + T_{ute}} \quad (1)$$

$T_0 = e^{-k \cdot 0} \cdot e^{C} + T_{ute} = 18$ kan vi skrive om til: $e^{C} = T_0 - T_{ute}$. Set inn i 1

$$T = e^{-kt}(T_0 - T_{ute}) + T_{ute}$$

$$T = -36{,}9 + (18 + 36{,}9)e^{-kt}$$

$$= \underline{54{,}9 e^{-kt} - 36{,}9}$$

Set $T = 10{,}8$ og $t = 1$ siden $T_1 = 10{,}8$

$$10{,}8 = 54{,}9 e^{-k \cdot 1} - 36{,}9$$

$$e^{-k} = \frac{47{,}7}{54{,}9} \Rightarrow -k = \frac{\ln 47{,}7}{\ln 54{,}9}$$

$$k = -(\ln 47{,}7 - \ln 54{,}9)$$

$$\underline{k = \ln 54{,}9 - \ln 47{,}7}$$

Kasper Melheim

$$T = 54{,}9\, e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} - 36{,}9$$

Finn t når $T(t) = 0$:

$$54{,}9\, e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} - 36{,}9 = 0$$

$$e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} = \frac{36{,}9}{54{,}9}$$

$$-t \cdot (\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7) = \ln 36{,}9 - \ln 54{,}9$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 54{,}9 - \ln 36{,}9}{\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t = 2{,}83}}$$

Vatnet begynner å fryse den 1. januar 2000 <u>kl 02.50</u>