

MAT 111: ODLIG 3

Kasper Melhus

1 KASPER MELHEIM - GR.12
 $g(x) = 12x + 4 - \cos x$, $g'(x) = 12 + \sin x$

Veit at $g(x) = 0$ har én løsning
 for $x = b$ i intervallet $(1, 2, 0)$

a $x_0 = 0$

$b < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0 = 0$

Newton's metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_1 = 0 - \frac{12 \cdot 0 + 4 - \cos 0}{12 + \sin 0} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$$x_2 = -0,25 - \frac{12 \cdot (-0,25) + 4 - \cos(-0,25)}{12 + \sin(-0,25)} = -0,2526451669$$

$$x_3 = x_2 - \frac{12 \cdot x_2 + 4 - \cos(x_2)}{12 + \sin(x_2)} = -0,2526454553$$

$$x_4 = -0,2526454553$$

Ut: få verdiane vi har fått ser vi
 at ikke stemmer

$$b < \dots < x_3 < x_2 < \dots < x_1 < x_0 = 0$$

$$b < \dots < -0,25264545 < -0,2526451669 < \dots < -0,25 < 0 = 0$$

Ser at $x \approx -0,2526454553 = b$

b $x_2 - b < 0,0000003$

Brukte feourn 2 s. 229 og finner inn
 verdiene vi tok i 1a):

$$-0,2526451669 - (-0,2526454553) < 0,0000003$$

$$0,0000002339 < 0,0000003$$

Skjønning

$$g(x) = 12x + 4 - \cos x \quad \text{Kasper Melheim}$$

$$g'(x) = 12 + \sin x$$

$$12x + 4 = \cos x$$

$$12x = \cos x - 4$$

$$x = \frac{\cos x - 4}{12} \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x - 4}{12}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{\cos 0 - 4}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{\cos(-\frac{1}{4}) - 4}{12} = -0,2525406315$$

$$x_3 = f(x_2) = \frac{\cos(x_2) - 4}{12} = -0,2526447135$$

Newton's metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = -0,252645169$$

$$x_3 = -0,2526454553$$

Ser her at begge metodene neregne seg inn mot roten, men Newtons metode er tydelig mer effektiv.

Sjekker om $f(-0,25265)$ og $f(-0,25264)$
finner rettige fortellige fortegn:

$$f(-0,25265) < 0$$

$$f(-0,25264) > 0$$

Ser da at $b \approx -0,252645$ kan være et bra løsning.

2

Kasper Melheim

$$a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Vi veit at $e^x > 0$ for alle x .

Sjølver om vi kan bruke l'Hôpital:

$$f(x) = e^x - 1 - x, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = x^2, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$g'(x) = 2x \neq 0$ på intervallet

$$(0, 1), 0 < x < 1$$

↑ Faks.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \text{ gir } \left[\frac{0}{0} \right].$$

l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \text{ gir fortsatt } \left[\frac{0}{0} \right].$$

l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}$$

b) Finnes det reelle tall a og b
 s.t.

$$f(x) \begin{cases} \frac{e^{ax+b}-1}{x}, & x > 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

er derivatan? Finn a og b.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax+b}-1}{x} = \frac{e^b - 1}{0} = \infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{ah+b} - 1}{h} = 0 \stackrel{l'H}{=} \frac{e^{ah+b} \cdot (ah+b)}{1}$$

$$= e^{ah+b} \cdot a = \underline{\underline{e^b \cdot a}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{h}{2} + 1}{h} = \frac{\frac{1}{2}}{0} = \frac{1}{2}$$

$e^b \cdot a \neq \frac{1}{2}$ er $f(x)$ ikke derivatan i $x =$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}(e^x - x - 1)}{x^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

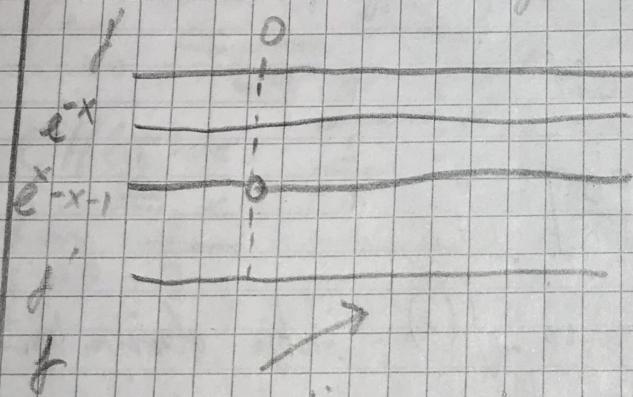
$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ for alle } x \leq 0$$

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{e^{-x}(e^x - x - 1)}{x^2}} \\ \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' &= \frac{-e^{-x} \cdot x - (e^{-x} - 1) \cdot 1}{x^2} \\ \frac{-x e^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$e^{-x}(e^x - x - 1) = 0 \quad x > 0$$

$$e^x - x - 1 > 0 \quad \text{for } x > 0$$

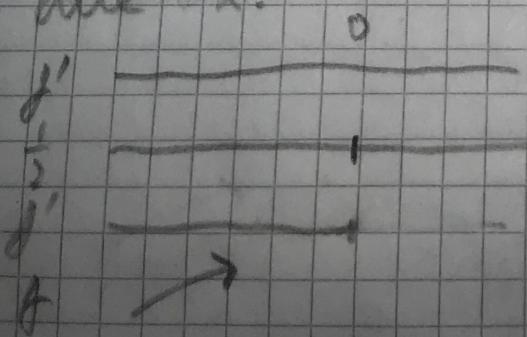
$$e^{-x} > 0 \quad \text{for } x > 0$$



Så f stiger for alle $x \in (0, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}, \quad x \leq 0$$

Se at $f'(x) = \frac{1}{2}$ er positiv for alle
alle x .



Så f stiger på $(-\infty, 0]$. Kjeg-Melkum

Grafen f er da strengt
voksende på $(-\infty, 0]$ og $(0, \infty)$.

Kan da si at f er
strengt voksende for alle x .

d) Siden f strengt voksende for alle
 x .

$\frac{x}{2} + 1$ har vi skriva om til

$\frac{1}{2}x + 1$. Da har vi den på formen
 $ax + b$, altså likning for en rett
lijn. Viit desfor at denne vil
stige y -aksen i 1, og altid være
stigende.

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = -2 \Rightarrow \text{Skjærer } y\text{-aksen i } (-2, 0).$$

Siden $\frac{1}{2}x + 1$ er definert for $x \leq 0$,
har vi globalt mao i $(0, 1)$,

siden $\frac{e^x - 1}{x}$ aldor stiger x -aksen.

Lokalt min i $[0, -)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x}, & x > 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Kasper Mikkelsen}$$

Fina horisontal asymptote:

$$\frac{e^{-x}-1}{x} \Rightarrow x \text{ gör mat oändlig}$$

$$\frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow \text{vil gå mot } 0.$$

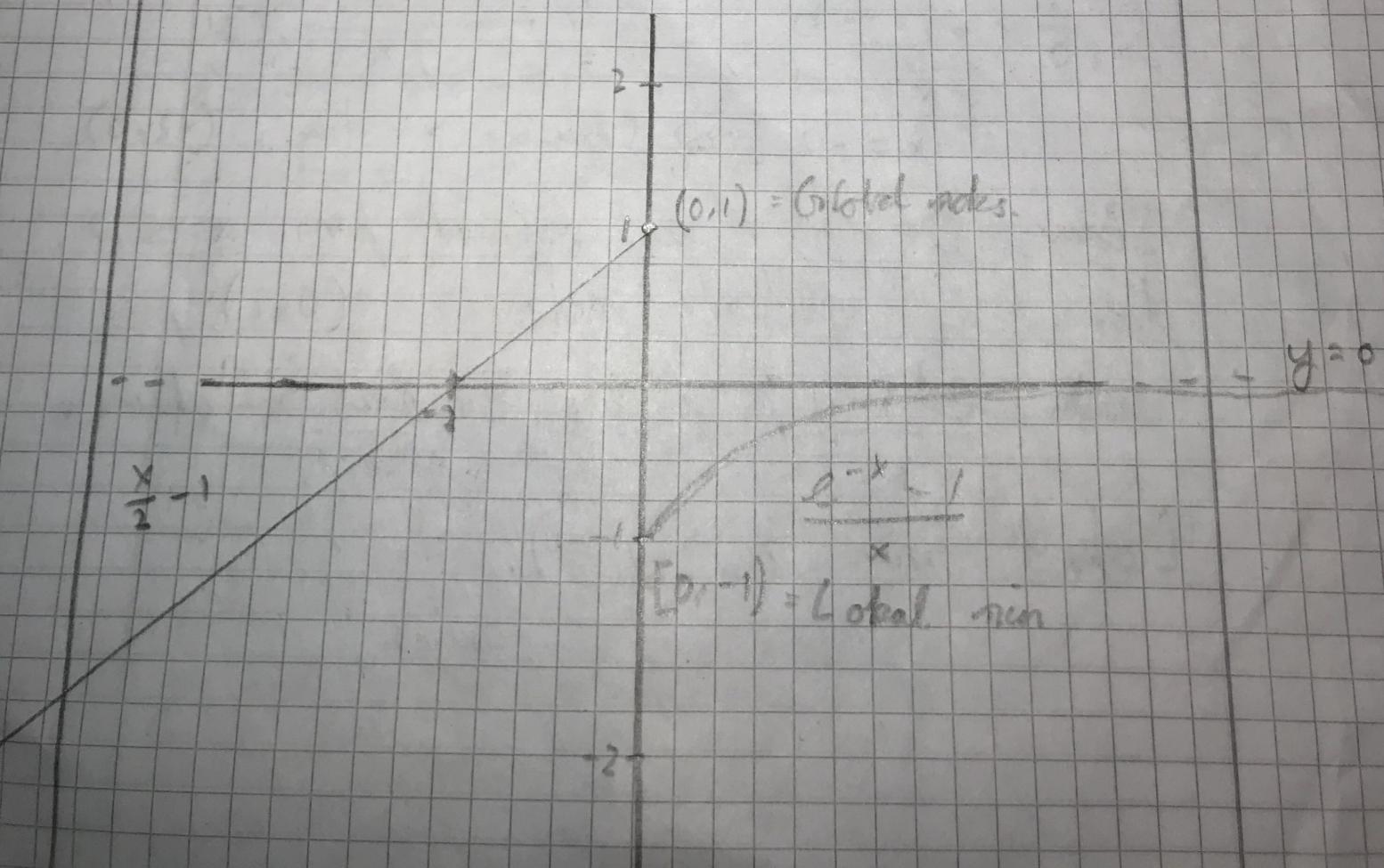
Horisontal asymptote: $y = 0$.

Vertikal asymptote:

$$\frac{e^{-x}-1}{x} \Rightarrow x = 0$$

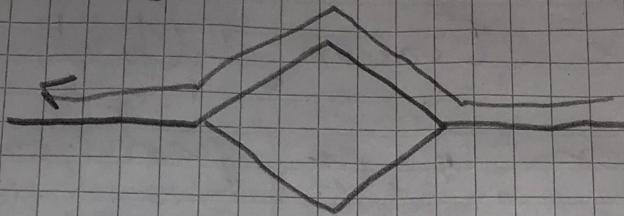
$$e^{-x} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

x måste växa ifrån ena 0 ,
hur detta blir vertikal asymptot.



Kasper Melhuis

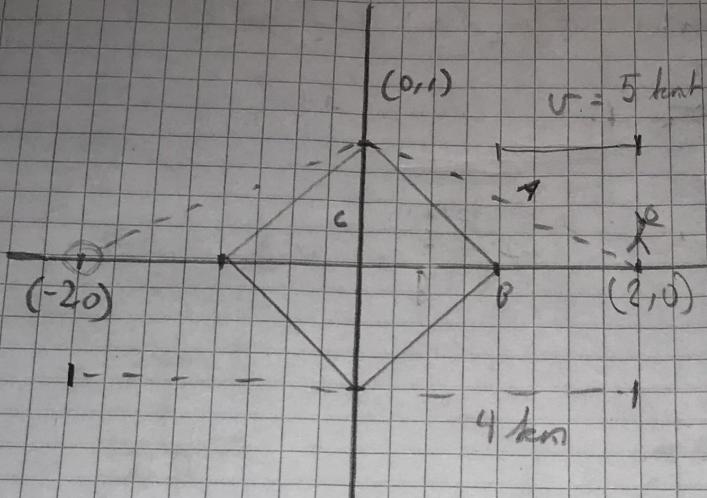
Tid uke 2 =



$$= \frac{1 \text{ (km)}}{5 \text{ (km/t)}} + \frac{1 \text{ (km)}}{5 \text{ (km/t)}} + \frac{\sqrt{2} \text{ (km)}}{5 \text{ (km/t)}} + \frac{\sqrt{2} \text{ (km)}}{5 \text{ (km/t)}}$$
$$= 0,966 \text{ times} = \underline{57,94 \text{ min}}$$

Tid uke 1 er raskest

3 $|x| + |y| = 1$ vil si ja ut i en et kvadrat avvidd 45° . Donald står i $(2,0)$, fengslet i $(-2,0)$.
 Sjå tegning. $|y| = 1 - |x|$ går gjennom $(1,0), (-1,0), (0,1)$ og $(0,-1)$.



Gjennomt sett er ei rett linje raskeste veien å bevege seg i. Se da på kor Donald kan holde samme hastighet med mindre mulig skifting utover sumpen, for så inni sumpen.

Rett linje inni sump da han går i sump i $(1,0)$:

$$\text{Tid}_{\text{sump}} = \frac{1(\text{km})}{5(\text{km}/\text{t})} + \frac{1(\text{km})}{5(\text{km}/\text{t})} + \frac{2(\text{km})}{\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(\text{km}/\text{t})}$$

$$= 0,906 \text{ time} = \underline{\underline{54,36 \text{ min}}}$$

$$\text{Hypotenus A lengd: } \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\text{Tid}_w = \frac{\sqrt{8}(\text{km})}{5(\text{km}/\text{t})} + \frac{\sqrt{5}(\text{km})}{5(\text{km}/\text{t})} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,894 \text{ time}$$

= 53,66 min. Raskest utover, går fort i $(0,1)$ i sumpen.

4

$$\text{La } f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x \in (-1, 1)$$

$$a) P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{0^2-1} = 1$$

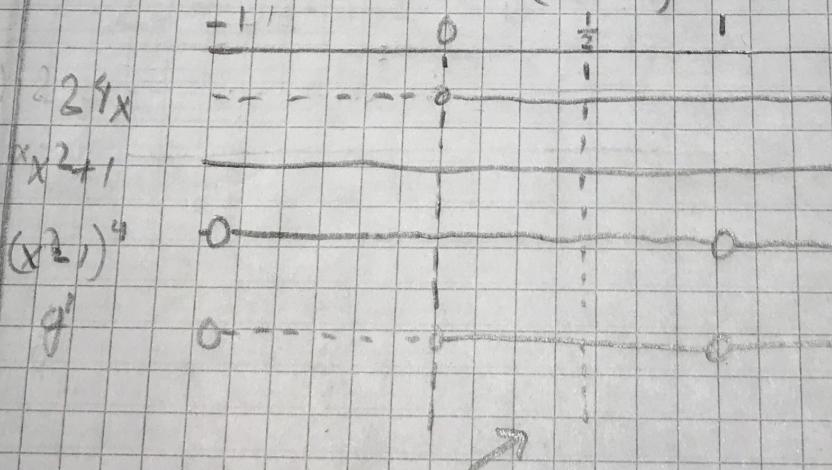
$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f''(0) = \frac{2 \cdot 0}{(0^2-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$P_2(x) = 0 + 1 \cdot (x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 = x$$

b) Vis at f''' er streng voksende på $(0, \frac{1}{2})$

$$f'''(x) = -\frac{2(3x^3+1)}{(x^2-1)^3} \quad \text{Set } g(x)$$

$$g'(x) \text{ da: } + \frac{3 \cdot 4x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$



Ser at grafen er streng voksende
på intervallet $(0, \frac{1}{2})$.

$$f''(x) = \frac{-2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \quad \text{Kasper Melhreim}$$

Taylors theorem (Teorem 12) gir at alle x i det åpne intervallet om 0 der f''' er definert, er differansen

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!} x^3 = \frac{-2(3s^2+1)}{(s^2-1)^3} x^3 = -\frac{3s^2+1}{3(s^2-1)^3} x^3$$

der s er mellom x og 0.

I vært tilfeldig $0 < s < x < \frac{1}{2}$
 $s \in (0, \frac{1}{2})$

$$\text{Vi setter } g(s) = -\frac{3s^2+1}{3(s^2-1)^3}$$

$$\text{Da er } g'(s) = \frac{4s(s^2+1)}{(s^2-1)^4}$$

I intervallet $0 < s < \frac{1}{2}$ vil $4s$, (s^2+1) og $(s^2-1)^4$ alltid være positive.

$g(s)$ er difor stengt voksende på intervallet.

Derned

$$g(0) < g(s) < g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(0) = \frac{1}{3} < g(s) = \frac{-3s^2+1}{3(s^2-1)^3} < g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{113}{81}$$

Videre er

$$\frac{1}{3}x^3 < g(s)x^3 < \frac{113}{81}x^3$$

$E_2(x) = f(x) - P_2(x)$, adderer difor $P_2(x)$ i alle ledd og

$$\text{før: } P_2(x) + \frac{1}{3}x^3 < f(x) < P_2(x) + \frac{113}{81}x^3 \quad i (0, \frac{1}{2})$$

4c

Ved veit på a) at

Kasper Molthi

$$P_2(x) = x$$

Setter dette inn i det vi fant
i b):

$$x + \frac{1}{3}x^3 < f(x) < x + \frac{112}{81}x^3$$

Setter inn $x = \frac{1}{3}$ og får:

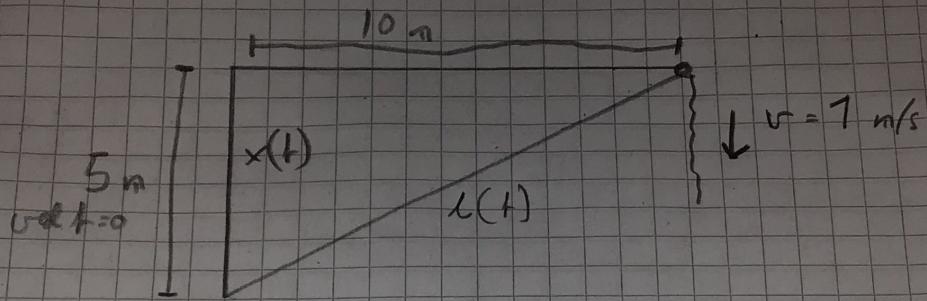
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} < f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3} + \frac{112}{81} \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$\Rightarrow \frac{28}{81} < f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{841}{2187}$$

$$\text{Da er } f\left(\frac{1}{3}\right) \in \left(\frac{28}{81}, \frac{841}{2187}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) \in (0,3456790123, 0,3845450389)$$

5



$$l(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 10^2}$$

$$l(0) = \sqrt{x(0)^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5} = 11,18 \text{ m}$$

$$l(t_0) = \sqrt{(x(t_0))^2 + 10^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = 10,44 \text{ m}$$

Hva er farten ved t_0 ?

$$x(t_0) = 3, \text{ da er } l'(t_0) = 1 \text{ m/s}$$

Finn $x'(t_0)$:

$$l(t) = 2\sqrt{10^2 + x(t)^2}$$

$$l'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^2 + x(t)^2}} \cdot 2x(t) \cdot x'(t)$$

$$t = t_0$$

$$1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^2 + 3^2}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot x'(t_0)$$

$$1 = \frac{6}{\sqrt{109}} \cdot x'(t_0)$$

$$x'(t_0) = \frac{\sqrt{109}}{6} = 1,79 \text{ m/s}$$