SMD-Abgabe

9. Übungsblatt

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Julia Sobolewski
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Jannine Salewski
jannine.salewski@tu-dortmund.de

Abgabe: 20.12.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

SMD-Blatt 9

Aufgabe 26 Stichprobenvarianz

a) $E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$

$= \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$

b) $E((\bar{x}-\mu)^2) = Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$= E(\bar{x}^2) - E^2(\bar{x})$

$= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2$

$= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - \mu^2$

c) $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) = E\left(\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$

$= \frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ $\rightarrow$ unverzerrt

d) $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2\right)$

$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)^2 - 2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2\right)\right)$

$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right)$

$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2n(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu) + n(\bar{X}-\mu)^2\right)$

$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)$

$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - n\cdot E(\bar{X}-\mu)^2\right.$

$= \frac{1}{n}(Var(X_i) - n\cdot Var(\bar{X}))$

$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ $\rightarrow$ verzerrt

Korrektur: $S_1'^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

SMD - Übungsblatt 9

Aufgabe 27

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & , 0 \le x \le b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

a)

$$L(b|x_1,\dots,x_n) = \prod_i^n f(x_i, b) = \begin{cases} 1/b^n & , 0 \le x_1,\dots,x_n \le b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$L(b|x_1,\dots,x_n)$ ist monoton fallend $\longrightarrow$ kein Maximum $\longrightarrow$ $\hat{b} = \max(x_1,\dots,x_n)$ //

b) Da b häufig unterschätzt aber nie überschätzt wird gilt: $E(\hat{b}) < b$

Dementsprechend ist dieser Schätzer nicht Erwartungstreu.

Im Mittel sind die Abstände zw. den Stichprobenwerten gleich.
Bei einem sortierten Datensatz ergibt sich dadurch:

$$\hat{b} - a_n = \frac{1}{n}\left(a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1})\right) = \frac{1}{n} a_n$$

$$\Leftrightarrow \hat{b} = \frac{n+1}{n} a_n$$

Für unseren Datensatz bedeutet dies:

$$\hat{b} = \frac{n+1}{n} \max(x_1, \dots, x_n)$$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu.