

Vorlesung

Statistische Methoden der Datenanalyse

Prof. Dr. Dr. Wolfgang Rhode

Transformationen und Fehlerfortpflanzung

Überblick

- Transformation einer Zufallsvariablen
- Transformation von Erwartungswert und Varianz
- Transformation mehrerer Zufallsvariablen

Motivation

- Wir können meist die Größe von Interesse nicht direkt messen
- Größen, die wir messen sind mit Unsicherheiten behaftet

Beispiel:

- Wir messen $x = 2 \pm 0.1$ sind aber an $y = x^2$ interessiert

$$y = 4 \pm ??$$

Wie sieht das für komplexere Zusammenhänge (Mehr Variablen / Korrelation) aus?

Transformation einer Zufallsvariablen

- Gegeben: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x)$
- Transformation $y = g(x)$
- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_y(y)$
- Lösung:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Herleitung: <http://math.arizona.edu/~jwatkins/f-transform.pdf>

Beispiel 1

$$y = g(x) = \log(x)$$

$$g^{-1}(y) = \exp(y)$$

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \exp(y)$$

$$f_y(y) = f_x(\exp(y)) \cdot \exp(y)$$

Transformation des Erwartungswertes

Transformation des Erwartungswertes

Gesucht: $\langle y \rangle = \langle g(x) \rangle$

Einfacher Fall: Lineare Abhängigkeit

$$g(x) = m \cdot x + b$$

Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$\langle y \rangle = \langle m \cdot x + b \rangle = m \cdot \langle x \rangle + b = g(\langle x \rangle)$$

Transformation des Erwartungswertes

- Kompliziert bei Nichtlinearität
- Zur Erinnerung:

$$\langle g(x) \rangle = \int g(x) f(x) dx$$

- Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $\langle x \rangle$:

$$g(x) = g(\langle x \rangle) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle)^2 + \dots$$

Transformation des Erwartungswertes

- Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $\langle x \rangle$:

$$g(x) = g(\langle x \rangle) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \langle g(x) \rangle = g(\langle x \rangle) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\langle x \rangle} \underbrace{\langle (x - \langle x \rangle) \rangle}_{=0 \text{ nach Definition}} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=\langle x \rangle} \underbrace{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}_{=\sigma_x^2} + \dots$$

- Vereinfacht in zweiter bzw. nullter Ordnung:

$$\begin{aligned} \langle g(x) \rangle &\approx g(\langle x \rangle) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{d^2g}{dx^2}(\langle x \rangle) \\ \langle g(x) \rangle &\approx g(\langle x \rangle) \end{aligned}$$

Transformation der Varianz

Transformation der Varianz

Mit den Taylor-Näherungen bis zur zweiten Ordnung von oben:

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(x)] &= \langle (g(x) - \langle g(x) \rangle)^2 \rangle \\ &= \left\langle \left(g(\langle x \rangle) + g'(\langle x \rangle)(x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2} g''(\langle x \rangle)(x - \langle x \rangle)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g(\langle x \rangle) + \frac{1}{2} g''(\langle x \rangle)(x - \langle x \rangle)^2 \right)^2 \right\rangle \\ &= g'(\langle x \rangle)^2 \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \\ &= g'(\langle x \rangle)^2 \text{Var}[x] \end{aligned}$$

Beispiel

- Lineare Transformation

$$\begin{aligned} y = ax + b &\Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \\ \Rightarrow f_y(y) &= \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y - b}{a}\right) \\ \Rightarrow E[y] &= a \cdot E[x] + b \\ \langle y \rangle &= a \cdot \langle x \rangle + b \\ \Rightarrow V[y] &= E[(y - \langle y \rangle)^2] \\ &= y'(E[x])^2 V[x] = a^2 \cdot V[x] \end{aligned}$$

Transformation mehrerer Variablen

- Einfacher Fall: Lineare Transformation $\vec{y} = B\vec{x}$
- Erwartungswert: $\langle \vec{y} \rangle = E[\vec{y}] = E[B\vec{x}] = B \cdot E[\vec{x}] = B \cdot \langle \vec{x} \rangle$
- Varianz:
$$\begin{aligned} V[\vec{y}] &= E[(\vec{y} - \langle \vec{y} \rangle)(\vec{y} - \langle \vec{y} \rangle)^T] \\ &= E[(B\vec{x} - B\langle \vec{x} \rangle)(B\vec{x} - B\langle \vec{x} \rangle)^T] \\ &= E[B(\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)(\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)^T B^T] \\ &= BE[(\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)(\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)^T]B^T \\ &= BV[\vec{x}]B^T \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

Prof. Dr. Dr. W. Rhode

Fehlerfortpflanzung

Statistische Methoden
der Datenanalyse

Transformation mehrerer Variablen

$$V[\vec{y}] = BV[\vec{x}]B^T$$



Prof. Dr. Dr. W. Rhode

Fehlerfortpflanzung

Statistische Methoden
der Datenanalyse

Transformation mehrerer Variablen: allgemein

$$\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$$

- Fallunterscheidung:

$$\dim(\vec{y}) = \dim(\vec{x})$$

$$\dim(\vec{y}) \neq \dim(\vec{x})$$

Prof. Dr. Dr. W. Rhode

Fehlerfortpflanzung

Statistische Methoden
der Datenanalyse

Transformation mehrerer Variablen

- Für den Fall $\dim(\vec{y}) = \dim(\vec{x})$ kann analog zum Fall mit einer Variable noch eine Wahrscheinlichkeitsdichte angegeben werden:

$$f_x(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = f_y(\vec{y}) dy_1 \dots dy_n$$

$$\Rightarrow f_y(\vec{y}) = f_x(\vec{x}) \cdot \mathcal{J} \left(\frac{x}{y} \right),$$

$$\mathcal{J} \left(\frac{x}{y} \right) = \left| \frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n} \right|$$

Transformation mehrerer Variablen

- Fall: $\dim(\vec{y}) \neq \dim(\vec{x})$
- Berechne Näherung für die Kovarianzmatrix
- Wir führen eine Taylor-Näherung erster Ordnung für ein Element des Vektors durch:

$$y_i = g_i(\langle \vec{x} \rangle) + \sum_{k=1}^n \left((x_k - \langle x_k \rangle) \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \langle x_k \rangle} \right)$$

Transformation mehrerer Variablen

$$V_{pq}[\vec{y}] = \langle (y_p - \langle y_p \rangle) \cdot (y_q - \langle y_q \rangle) \rangle$$

$$\approx \left\langle \sum_{k=1}^n \left((x_k - \langle x_k \rangle) \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \langle x_k \rangle} \right) \sum_{j=1}^n \left((x_j - \langle x_j \rangle) \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \Big|_{x_j = \langle x_j \rangle} \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k,j} (x_k - \langle x_k \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \langle x_k \rangle} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \Big|_{x_j = \langle x_j \rangle} \right\rangle$$

Die letzte Gleichung lässt sich mit einer Matrixmultiplikation identifizieren:

$$V[\vec{y}] = \mathbf{J} V[\vec{x}] \mathbf{J}^T$$

Wobei \mathbf{J} die Jacobi-Matrix ist.

Transformation mehrerer Variablen

JacoBi-Matrix: $V[\vec{y}] = \mathbf{B} V[\vec{x}] \mathbf{B}^T$



Transformation mehrerer Variablen

- Oft (z.B. im Praktikum) wird Gauß'sche Fehlerfortpflanzung folgendermaßen angegeben:

$$y = x_1 + x_2$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \sigma_{x_2}\right)^2}$$

- Achtung! Dies gilt nur bei **unkorrelierten** Zufallsvariablen!
- Allgemein gilt (Ausmultiplikation der Matrixgleichung für 1d y):

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i}\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) \cdot \text{cov}(x_i, x_k)}$$

Transformation mehrerer Variablen

- Spezialfall:

Keine Korrelationen in $\vec{x} \Rightarrow V[\vec{x}]$ ist diagonal, mit

$$V_{ii} = \sigma_{y_i}^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)^2 V[x_k]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Merke: \vec{y} sind im Allgemeinen auch dann korreliert, wenn \vec{x} nicht korreliert sind.

Transformation mehrerer Variablen

Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$\vec{y} = B\vec{x}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Transformation mehrerer Variablen

Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$V[\vec{x}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_1, x_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$V[\vec{y}] = BV[\vec{x}]B^T$$

$$V_{11} = \sigma_{y_1}^2 = \cos^2 \theta \sigma_1^2 + \sin^2 \theta \sigma_2^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \text{cov}(x_1, x_2)$$

$$V_{22} = \sigma_{y_2}^2 = \cos^2 \theta \sigma_2^2 + \sin^2 \theta \sigma_1^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \text{cov}(x_1, x_2)$$

$$\text{cov}(y_1, y_2) = V_{12} = V_{21} = \sin \theta \cos \theta (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \text{cov}(x_1, x_2)$$

Transformation mehrerer Variablen

- Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$\text{cov}(y_1, y_2) = 0, \text{ wenn: } \tan 2\theta = 2 \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

- Transformation in spezielles Koordinatensystem möglich, wo die Zufallsvariablen unkorreliert sind!