technische universität
dortmund

Experimentelle Physik Vb
Astroteilchenphysik

Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse
Prof. Dr. Dr. Wolfgang Rhode

Transformationen und Fehlerfortpflanzung

Motivation

- Wir können meist die Größe von Interesse nicht direkt messen
- Größen, die wir messen sind mit Unsicherheiten behaftet

Beispiel:

- Wir messen $x = 2 \pm 0.1$ sind aber an $y = x^2$ interessiert

$$y = 4 \pm ??$$

Wie sieht das für komplexere Zusammenhänge (Mehr Variablen / Korrelation) aus?

Überblick

- Transformation einer Zufallsvariablen
- Transformation von Erwartungswert und Varianz
- Transformation mehrerer Zufallsvariablen

Transformation einer Zufallsvariablen

- Gegeben: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x)$
- Transformation $y = g(x)$
- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_y(y)$
- Lösung:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) \right|$$

Herleitung: http://math.arizona.edu/~jwatkins/f-transform.pdf

Beispiel 1

$$
\begin{aligned}
y = g(x) &= \log(x) \\
g^{-1}(y) &= \exp(y) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) &= \exp(y) \\
f_y(y) &= f_x(\exp(y)) \cdot \exp(y)
\end{aligned}
$$

Transformation des Erwartungswertes

Transformation des Erwartungswertes

Gesucht: $\langle y \rangle = \langle g(x) \rangle$

Einfacher Fall: Lineare Abhängigkeit

$$g(x) = m \cdot x + b$$

Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$\langle y \rangle = \langle m \cdot x + b \rangle = m \cdot \langle x \rangle + b = g(\langle x \rangle)$$

Transformation des Erwartungswertes

- Kompliziert bei Nichtlinearität
- Zur Erinnerung:

$$\langle g(x) \rangle = \int g(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

- Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $\langle x \rangle$:

$$g(x) = g(\langle x \rangle) + \left. \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2} \left. \frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=\langle x \rangle} (x - \langle x \rangle)^2 + \ldots$$

Transformation des Erwartungswertes

- Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $\langle x\rangle$:

$$g(x) = g(\langle x\rangle) + \left.\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\langle x\rangle}(x-\langle x\rangle) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\langle x\rangle}(x-\langle x\rangle)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \langle g(x)\rangle = g(\langle x\rangle) + \left.\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\langle x\rangle}\underbrace{\langle(x-\langle x\rangle)\rangle}_{=0 \text{ nach Definition}} + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\langle x\rangle}\underbrace{\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle}_{=\sigma_x^2} + \ldots$$

- Vereinfacht in zweiter bzw. nullter Ordnung:

$$\langle g(x)\rangle \approx g(\langle x\rangle) + \frac{1}{2}\sigma_x^2\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(\langle x\rangle)$$
$$\langle g(x)\rangle \approx g(\langle x\rangle)$$

Transformation der Varianz

Transformation der Varianz

Mit den Taylor-Näherungen bis zur zweiten Ordnung von oben:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g(x)] &= \left\langle \left(g(x) - \langle g(x)\rangle\right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(g(\langle x\rangle) + g'(\langle x\rangle)(x - \langle x\rangle) + \frac{1}{2} g''(\langle x\rangle)(x - \langle x\rangle)^2 \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \; g(\langle x\rangle) + \frac{1}{2} g''(\langle x\rangle)(x - \langle x\rangle)^2 \right)^2 \right\rangle \\
&= g'(\langle x\rangle)^2 \left\langle (x - \langle x\rangle)^2 \right\rangle \\
&= g'(\langle x\rangle)^2 \, \mathrm{Var}[x]
\end{aligned}
$$

Beispiel

- Lineare Transformation

$$y = ax + b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Rightarrow f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow E[y] = a \cdot E[x] + b$$

$$\langle y \rangle = a \cdot \langle x \rangle + b$$

$$\Rightarrow V[y] = E\left[(y - \langle y \rangle)^2\right]$$

$$= y'(E[x])^2 V[x] = a^2 \cdot V[x]$$

Transformation der mehrerer Variablen

Transformation mehrerer Variablen

- Einfacher Fall: Lineare Transformation $\vec{y} = B\vec{x}$
- Erwartungswert: $\langle\vec{y}\rangle = E[\vec{y}] = E[B\vec{x}] = B \cdot E[\vec{x}] = B \cdot \langle\vec{x}\rangle$
- Varianz:

$$
\begin{aligned}
V[\vec{y}] &= E[(\vec{y} - \langle\vec{y}\rangle)(\vec{y} - \langle\vec{y}\rangle)^T] \\
&= E[(B\vec{x} - B\,\langle\vec{x}\rangle)(B\vec{x} - B\,\langle\vec{x}\rangle)^T] \\
&= E[B(\vec{x} - \langle\vec{x}\rangle)(\vec{x} - \langle\vec{x}\rangle)^T B^T] \\
&= BE[(\vec{x} - \langle\vec{x}\rangle)(\vec{x} - \langle\vec{x}\rangle)^T]B^T \\
&= BV[\vec{x}]B^T
\end{aligned}
$$

Transformation mehrerer Variablen

$$V[\vec{y}] = BV[\vec{x}]B^T$$

Transformation mehrerer Variablen: allgemein

$$\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$$

- Fallunterscheidung:

$$\dim(\vec{y}) = \dim(\vec{x})$$

$$\dim(\vec{y}) \neq \dim(\vec{x})$$

Transformation mehrerer Variablen

- Für den Fall $\dim(\vec{y}) = \dim(\vec{x})$ kann analog zum Fall mit einer Variable noch eine Wahrscheinlichkeitsdichte angegeben werden:

$$f_x(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = f_y(\vec{y})\, dy_1 \ldots dy_r$$

$$\Rightarrow f_y(\vec{y}) = f_x(\vec{x}) \cdot \mathcal{J}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x}{y}\right) = \left|\frac{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_n}\right|$$

Transformation mehrerer Variablen

- Fall: $\dim(\vec{y}) \neq \dim(\vec{x})$
- Berechne Näherung für die Kovarianzmatrix
- Wir führen eine Taylor-Näherung erster Ordnung für ein Element des Vektors durch:

$$y_i = g_i(\langle \vec{x} \rangle) + \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - \langle x_k \rangle) \left. \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right|_{x_k = \langle x_k \rangle} \right)$$

Transformation mehrerer Variablen

$$V_{pq}[\vec{y}] = \langle (y_p - \langle y_p \rangle) \cdot ((y_q - \langle y_q \rangle) \rangle$$

$$\approx \left\langle \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - \langle x_k \rangle) \left.\frac{\partial y_p}{\partial x_k}\right|_{x_k = \langle x_k \rangle} \right) \sum_{j=1}^{n} \left((x_j - \langle x_j \rangle) \left.\frac{\partial y_q}{\partial x_j}\right|_{x_j = \langle x_j \rangle} \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k,j} (x_k - \langle x_k \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \left.\frac{\partial y_p}{\partial x_k}\right|_{x_k = \langle x_k \rangle} \left.\frac{\partial y_q}{\partial x_j}\right|_{x_j = \langle x_j \rangle} \right\rangle$$

Die letzte Gleichung lässt sich mit einer Matrixmultiplikation identifizieren:

$$\boldsymbol{V}[\vec{y}] = \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}[\vec{x}]\boldsymbol{J}^{\top}$$

Wobei ***J*** die Jacobi-Matrix ist.

Transformation mehrerer Variablen

Jaco**B**i-Matrix: $$V[\vec{y}] = BV[\vec{x}]B^T$$

Transformation mehrerer Variablen

- Oft (z.B. im Praktikum) wird Gauß'sche Fehlerfortpflanzung folgendermaßen angegeben:

$$y = x_1 + x_2$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \sigma_{x_2}\right)^2}$$

- Achtung! Dies gilt nur bei **unkorrelierten** Zufallsvariablen!

- Allgemein gilt (Ausmultiplikation der Matrixgleichung für 1d y):

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^{m} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) \cdot cov(x_i, x_k)}$$

Transformation mehrerer Variablen

- Spezialfall:

Keine Korrelationen in $\vec{x} \Rightarrow V[\vec{x}]$ ist diagonal, mit

$$V_{ii} = \sigma_{y_i}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right)^2 V[x_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Merke: $\vec{y}$ sind im Allgemeinen auch dann korreliert, wenn $\vec{x}$ nicht korreliert sind.

Transformation mehrerer Variablen

Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$\vec{y} = B\vec{x}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Transformation mehrerer Variablen

Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$V[\vec{x}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}(x_1, x_2) \\ \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$V[\vec{y}] = BV[\vec{x}]B^T$$

$$V_{11} = \sigma_{y_1}^2 = \cos^2\theta\sigma_1^2 + \sin^2\theta\sigma_2^2 + 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{cov}(x_1, x_2)$$

$$V_{22} = \sigma_{y_2}^2 = \cos^2\theta\sigma_2^2 + \sin^2\theta\sigma_1^2 + 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{cov}(x_1, x_2)$$

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = V_{12} = V_{21} = \sin\theta\cos\theta(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathrm{cov}(x_1, x_2)$$

Transformation mehrerer Variablen

- Beispiel: Rotation eines Vektors um den Winkel θ

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = 0, \text{wenn: } \tan 2\theta = 2\frac{\mathrm{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

- Transformation in spezielles Koordinatensystem möglich, wo die Zufallsvariablen unkorreliert sind!