technische universität
dortmund

Statistische Methoden der Datenanalyse

Blatt 1

Yvonne Kasper
yvonne.kasper@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu

Julian Schröer
julian.schroeer@udo.edu

Abgabe: 26.10.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe1

1.1 Teil a)

Die Funktion

$$f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{3}\right) - \left(x^3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

wurde auf einem logarithmischen Wertebereich von 10^4 bis 10^7 untersucht, welcher 10000 Werte umfasst.
Ab dem Wert $x \approx 41301,098$ ist die Abweichung vom algebraischen Wert $> 1\%$.
Ab dem Wert $x \approx 165242,521$ ist der Funktionswert gleich Null.

1.2 Teil b)

Die Funktion

$$f(x) = \left(\left(3 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(3 - \frac{x^3}{3}\right)\right)/x^3 = \frac{2}{3}$$

wurde auf einem logarithmischen Wertebereich von 10^{-4} bis 10^{-7} untersucht, welcher ebenfalls 10000 Werte umfasst.
Ab dem Wert $x \approx 3,984 \cdot 10^{-5}$ ist die Abweichung vom algebraischen Wert $> 1\%$.
Ab dem Wert $x \approx 8,728^{-6}$ ist der Funktionswert gleich Null.

1.3 Teil c)

Die Abeichung der Funktionswerte zu dem algebraischen Ergebnis sind in den Abbildungen 1 und 2 dagestellt.
Dabei sind die Abweichungen um 1% mit grauen horizontalen Linien gekennzeichnet, und die rote horizontale Linie zeigt an wann der Funktionswert gleich Null ist und die Abweichung damit 2/3.
Die vertikalen Linien zeigen den Wert des Wertebereiches an, an dem die Abweichung das erste mal die horizontalen Linien schneiden, also genau die Werte die in Teil a) und Teil b) angegeben sind.

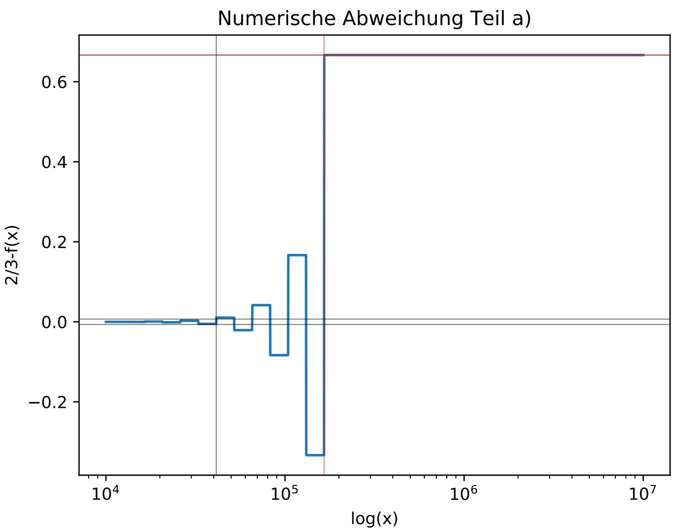

Abbildung 1: Darstellung der Abweichung vom algebraischen Wert für die Funktion a).

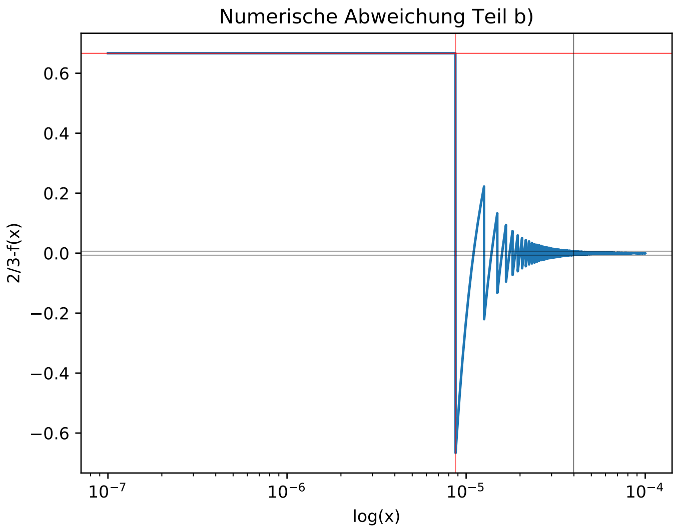

Abbildung 2: Darstellung der Abweichung vom algebraischen Wert für die Funktion b).

2 Aufgabe 2

2.1 Aufgabe 2 a)

Die Gleichung ist nicht für überall numerisch stabil, da für β^2 Nahe 1 und für θ nahe kπ (k $\in \mathbb{N}$) erstens eine Subtraktion gleich großer Zahlen und daraus folgend eine Division durch sehr kleine Zahlen stattfindet.

2.2 Aufgabe 2 b)

Setzt man nun $\mathrm{E_e} = 50\,\mathrm{GeV}$, sowie die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{1}{137}$ und die Elektronenmasse $m_e = 511\,\mathrm{keV}$ in die Gleichung für den Wirkungsquerschnitt ein, erkennt man das die Gleichung nahe kπ (k $\in \mathbb{N}$) tatsächlich instabil wird. Für diesen Fall wird eben gerade β^2 zu:

$$\beta^2 = 1 - \gamma^2 = 1 - \left(\frac{m_e}{\mathrm{E_e}}\right)^2 \approx 0.99989 \approx 1 \tag{1}$$

Der Nenner der Gleichung wird wir folgt umgeformt.

$$\begin{aligned} 1 - \beta^2 \cos(\theta)^2 &= \sin(\theta)^2 + \cos^2(\theta) - \beta \cos(\theta)^2 & (2)\\ &= \sin(\theta)^2 + \cos^2(\theta)(1 - \beta^2) & (3)\\ &= \sin(\theta)^2 + \cos^2(\theta)(\frac{1}{\gamma^2}) & (4) \end{aligned}$$

2.3 Aufgabe 2 c)

Die Gegenüberstellung der ursprünglichen und der umgeformten Gleichung sind in dem Graphen 3

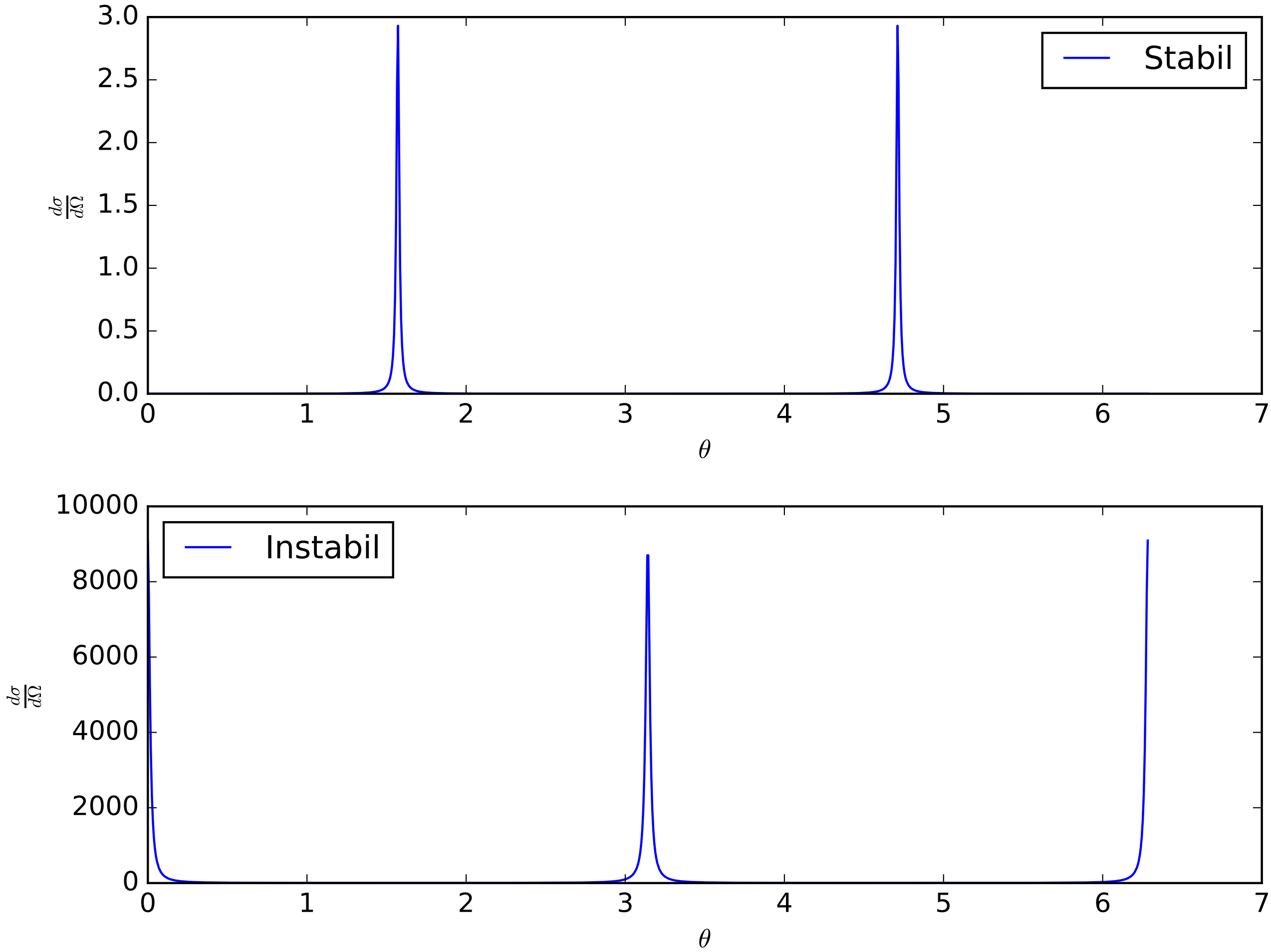

Abbildung 3: Gegenüberstellung der Stabilität der ursprünglichen und umgeformten Gleichung.

2.4 Aufgabe 2 d)

Um die Konditionszahl zu Berechnen wird zunächst

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} := f(\theta)$$

und

$$A := \frac{\alpha^2}{s} \tag{5}$$

festgelegt.
Umformen von $f(\theta)$ mithilfe des trigonometrischen Pythagoras ergibt:

$$f(\theta) = A\frac{3-\cos^2(\theta)}{1-\beta^2\cos^2(\theta)} \tag{6}$$

Die Ableitung ergibt sich dann mithilfe der Quotientenregel und weiteren Umformungen durch trigonometrische Additionstheoreme:

$$f'(\theta) = A \cdot \left(\frac{-2\cos(\theta)\sin(\theta)\cdot(\beta^2\cos^2(\theta)-1) + 2\beta^2\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos^2(\theta)-3)}{(1-\beta^2\cos^2(\theta))^2} \right) \tag{7}$$

$$= 2A \cdot \left(\frac{1-3\beta^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{(1-\beta^2\cos^2(\theta))^2} \right) \tag{8}$$

Für die Konditionszahl ergibt sich dann

$$K := \left|\theta \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right| \tag{9}$$

$$= \left|\theta \frac{1 - 3\beta^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{(1-\beta^2\cos^2(\theta))(\cos^2(\theta)-3)}\right| \tag{10}$$

2.5 Aufgabe 2 e)

3 Aufgabe 3

Um einen Wert für die Normierungskonstante N zu finden wird verwendet, dass

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = \int_0^\infty 4\pi N \exp\left(-\alpha v^2\right) v^2 \mathrm{d}v \stackrel{!}{=} 1.$$

gilt. Dabei ist $\alpha = \frac{m}{2\mathrm{k_B}T}$.
Durch Lösen des Gaußintegrals ergibt sich:

$$4\pi N \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} = 4\pi N \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} \stackrel{!}{=} 1$$

Also ist die Normierungskonstante:

$$N = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \left(\frac{m}{2\pi\mathrm{k_B}T}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3.1 Teil a)

Um die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m zu bestimmen, wird das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(v)$ bestimmt.

$$f'(v) = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi\mathrm{k_B}T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2)\left(v - \alpha v^3\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Das ist erfüllt für

$$v_1 = 0$$
$$v_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2\mathrm{k_B}T}{m}}.$$

Für ein Maximum gilt $f''(v) < 0$.

$$f''(v) = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi\mathrm{k_B}T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha v^2)\left(2\alpha^2 v^4 - 5\alpha v^2 + 1\right) < 0$$

$$f''(v_1) = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} > 0$$
$$f''(v_2) = -16\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-1) < 0$$

$v_3 = -\sqrt{\frac{2\mathrm{k_B}T}{m}}$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches. Damit ist $v_m = v_2 = +\sqrt{\frac{2\mathrm{k_B}T}{m}}$ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit.

3.2 Teil b)

Die mittlere Geschwindigkeit $<v>$ entspricht dem Erwartungswert der Geschwindigkeitsverteilung, dies wird mit

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v$$

berechnet.

$$\begin{aligned}
<v> &= \int_0^\infty v f(v) \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\alpha v^2\right) v^3 \mathrm{d}v \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{3+1}{2}}} \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\alpha^2} \\
&= \sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}
\end{aligned}$$

3.3 Teil d)

Aus Teil a) ist die maximale Höhe bekannt. Die halbe Höhe beträgt also7

$$\frac{1}{2} f(v)_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\mathrm{k_B}T}{m}} = \sqrt{\frac{\mathrm{k_B}T}{2m}}.$$

Um die Breite der Verteilung zu dieser Höhe zu finden, wird das Nullstellenproblem :

$$0 = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\alpha v^2\right) v^2 - \sqrt{\frac{\mathrm{k_B}T}{2m}}$$

gelöst.

3.4 Teil e)

Für die Standardabweichung der Geschwindigkeit $\sigma = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ muss zunächst das zweite Moment der Verteilung bestimmt werden:

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \exp\left(-\alpha v^2\right) v^4 \mathrm{d}v.$$

Lösen des Integrals liefert:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{\alpha} = \frac{6k_\mathrm{B}T}{m}.$$

Daraus folgt:

$$\sigma = \frac{3\pi - 4}{\alpha\pi} = \frac{2k_\mathrm{B}T(3\pi - 4)}{m\pi}.$$

4 Aufgabe 4

4.1 Teil a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Würfel 9 ist, lässt sich aus den verschiedenen Möglichkeiten den erwünschten Wert 9 aus allen Ereignissen zu erhalen, bestimmen. Insgesamt gibt es 36 mögliche Ereignisse. Mit zwei Würfeln lässt sich der Wert 9 nur mit den Kombinationen 3&6 sowie 4&5 erreichen. Insgesamt gibt es also 4 Möglichkeiten, da es egal ist welcher der Würfel, welchen Wert hat. Daraus folgt

$$P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} = 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

4.2 Teil b)

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, eine Summe von 9 oder mehr zu erhalten, werden die gewünschten Kombinationen abgezählt: 6&3, 3&6, 6&4, 4&6, 6&5, 5&6, 6&6, 5&4, 4&5, 5&5. Es gibt also insgesamt 10 Möglichkeiten.

$$P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} \geq 9) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

4.3 Teil c)

Es gibt nur 2 Möglichkeiten, dass ein Würfel 4 und der andere 5 zeigt.

$$P(W_\mathrm{blau/rot} = 4, W_\mathrm{blau/rot} = 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

4.4 Teil d)

Es gibt genau eine Möglichkeit, dass der rote Würfel 4 und der blaue 5 zeigt.

$$P(W_\mathrm{rot} = 4, W_\mathrm{blau} = 5) = \frac{1}{36}.$$

4.5 Teil e)

Da bekannt ist, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, bleiben noch 6 mögliche Ereignisse für den blauen Würfel. Dass die Summe 9 ist gilt also nur, wenn der blaue Würfel eine 5 zeigt.

$$P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} = 9 | W_\mathrm{rot} = 4) = P(W_\mathrm{blau} = 5) = \frac{1}{6}.$$

4.6 Teil f)

Es gibt nur zwei Ereignisse, 5 und 6, die zusammen mit der roten 4 eine 9 ergeben:

$$P(W_\mathrm{rot} + W_\mathrm{blau} \geq 9 \mid W_\mathrm{rot} = 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

4.7 Aufgabenteil g)

Es gibt nur eine Möglichkeit, also gilt wie in Teil e) :

$$P(W_{\mathrm{rot}} = 4, W_{\mathrm{blau}} = 5 \mid W_{\mathrm{rot}} = 4) = \frac{1}{6}.$$