SMD - Übungsblatt 9 - Kasper, Appel, Schröer - Die Gewächse

A26

Schätz - Statistik $T = g(X_1, \dots, X_n)$ ist erwartungstreu, mit Parameter Θ, wenn gilt:

$$E_\Theta(T) = \Theta$$

A1	A2	A3	Σ
–	7	5.5	12.5

a) $E(X_i) = \mu$

$$E_\mu(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\mu} = \frac{1}{n} \sum_i^n \mu = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$

$\Rightarrow E_\mu(\bar{X}) = \mu \Rightarrow \bar{X}$ ist erwartungstreu ✓ 1P.

b) $Var(X_i) = \sigma^2$

$$E((\bar{X} - \mu)^2) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_i^n Var(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} (n \cdot \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \square$$

✓ 1P.

c)

$$E_{\sigma^2}(S_0^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} E((X_i - \mu)^2) = \frac{1}{n} \sum_i^n \underbrace{E((X_i - E(X_i))^2)}_{= Var(X_i) = \sigma^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i^n \sigma^2 = \frac{1}{n} (n\sigma^2) = \sigma^2$$

$\Leftrightarrow E_\sigma(S_0^2) = \sigma^2 \Rightarrow S_0^2$ ist erwartungstreu ✓

2P.

d)

$$E_{\sigma^2}(S_0'^2) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_i^n ((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_i^n \left((X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_i^n (X_i - \mu)^2 - \frac{2}{n}(\bar{X} - \mu) \sum_i^n (X_i - \mu) + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_i^n (\bar{X} - \mu)^2}_{= \frac{n}{n}(\bar{X} - \mu)^2}\right]$$ ✓

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i - \mu = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i - \frac{1}{n} \sum_i^n \mu$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i^n (X_i - \mu) \Leftrightarrow n(\bar{X} - \mu) = \sum_i^n (X_i - \mu)$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_i^n (X_i - \mu)^2 - \frac{2}{n}(\bar{X} - \mu) \cdot n \cdot (\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2\right]$$ ✓

$= E\left[\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu)^2 - 2(\bar{X}-\mu)^2 + (\bar{X}-\mu)^2\right]$

$= \underbrace{E\left[\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu)^2\right]}_{=Var(X_i)=\sigma^2} - \underbrace{E\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]}_{\overset{(2)}{=}\frac{\sigma^2}{n}}$

$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow S_0'^2$ ist <u>nicht</u> erwartungstreu (✓)

2P.

Korrektur: $S_0''^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ ✓

Probe:

$E_{\sigma^2}(S_0''^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$

Analog zu davor:

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n-1}(\bar{X}-\mu)\sum(X_i-\mu) + \frac{1}{n-1}\sum(\bar{X}-\mu)^2\right]$

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\mu)^2 - \frac{2n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2 + \frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$

$= E\left[\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\mu)^2\right] - E\left[\frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$

$= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\underbrace{\left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)}_{=1}$

$= \sigma^2$ ✓

$\Rightarrow S_0''^2$ ist erwartungstreu

1P.

7/7P.

A27)

Wahrscheinlichkeitsdichte

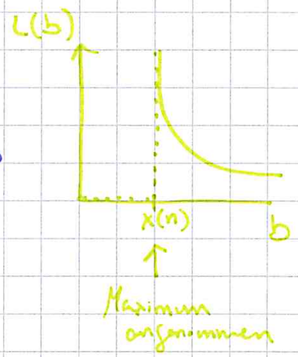
a) $f(x) = \begin{cases} 1/b & , \; 0 \le x \le b \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$

Verteilungsfunktion

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/b, & 0<x<b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$

Liklihood-Fkt: $L(b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid b)$

$$= \begin{cases} \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{b}\right)^n = 1/b^n & , \; 0 \le x_i \le b \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$



→ unabh. vom Beobachtungswerten x_i

→ Ableitung nach b liefert keine gescheiten Erg.

Da $0 \le x_i \le b$ gilt folgt dann als Schätzung:

$$\hat{b} = \max_j (x_j) = x_{max}$$

3P.

b) Der Schätzer ist per Definition nicht erwartungstreu, da er immer zugering schätzt ~~da~~, da in d. Regel $b > x_{max}$ gilt.

Korrektur $\frac{n-1}{n} \hat{b}$

2.5P

Verteilungsfunktion des Maximums Wie kommt man drauf?

$F_{max\{x_1 \ldots x_n\}} = P(\max\{x_1, \ldots, x_n\} \le x)$

$= P(x_1 \le x \wedge x_2 \le x \wedge \ldots \wedge x_n \le x)$

$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(x_i \le x)}_{F_{x_i} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/b & , 0 \le x \le b \\ 1 & , x>b \end{cases}}$

"Maximum kleiner x als alle Werte kleiner x."

Aufteilen

5.5/6P.

$$= \left(F_{X_1}(x)\right)^n \quad \Leftarrow \text{Unkorrelierte Werte}$$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ (x/b)^n, & 0 \le x \le b \\ 1, & x>b \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{max}(x)\, x \, dx \qquad \text{mit} \quad f_{max}(x) = n \cdot \frac{x^{n-1}}{b^n}$$

für $x \in [0,b]$

$$= \frac{n}{b^n} \int_0^b x \cdot x^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{n}{b^n} \frac{\left[x^{n+1}\right]_0^b}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} b$$

Damit Bias-Korrektur:

$$\hat{T}(b) = \frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1 \ldots x_n\}$$