Analiza efektywności algorytmu Monte Carlo z wykorzystaniem generatorów pseudolosowych

Ewa Kasprzak

5 października 2023

1. Wstęp

Metody Monte Carlo są numerycznymi technikami obliczeniowymi, które polegają na symulowaniu losowych próbek danych. Uzyskane wyniki są wykorzystywane do przybliżania całek, prawdopodobieństw oraz innych istotnych parametrów w problemach, które są trudne do rozwiązania analitycznie.

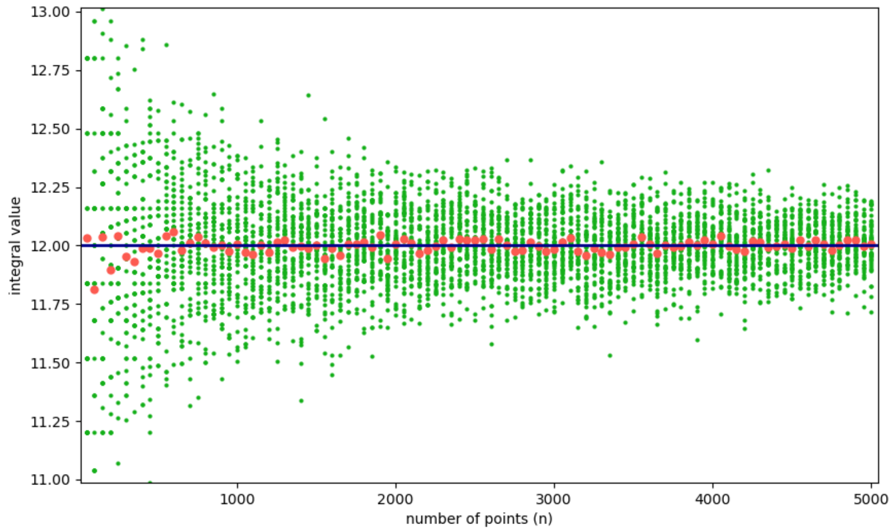
W niniejszym sprawozdaniu skupimy się na zastosowaniach metod Monte Carlo do przybliżania wartości całek funkcji na określonym przedziale.

2. Probabilistyczna metoda aproksymacji całek

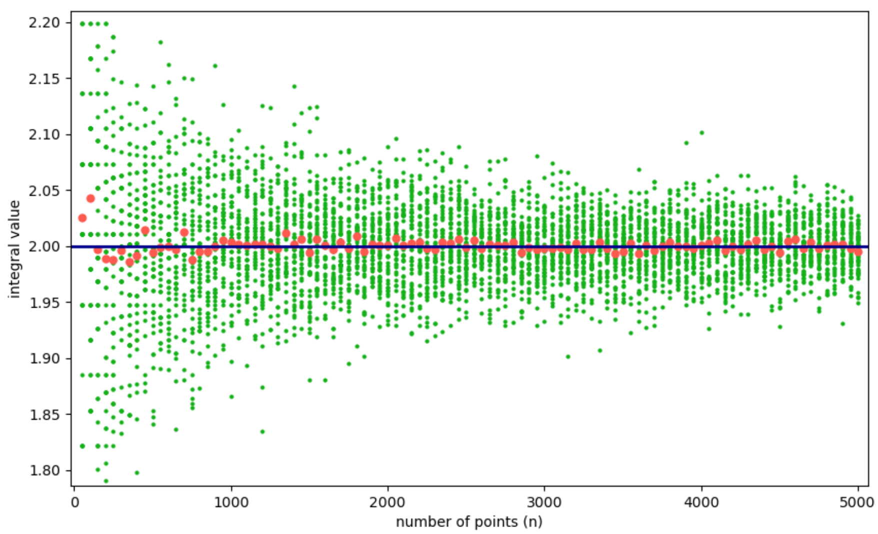
Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, przyjmującą wartości nieujemne, dla której chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x)\,dx$. Rozważmy poniższą prostą probabilistyczną metodę aproksymacji takich całek.

1. Generujemy niezależnie i jednostajnie losowo n punktów z prostokąta $[a, b] \times [0, M]$, dla ustalonego $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
2. Zliczamy, ile spośród wylosowanych punktów leży „pod wykresem” funkcji f (punkt (x, y) leży „pod wykresem” f, jeśli $y \leq f(x)$) – oznaczmy tę liczbę przez C.
3. Jako aproksymację całki przyjmujemy wartość $\frac{C}{n} \cdot (b - a) \cdot M$, gdzie $(b - a) \cdot M$ to pole powierzchni rozważanego prostokąta.

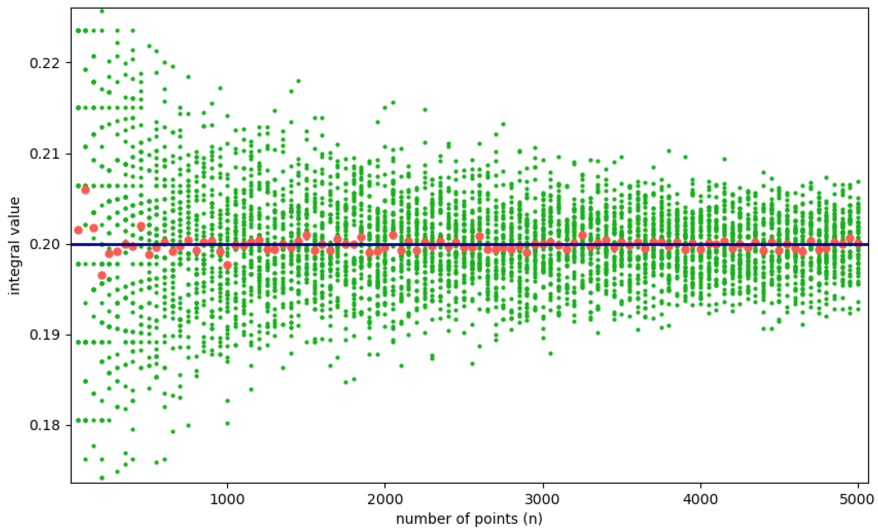
Losową wartość z przedziału $[a, b]$ uzyskujemy korzystając ze wzoru $a + (b - a)rand()$, gdzie $rand()$ jest wartością wygenerowaną za pomocą wbudowanego generatora pseudolosowego w języku Python, opartego na algorytmie Mersenne Twister. Pozwala to na otrzymywanie losowych wartości z określonego przedziału przy zachowaniu jednostajności rozkładu.



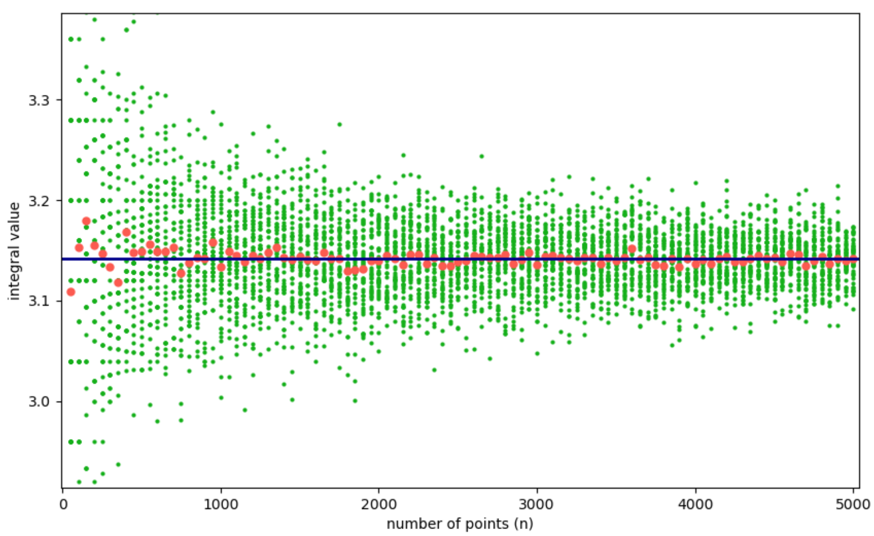
Rysunek 1: Wyniki eksperymentów dla $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$. Wykonane zostało k $= 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu dla każdego $n \in \{50, 100, \ldots, 5000\}$. Zielone punkty przedstawiają wyniki poszczególnych powtórzeń, czerwone punkty odpowiadają średniej wartości dla każdego n, a zielona prosta $y = 12$ to prawdziwa wartość aproksymowanej całki.



Rysunek 2: Wyniki eksperymentów dla $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$. Wykonane zostało k $= 50$ niezależnych powtórzeń algorytmu dla każdego $n \in \{50, 100, \ldots, 5000\}$. Zielone punkty przedstawiają wyniki poszczególnych powtórzeń, czerwone punkty odpowiadają średniej wartości dla każdego n, a zielona prosta $y = 2$ to prawdziwa wartość aproksymowanej całki.



Rysunek 3: Wyniki eksperymentów dla $\int_0^1 4x((1-x)^3)\,dx$. Wykonane zostało k = 50 niezależnych powtórzeń algorytmu dla każdego $n \in \{50, 100, \ldots, 5000\}$. Zielone punkty przedstawiają wyniki poszczególnych powtórzeń, czerwone punkty odpowiadają średniej wartości dla każdego n, a zielona prosta $y = 2$ to prawdziwa wartość aproksymowanej całki.



Rysunek 4: Wyniki eksperymentów dla $\iint_D 1\,dx\,dy$, gdzie $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$. Wykonane zostało k = 50 niezależnych powtórzeń algorytmu dla każdego $n \in \{50, 100, \ldots, 5000\}$. Zielone punkty przedstawiają wyniki poszczególnych powtórzeń, czerwone punkty odpowiadają średniej wartości dla każdego n, a zielona prosta $y = 2$ to prawdziwa wartość aproksymowanej całki. Eksperyment ten służy do ustalenia przybliżonej wartości π.

3. Wnioski

Eksperymenty potwierdziły, że metoda Monte Carlo jest skutecznym narzędziem do przybliżania wartości całek i stałych matematycznych, takich jak liczba π. Jej siła polega na zdolności do generowania losowych próbek i estymowania wartości na ich podstawie.

Zwiększając liczbę losowych punktów, metoda ta zbiega do dokładnych wartości matematycznych. Stabilność rezultatów jest osiągana poprzez uśrednianie wyników z wielu prób, co prowadzi do bardziej precyzyjnych estymacji. Wykorzystanie algorytmu Mersenne Twister jako generatora liczb pseudolosowych wpływa pozytywnie na jakość uzyskanych wyników. Jego dobre właściwości statystyczne sprawiają, że generowane punkty są równomiernie rozłożone w przestrzeni, co jest kluczowe dla precyzji metody Monte Carlo.