به نام ایزد

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

فرایند های تصادفی

جناب دکتر بهنیا

دستیار درس:

حامی محرابی

تهیه کننده:

کسری فلاح

97109987

فروردین 1400

سوال 1) آشنایی بامدلهای MA، AR و ARMA

1 .با استفاده از تحلیل نظری، تابع خودهمبستگی و تابع همبستگی متقابل را به دست آورید

حالت MA

$$y[n] + \sum_{m=1}^{M} a_m y[n-m] = x[n] + \sum_{k=1}^{K} b_k x[n-k]$$

- حالت MA تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $b_1 = 0.3$, $b_2 = -0.5$

ابتدا ثوابت را جاگذاری میکنیم

$$y[n] = x[n] + 0.3x[n-1] - 0.5x[n-2]$$

حال مقدار پاسخ ضربه را میابیم

$$h[n] = \delta[n] + 0.3\delta[n-1] - 0.5\delta[n-2]$$

برای نویز گوسی با میانگین 0 و واریانس 1 داریم که

$$Rxx[m] = \delta[m]$$

حال برای همبستگی متقابل داریم

$$Rxy[m] = \delta[m] * h[-m] = \delta[n] + 0.3\delta[n+1] - 0.5\delta[n+2]$$

برای خود همبستگی خروجی هم داریم

$$Ryy[m] = \delta[m] * h[m] * h[-m] = 1.34\delta[n] + 0.15(\delta[n-1] + \delta[n+1]) - 0.5(\delta[n-2] + \delta[n+2])$$

حالت AR

حالت AR تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$, $a_2 = 0.1$

ابتدا ثوابت را جاگذاری میکنیم

$$y[n] - 0.7y[n-1] + 0.1y[n-2] = x[n]$$

ابتدا باز هم به سراغ پیدا کردن پاسخ ضربه میرویم ابتدا تبدیل z میگیریم

$$H(\mathrm{z}) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

$$\frac{1}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}} = \frac{10}{(5 - z^{-1})(2 - \mathrm{z}^{-2})}$$

$$h[n] = \left[\frac{5}{3}\,(0.5)^{\mathrm{m}} - \frac{2}{3}\,(0.2)^{\mathrm{m}}\right] \mathrm{u[m]}$$

برای نویز گوسی با میانگین 0 و واریانس 1 داریم که

$$Rxx[m] = \delta[m]$$

حال برای همبستگی متقابل داریم

$$\mathrm{Rxy}[\mathrm{m}] = \delta[\mathrm{m}] * \mathrm{h}[-\mathrm{m}] = [\frac{5}{3}(0.5)^{-\mathrm{m}} - \frac{2}{3}(0.2)^{-\mathrm{m}}]\, \mathrm{u}[-\mathrm{m}]$$

برای خود همبستگی خروجی هم داریم

$$Ryy[m] = \delta[m] * h[m] * h[-m] = \left[\frac{5}{3}(0.5)^{-\mathrm{m}} - \frac{2}{3}(0.2)^{-\mathrm{m}}\right]\mathrm{u}[-\mathrm{m}] * \left[\frac{5}{3}(0.5)^{\mathrm{m}} - \frac{2}{3}(0.2)^{\mathrm{m}}\right]\mathrm{u}[\mathrm{m}]$$

$$Ryy[m] = \left[-0.772\,(0.2)^{m}\,u[m] + 2.469(0.5)^{m}\,u[m]\right] +$$

$$[2.469(0.5)^{-m}u[-m] - 0.772(0.2)^{-m}\,u[-m]]$$

حالت ARMA

حالت ARMA: تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$ و $b_1 = 0.2$

ابتدا ثوابت را جاگذاری میکنیم

$$y[n] - 0.7y[n-1] = x[n] + 0.2x[n-1]$$

ابتدا از رابطه تبدیلz میگیریم

$$\mathrm{H}(z) = \frac{1 + 0.2\mathrm{z}^{-2}}{1 - .7z^{-1}} = \mathrm{s1} + \frac{\mathrm{s2}}{1 - 0.7\mathrm{z}^{-1}}$$

$$h[m] = -\frac{2}{7}\,\delta[m] + \frac{9}{7}\,(0.7)^{m}\,u[m]$$

حال برای همبستگی متقابل داریم

$$\mathrm{Rxy}[\mathrm{m}] = \delta[\mathrm{m}] * \mathrm{h}[-\mathrm{m}] = -\frac{2}{7}\,\delta[-m] + \frac{9}{7}\,(0.7)^{-m}\,u[-m]$$

برای خود همبستگی خروجی هم داریم

$$Ryy[m] = \delta[m] * h[m] * h[-m] = (-\frac{2}{7}\,\delta[m] + \frac{9}{7}\,(0.7)^{m}\,u[m]) * (-\frac{2}{7}\,\delta[-m] + \frac{9}{7}\,(0.7)^{-m}\,u[-m])$$

$$= -\frac{2}{7} * \frac{9}{7}\,(0.7)^{-m}\,u[-m] - \frac{2}{7} * \frac{9}{7}\,(0.7)^{m}\,u[m] + \frac{4}{29}\,\delta[m] +$$

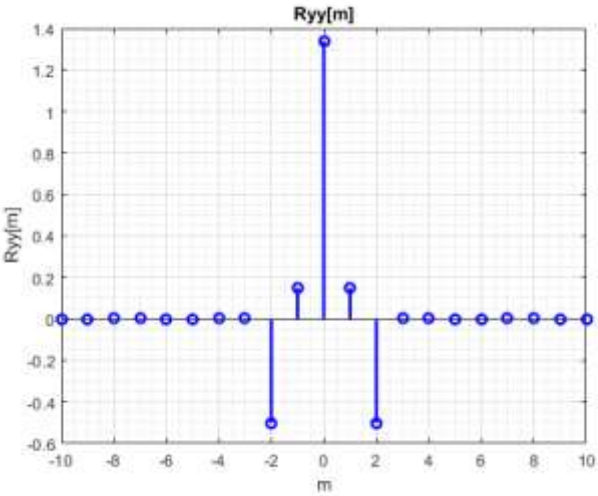
.با استفاده از MATLAB عملکرد سیستم را پیادهسازی کرده و به کمک شبیهسازی و انجام آزمایش، همبستگی وخودهمبستگی را در بازهی $-1000 \leq m \leq 1000$ تقریب بزنید. روش خود را به طور خلاصه توضیح بدهید

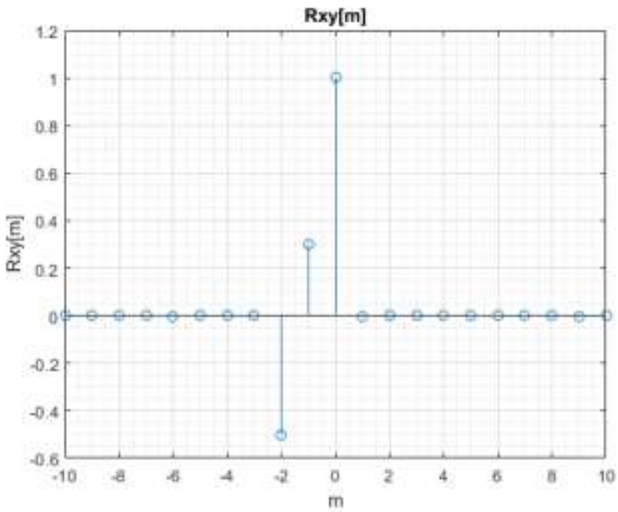
به سادگی با استفاده از تابع wgn میتوانیم نویز را تولیدو از طریق تابع فیلتر میتوانیم خوروجی مطلوب را بسازیم.

حال با استفاده از تابع xcorr مقدار همبستگی دو تابع بر حسب lagرا خواهیم داشت.

```
x=wgn(1,1000000,0);
y = filter([1,0.3,-0.5],[1],x);
[acf,lags] = xcorr(y,y);
```

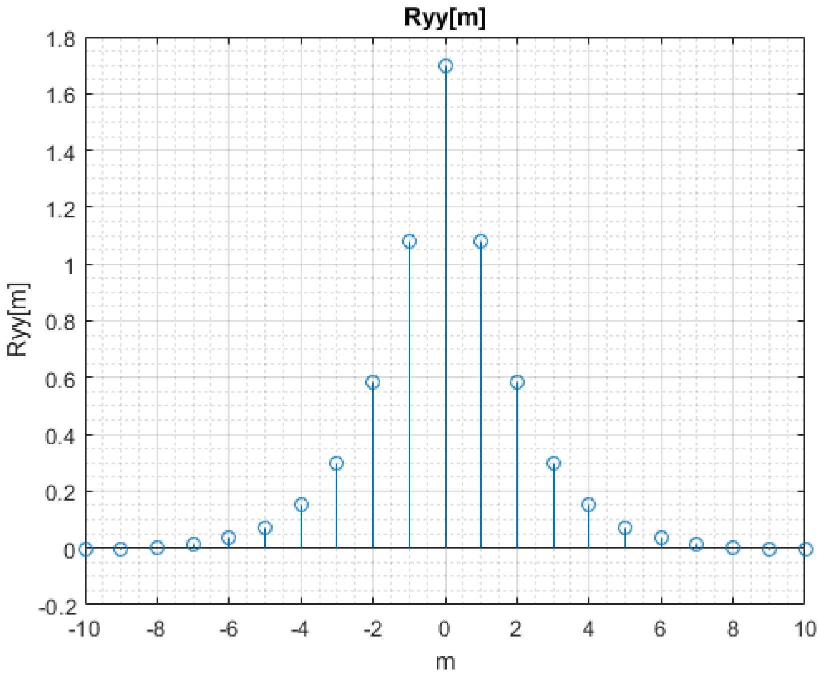
- حالت MA تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $b_1 = 0.3$ و $b_2 = -0.5$

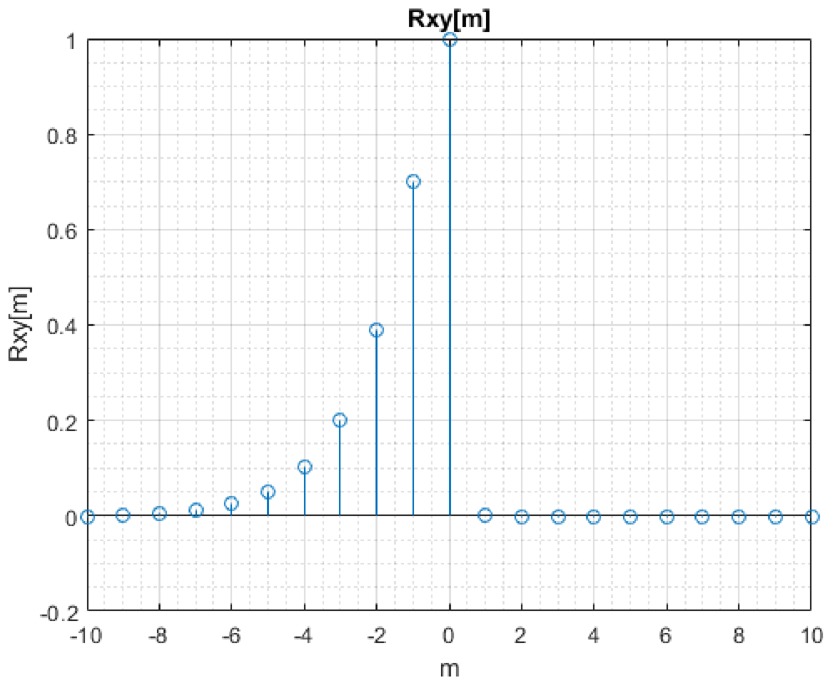




حالت AR

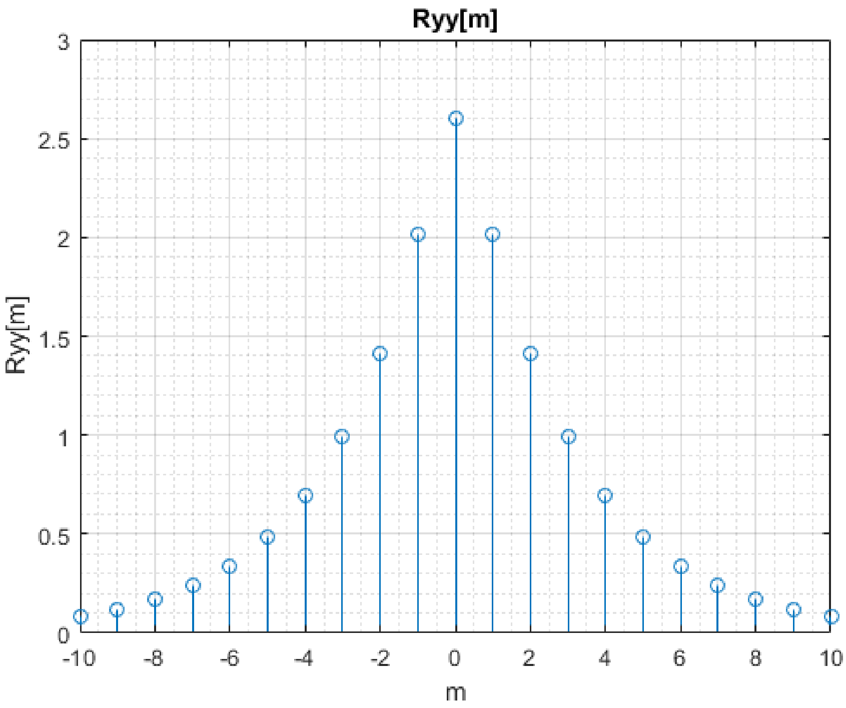
حالت AR تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$ و $a_2 = 0.1$

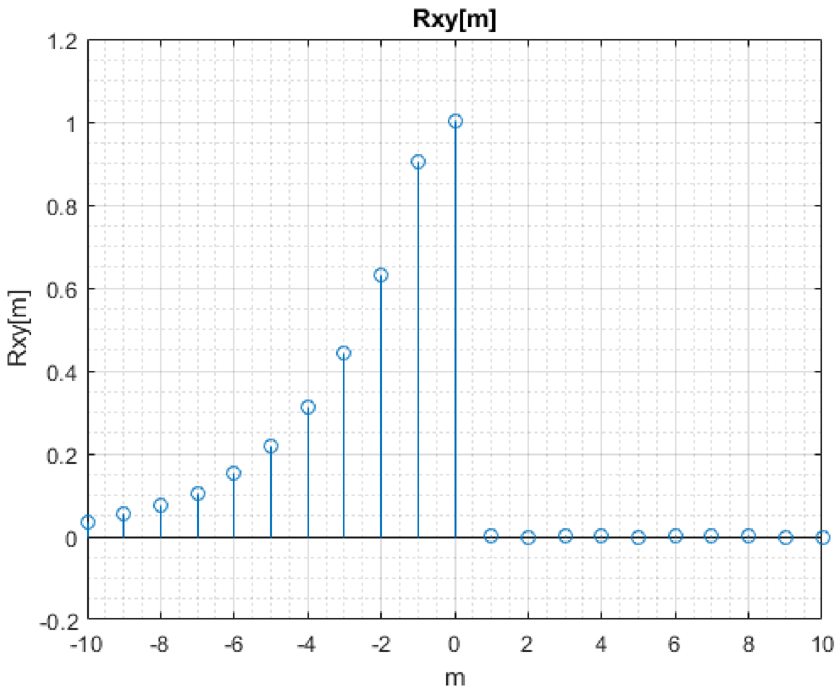




حالت ARMA

حالت ARMA: تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$ و $b_1 = 0.2$

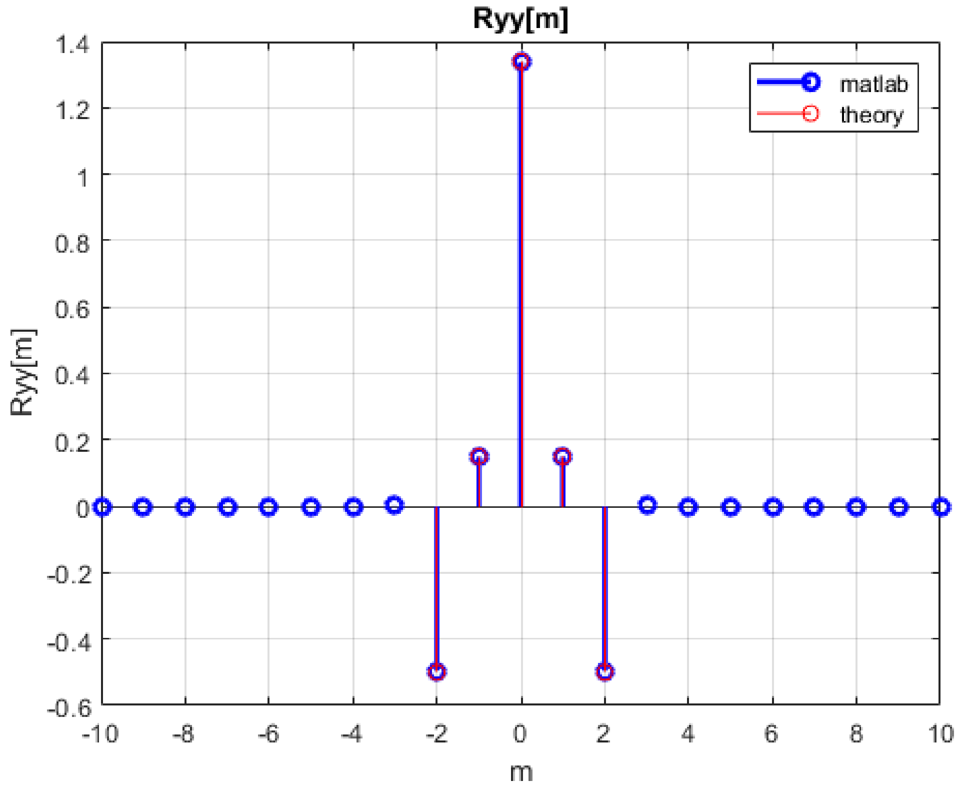


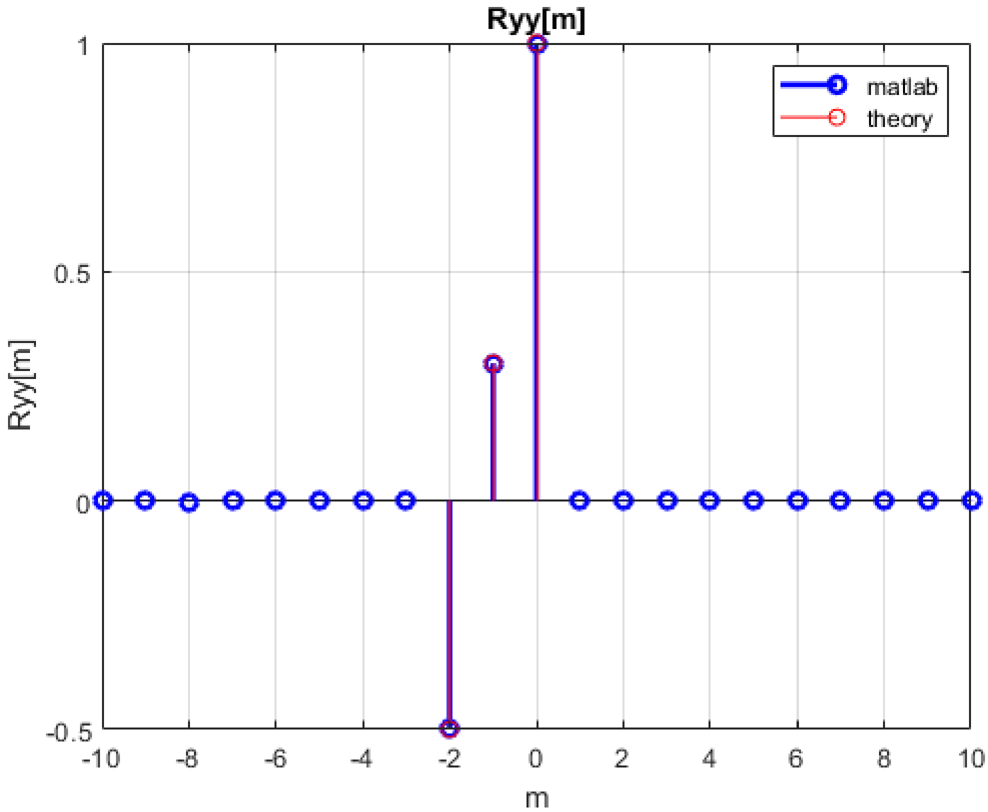


قسمت ج) مقایسه با تیوری

- حالت MA تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $b_1 = 0.3$ و $b_2 = -0.5$

همان طور که در نمودار ها پر واضح است کاملا مقادیر منطبق است

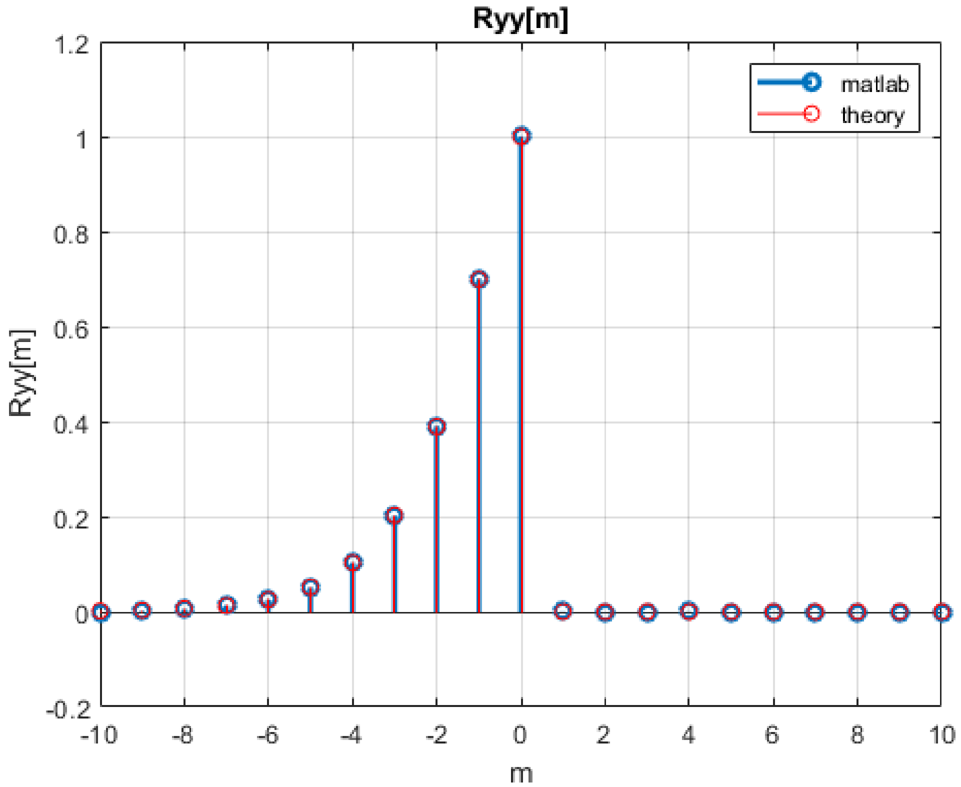


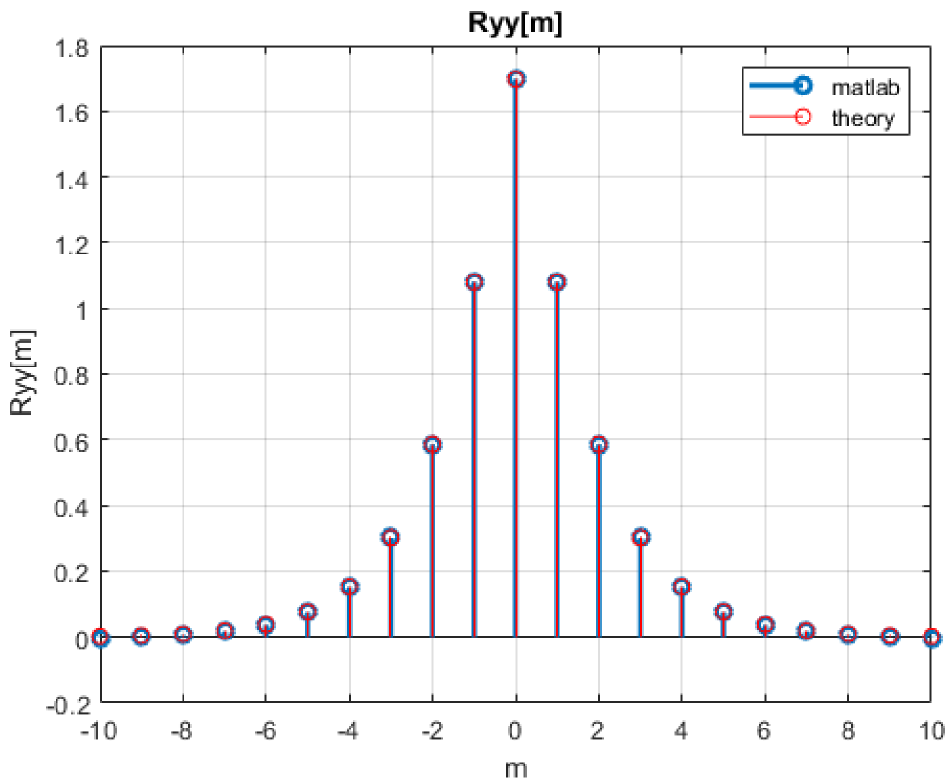


حالت AR

حالت AR تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$ و $a_2 = 0.1$

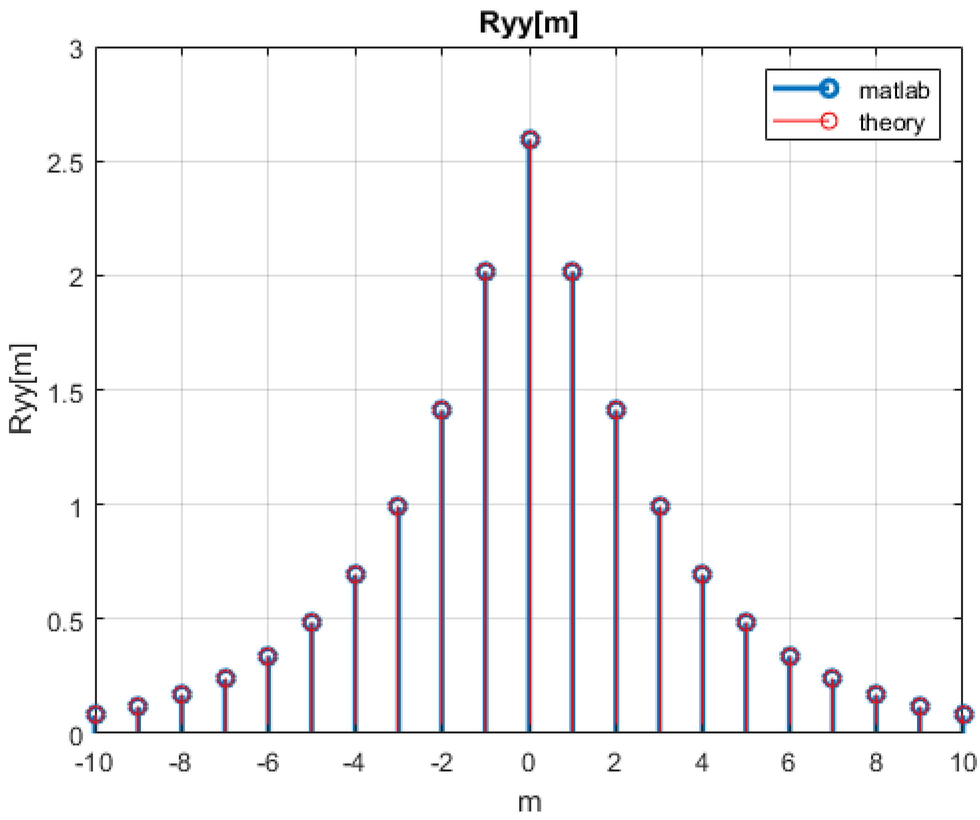
تابع حاصله در قسمت اول را در متلب وارد کردم و سپس خروجی هخا را بر روی یک نمودار نمایش دادم همان طور که مشخص است تا حد قابل قبولی تطابق دارند

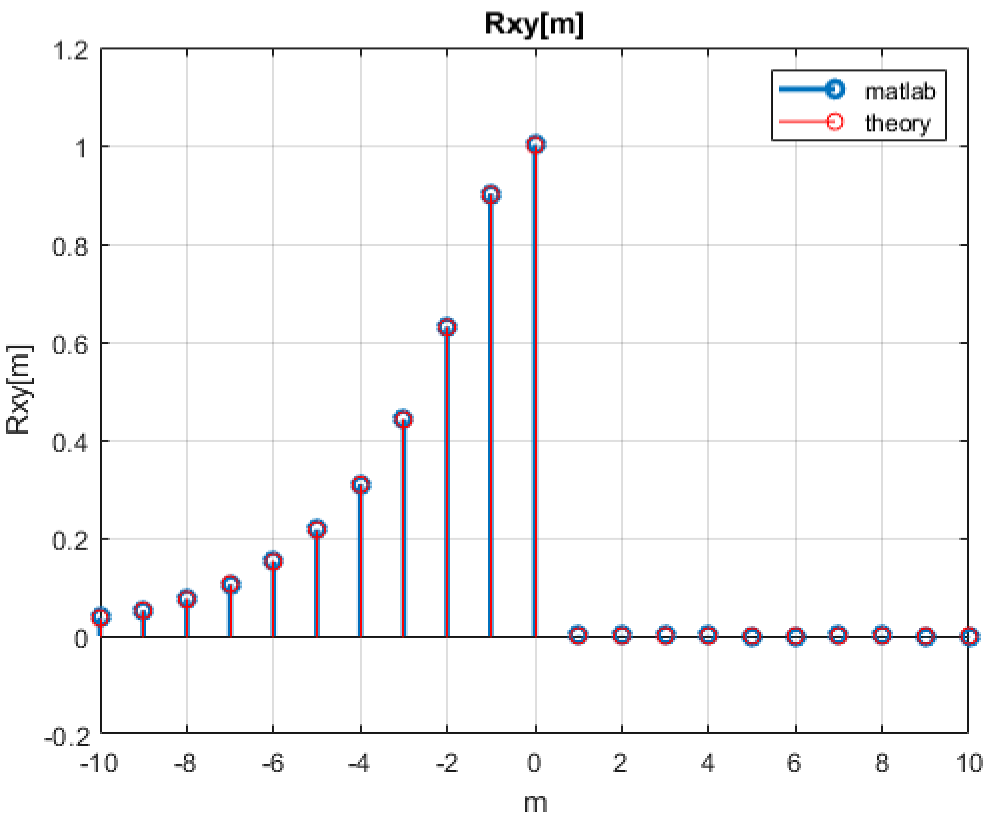




حالت ARMA

حالت ARMA: تمامی ضرایب $\{a_m\}$ و $\{b_k\}$ برابر با صفر می‌باشند به جز $a_1 = -0.7$ و $b_1 = 0.2$





سوال 2) نرمسازی نمایی ساده

4. اثبات کنید

داریم که :

$$y_{[n]} = \varepsilon[n] + \ell[n]$$

و همچنین داریم که :

$$\hat{l}[n] = \alpha\hat{l}[n_{-1}] + \beta y_{[n]}$$

حال از طرفین دو رابطه فوق میانگین میگیریم:

$$E\left[\hat{l}[n]\right] = \alpha E\left[\hat{l}[n-1]\right] + \beta E\left[y_{[n]}\right]$$

و

$$E\left[y_{[n]}\right] = E\left[l_{[n]}\right] + E[\varepsilon[n]]$$

میدانیم که نویز e سفید و گوسی است پس میانگین آن صفر است پس از رئابط داده شده و این مطلب داریم که

$$E\left[y_{[n]}\right] = E\left[l_{[n]}\right] = E[\hat{l}[n]]$$

با جاگذاری در رابطه ی بالایی داریم که مقادیر خط خورده و خواهیم داشت:

$$E\left[\hat{l}[n]\right] = \alpha E\left[\hat{l}[n-1]\right] + \beta E\left[y_{[n]}\right]$$

$$1 = \alpha + \beta$$

حال به سراغ رابطه دوم میرویم از صورت سوال داریم که :

$$E\left[\left(\hat{l}_{[n]}\right)^2\right] = E\left[\left(l_{[n]}\right)^2\right]$$

حال مقدار ال هت را مینویسیم و به توان دو میرسانیم و متوسط مگیریم

$$\hat{l}[n] = \alpha\hat{l}[n_{-1}] + \beta y_{[n]}$$

$$E\left[\left(\hat{l}_{[n]}\right)^2\right] = E\left[\left(\alpha\hat{l}[n_{-1}] + \beta y_{[n]}\right)^2\right] = E\left[\alpha^2\hat{l}^2_{[n-1]} + \beta^2 y^2_{[n]} + 2\alpha\beta\hat{l}[n_{n-1}]\, y[\mathrm{n}]\ \right] = E\left[\left(l_{[n]}\right)^2\right]$$

حال برای y هم محاسبه میکنیم

$$E\left[y^2_{[n]}\right] = E\left[\left(l_{[n]} + \varepsilon[n]\right)^2\right] = \mathrm{E}[\mathrm{l}[\mathrm{n}]^2] + E[\varepsilon[n]^2] + 2 * E\left[\varepsilon[n]\right] * E\left[l[n]\right] =$$

$$E\left[y^2_{[n]}\right] = \mathrm{E}[\mathrm{l}[\mathrm{n}]^2] + \sigma_e{}^2$$

حال داریم که

$$E\left[\left(\hat{l}_{[n]}\right)^2\right] = E\left[\left(l_{[n]}\right)^2\right] = E\left[\alpha^2\hat{l}^2_{[n-1]}\right] + E[\beta^2 y^2_{[n]}] + 2\alpha\beta\ E[\hat{l}[n_{n-1}]\ y[\mathrm{n}]\ ]$$

$$(\alpha^2 - 1) * E\left[\hat{l}^2_{[n-1]}\right] + \beta^2 * (\mathrm{E}\left[y^2_{[n]}\right]) + 2\alpha\beta\ E[\hat{l}[n_{n-1}]\ y[\mathrm{n}]\ ] = 0$$

و در کنار این خواهیم داشت که

$$(1 + \alpha^2)E\left[\hat{l}^2_{[n]}\right] = \beta^2 E[y^2] + 2\alpha R^1_l[1]$$

حال از تجمیع روابط فوق الذکر خواهیم داشت که :

$$\left(1-\alpha^2-\beta^2 \mid E[y^2] = \sigma_\varepsilon^2(1+\alpha^2)+2\alpha R\hat{l}_L\right]$$

حال با استفاده از رابطه انحراف از معیار و اعمال آن بر رابطه فوق و بردن جملات هم شکل بهع سمت راست معادله خواهیم داشت که :

$$2\alpha\left(\sigma_y^2+\eta_y^2-R\hat{\ell}[1]\right)=\sigma_\varepsilon^2(1+\alpha^2)$$

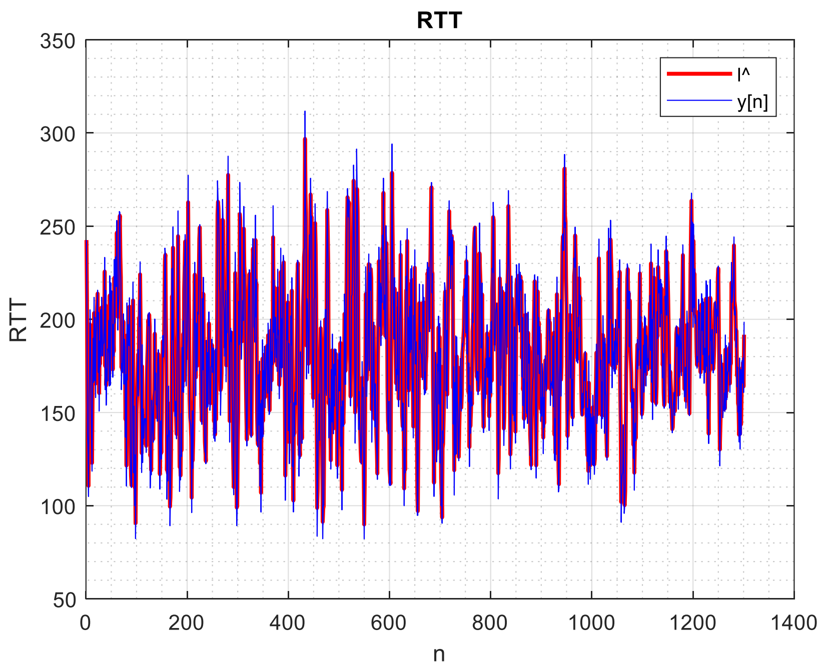
و به راحتی از رابطه فوق خواهیم داشت مطلوب مسیله را:

$$\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2+\eta_y^2-R_{\hat{\ell}[1]}}$$

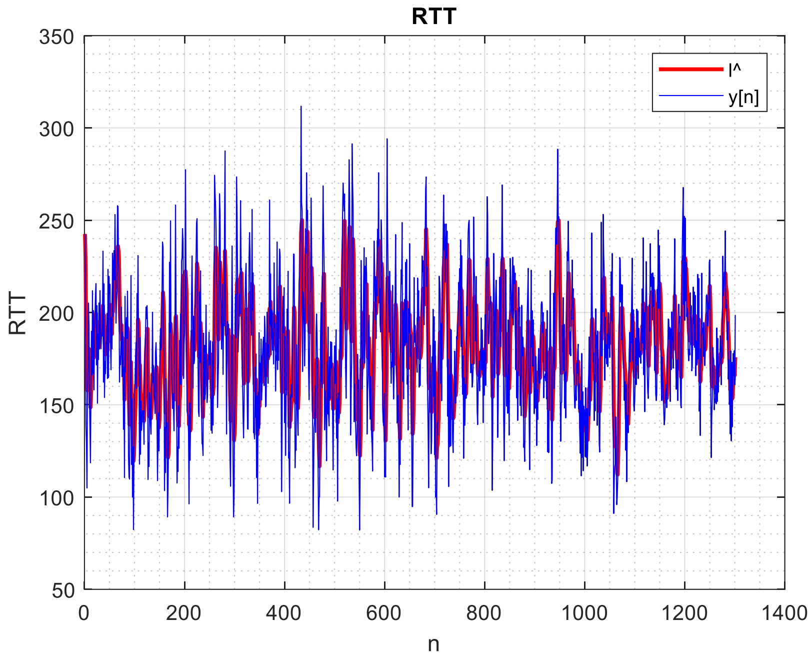
۵ در فایل RTT.mat دنباله‌ی مشاهدات $y[n]$ بر حسب میلی ثانیه درون بردار temp آمده است. اگر اولین نمونه را با $y[0]$ نمایش دهیم، انجام تخمین (محاسبه $\hat{l}[n]$) به روش SES را از $n = 1$ شروع کنید و فرض کنید $\hat{l}[0] = y[0]$

- برای تمامی مقادیر α از 0.1 تا 0.9 با گام 0.1، دنباله‌ی تخمینی $\hat{l}[n]$ را به دست آورده و نگه‌داری کنید. حال برای هر یک از مقادیر $\alpha \in \{0.2,0.7,0.8,0.9\}$ در یک نمودار، $\hat{l}[n]$ را به همراه $y[n]$ ترسیم کنید و ۴ نمودار حاصل را

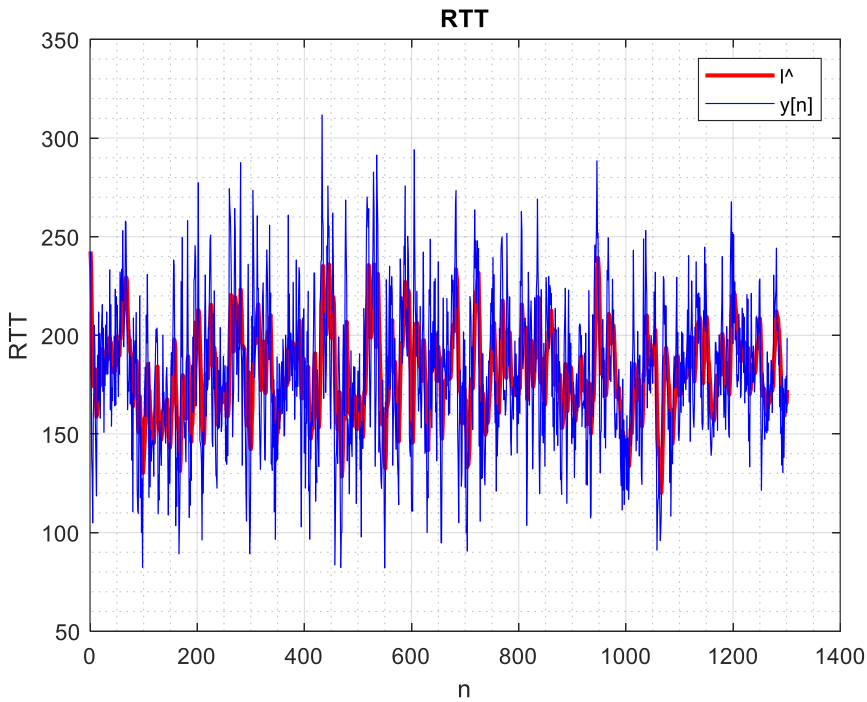
به ازای $\alpha = 0.2$



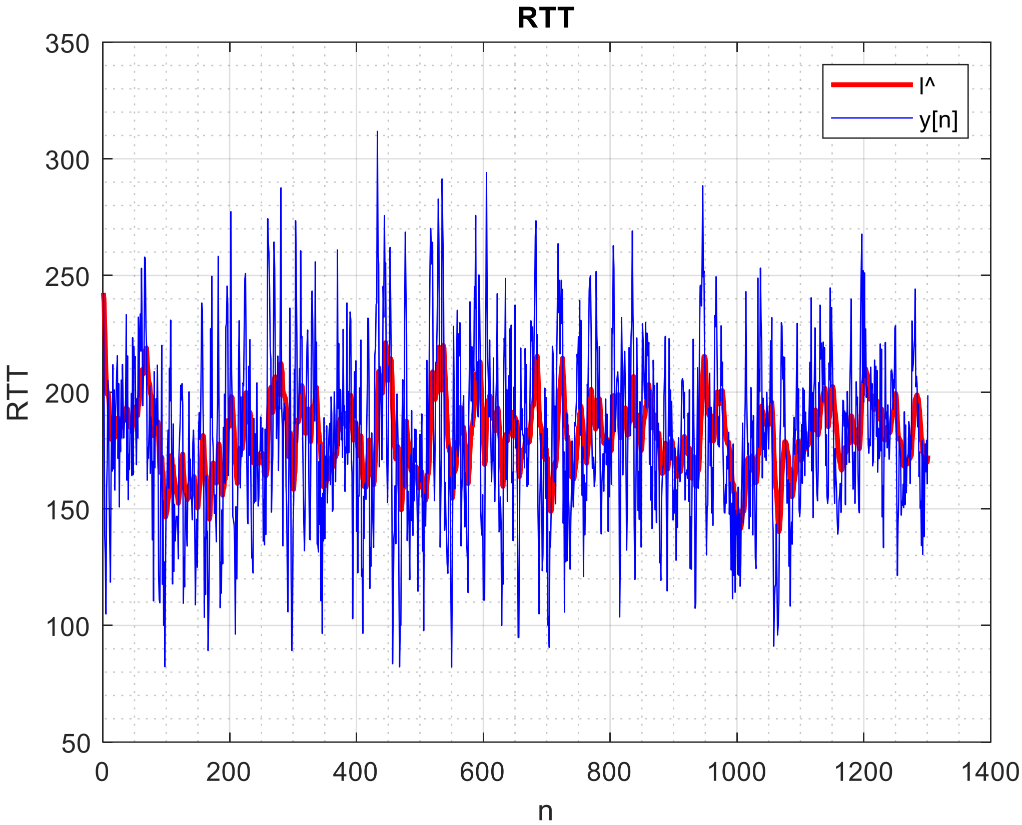
به ازای $\alpha = 0.7$



به ازای $\alpha = 0.8$



به ازای $\alpha = 0.9$

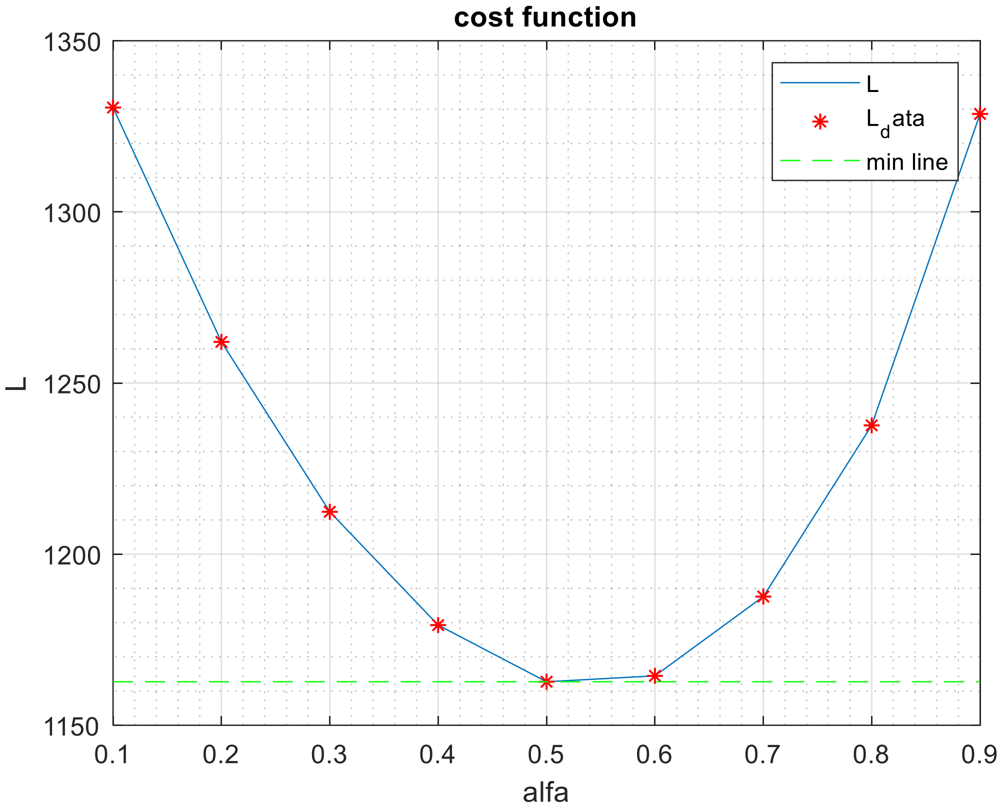


- اگر تعریف کنیم $L(\alpha) = \frac{1}{N_{samples}} \sum_{i=0}^{N_{samples}-1} \left(\hat{l}[i] - \bar{l}\right)^2 + \frac{1}{N_{samples}} \sum_{i=0}^{N_{samples}-1} \left(\hat{l}[i] - y[i]\right)^2$ نمودار $L(\alpha)$ برحسب α را برای مقادیر α از 0.1 تا 0.9 با گام 0.1 ترسیم کنید. رفتار این نمودار را به طور مختصر توضیح دهید. در رابطه‌ی $L(\alpha)$ داریم $\bar{l} := \frac{1}{N_{samples}} \sum_{i=0}^{N_{samples}-1} \hat{l}[i]$.

رابطه فوق را به راحتی از طریق کد زیر در متلب اجرا کردم. با استفاده از عملگر های موثر بر عناصر و با استفاده sum برای به دست آوردن میانگین روابط فوق را به آسانی با دو حلقه تو در تو در متلب به صورت زیر اجرا کردم.

```
alfa= [0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,...
    0.6,0.7,0.8,0.9];
for j=1:9
     for i=2:length(y)
        l_new(i) = alfa(j) * l_new(i-1) ...
            + ( 1 - alfa(j) ) * y(i);
     end
     mean = sum(l_new) / length(y);
     L(j)=sum((l_new - mean).^2) / length(y) ...
         + sum(( l_new - y).^2) / length(y);
end
```

نمودار مطلوب خواسته شده مطابق زیر است.



- با توجه به نمودار به دست آمده، بهترین مقدار α را با هدف کمینه کردن $L(\alpha)$ از بین مقادیر 0.1 تا 0.9 با گام 0.1 انتخاب کنید و α_* بنامید.

همان طور که واضح و مشخص شده است مقدار کمینه داریم:

$$\alpha_* = 0.5$$

۶. در این سوال فرض کنید که $\alpha = \alpha_*$ با استفاده از نتایج سوال ۴، تخمین بزنید باید انحراف معیار نویز موجود در مشاهدات چه‌قدر بوده باشد تا شرایط برابری گشتاورها که در آن سوال قید شده برقرار باشند. برای $R_l[1]$ هم فرض کنید می‌توان از

$$R_l[1] = \frac{1}{N_{samples} - 1} \sum_{i=0}^{N_{samples}-2} \hat{l}[i]\hat{l}[i+1]$$

استفاده کرد.

```
alfa= 0.5;
for i=2:length(y)
    l_new(i) = alfa * l_new(i-1) ...
```

```
            + ( 1 - alfa ) * y(i);
end
li1 = l_new(1 : length(l_new) -1);
li2 = l_new(2 : length(l_new) );
l_eq = li1 .* li2;

R = sum(l_eq) / length(l_new);
meany = sum(y)/length(y);
sigma = sum((y-meany).^2)/length(y);
var=(meany^2+sigma-R)*2*alfa/(1+alfa^2);
disp(var)
```

```
539.9180
```

از اجرای برنامه فوق مقدار انحراف از معیار نویز برابر با 539.918 میباشد.