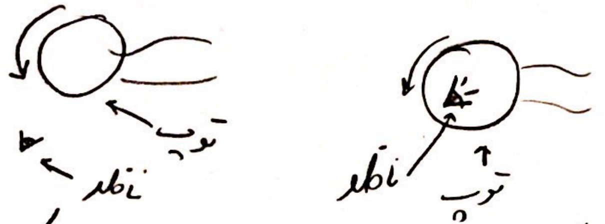
کسری خلفی 9523038 تمرین سری 5 رباتیک پیشرفته دکتر ایمان شریفی ص1

3) a) برای محاسبه‌ی ماتریس ممان اینرسی، ما ممان اینرسی را در دستگاه خود جسم حساب می‌کنیم زیرا روابط نسبت به حالت مبدأ مختصات به عنوان دستگاه محاسبات بسیار ساده‌تر است و لازم است تنها از فرمول های یاد شده در کتاب (یعنی مثلاً $I_{xy}=$ ...) استفاده کنیم. از لحاظ مفهومی هم دو شکل روبرو را در نظر بگیرید



در شکل راستی، ناظر روی توپ قرار دارد که همان مختصات دستگاه توپ می‌باشد که محاسبات بسیار ساده‌تر می‌شود ولی در سمت چپی ناظر از بیرون به توپ حرکت شده نگاه می‌کند که بسیار سخت‌تر ممان اینرسی محاسبه می‌شود. در نتیجه ممان اینرسی را در دستگاه مختصات متصل به جسم محاسبه می‌کنیم و سپس با تبدیل همانندی به دستگاه اینرسی مبدأ انتقال می‌دهیم. همچنین ممان اینرسی‌های ضربی برای مرکز جرم جسم متقارن صفر است

در تبدیل همانندی یا همان Similarity Transform، دترمینان، معادله مشخصه، و اگن ولیوها تغییر نمی‌کنند و از لحاظ فیزیکی، تبدیل همانندی بدین معنی است که ماتریس A که نشان دهنده‌ی یک تبدیل خطی در دستگاه x_0 است را به کمک تبدیل همانندی به هر دستگاه دیگر (از جمله صفر) می‌توان انتقال داد

b) یک جسم صلب دارای معادلات دیفرانسیل ode می‌باشد یعنی همه نقاط دارای ثابت یکسان هستند. در حالی که به جای لینک صلب، یک لینک انعطاف پذیر استفاده شود معادلات به PDE تبدیل می‌شود که هر نقطه از جسم دارای ثابت خاصی می‌باشد که می‌توان با قید کردن یک سری شروط سینماتیکی خاص، معادلات را ode در نظر گرفت

ربات سری RRR ②

$$\tau_1 = \cdots + I_1\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 + (m_3 L_2 L_3 C_3)\ddot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \cdots + I_2\ddot{\theta}_1 + I_3\ddot{\theta}_3 + m_3\left(L_2^2 + \frac{1}{4}L_3^2 + L_1L_2C_1 + L_2L_3C_3\right)\ddot{\theta}_2$$

$$\tau_3 = \cdots I_3\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_3\left(\frac{1}{2}L_3^2 + L_1L_3C_{23} + L_2L_3C_3\right)\ddot{\theta}_3 + \frac{1}{4}L_2^2\ddot{\theta}_2$$
$$+ m_3L_1L_3S_{23}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3L_3\,g\,C_{23} + m_3L_1L_3\theta_3\dot{\theta}_3$$

برای حل این سؤال میشود استدلال ستقیم کرد یا از واحدها کمک گرفت :

$m \rightarrow Kg$ $\quad l \rightarrow m$ $\quad F \rightarrow \frac{Kg.m}{s^2} = N$ $\quad \dot{\theta} \rightarrow \frac{rad}{s}$

$\tau = N.m = Kg\,\frac{m^2}{s^2}$ $\quad \ddot{\theta} = \frac{rad}{s^2}$ $\quad I = Kg.m^2$

$\tau_1 \Longrightarrow m_2L_1\ddot{\theta}_1 \Rightarrow$ واحد $= Kg.m.\frac{1}{s^2} \neq N.m$ ✗

بقیه ج، واحدهاشون درست است و میتوانند از لحاظ واحدی باشند

$\tau_2 \rightarrow$ از لحاظ واحدی مشکلی است همه

$\tau_3 \rightarrow \frac{1}{2}m_3L_3g \xrightarrow{\text{واحد}} Kg.m.\frac{N}{Kg.m} = N \neq N.m$ ✗

$m_3L_1L_3\theta_3\dot{\theta}_3 \Longrightarrow$ واحد $= Kg.m.m.rad.\frac{rad}{s} = Kg.\frac{m^2}{s} \neq N.m$ ✗

نمی‌توانند باشند

(۶) کنترل سینماتیکی زمانی قابل استفاده است که:

1. بتوان از جرم ها و ممان های اینرسی صرف نظر کرد

2- سرعت ها و شتاب ها بالا نباشند و پایین باشند

که اگر دو حالت بالا ارضا شود، دینامیک ربات حذف می شود و می توان تنها با سینماتیک کنترل کرد (اگرچه در عمل غیر ممکن است!)

اگر سرعت ها بالا باشند و جرم داشته باشیم کنترل شبه استاتیکی در نظر گرفته می شود:

$\sum F = ma$ ⟵ که اگر هر کدام از a یا m پایین باشند ⟵ می توان کنترل شبه استاتیکی انجام داد

معادلات سینماتیکی ارتباط بین موقعیت و جهت گیری مجری نهایی ربات را با سرعت های مفاصل تعیین می کند ولی معادلات دینامیکی ربات ارتباط بین موقعیت و جهت گیری مجری نهایی ربات را با نیروها و گشتاورهای موتورهای مفاصل تعیین می کند

---

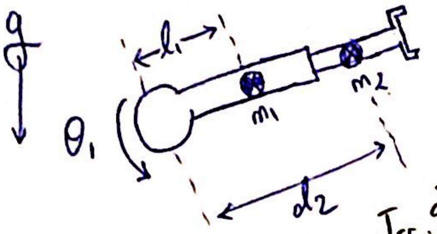
(8) الف) به خاطر این است که ربات در مینیمم مجازی گیر کرده است! به طوری که اصطلاحاً مجازی بالا برده یا ج می شود و باعث برگردی می شه و باعث میشه ربات در مینیمم محلی گیر کنه.

ب) برای شکل ها و عدد های داده شده مقدار زاویه تغییر نمی کند و فقط چند ضلع تغییر می کنه

ج) بله، می توان برای جلوگیری کیمیت گذاری کرد که با بالا بردن جهش همیشه در راستای گشتاور حرکت می کنیم

برای مانع دوم به جای 90، 270- هستند که از نقاط مکانی نهائی به جای شوند.

~~SCARA Robot~~ RP Robot



$$C_1 \quad I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

$$C_2 \quad I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \underbrace{v_{c_i}^T}_{J_{v_{c_i}} \dot{q}} v_{c_i} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T I_i \, {}^i\omega_i$$

که $J_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_1 S\theta_1 & 0 \\ l_1 C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2 \right) + \frac{1}{2} I_{zz2} \dot{\theta}_1^2$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} d_2 C\theta_1 \\ d_2 S\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{C_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial c_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial c_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial c_{22}}{\partial q_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ انرژی جنبشی $K = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2$

همان $\dot{q}_2^2$

$$u_i = -m_i \, {}^0g^T \, {}^0P_{c_i} + u_{ref_i} \quad , \quad L = K - u$$

$$\begin{cases} u_1 = m_1 l_1 g \sin(\theta_1) + m_2 g d_{2max} \\ u_2 = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2max} \end{cases}$$

بیشترین بازشدگی لینک

$$u(\theta) = u_1 + u_2 = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) S\theta_1 + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2max}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial K}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + m_2 d_2^2 + I_{zz2}) \dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} g \times (m_1 l_1 + m_2 d_2) C\theta_1 \\ g m_2 S\theta_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ادامه 5

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + m_2 d_2^2 + I_{zz_2})\ddot{\theta}_1 + 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ \tau_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1) \end{cases}$$

$$D = M = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C\dot{q} = V = \begin{bmatrix} 2 m_2 d_2 \dot{q}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(q_1) \\ m_2 g \sin(q_1) \end{bmatrix}$$

ج) برای شبیه سازی friction در معادله باید τ را از یک مقداری کم کرد ($B\dot{q}$) که معادل این است که در friction باعث حرکت کردن راحت و در نتیجه کاهش گشتاور با مقدار $B\dot{q}$ می‌شود

ب) برای پیدا کردن $\dot{\theta}$ ای که انرژی جنبشی مینیمم گردد از مشتق $= 0$ استفاده می‌شود!

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2 (d_2)} \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \dot{d}_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = 0 = (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1 + m_2 \dot{d}_2 = 0$$

از این معادله و صفر قرار دادن معادله نقطه‌ی مینیمم بدست می‌آید

---

۱) بسته به نحوه قرارگیری بازوها و مفاصل هر کدام از گزینه‌ها می‌توانند جواب باشند

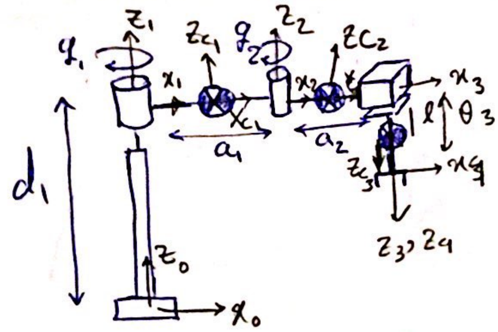
غلط

وابسته به نوع مسئله و جاگذاری

SCARA Robot

⑥

DH modified



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	a_1	0	θ_2
3	180	a_2	0	0
(4)EE	0	0	$l+\theta_3$	0

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l+\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1T_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2T_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^3T_{c_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \, ^0T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_2c_{12}+a_1c_1 \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & a_2s_{12}+a_1s_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^3T_{EE} = \, ^3T_4 = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & a_2c_{12}+a_1c_1 \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & a_2s_{12}+a_1s_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1-l-t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^0T_{c_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & \frac{a_1c_1}{2} \\ s_1 & c_1 & 0 & \frac{a_1s_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_{c_2} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & \frac{a_2c_{12}}{2}+a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & \frac{a_2s_{12}}{2}+a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^0T_{c_3} = \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & \frac{a_2c_{12}}{2}+a_1c_1 \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & \frac{a_2s_{12}}{2}+a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1-l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ادامه (6)

$$J_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1 s_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a_1 c_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_{c_2} = \begin{bmatrix} \frac{-a_2 s_{12}}{2} - a_1 s_1 & \frac{-a_1 s_1}{2} & 0 \\ \frac{a_2 s_{12}}{2} + a_1 c_1 & \frac{a_1 c_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{c_3} = \begin{bmatrix} -\frac{a_2 s_{12}}{2} - a_1 s_1 & -\frac{a_2 s_{12}}{2} & 0 \\ +\frac{a_2 c_{12}}{2} + a_1 c_1 & +\frac{a_2 c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m_1 v_{c_1}^T v_{c_1} + \frac{1}{2} m_2 v_{c_2}^T v_{c_2} + \frac{1}{2} m_3 v_{c_3}^T v_{c_3}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(m_1 J_{v_{c_1}}^T J_{v_{c_1}} + m_2 J_{v_{c_2}}^T J_{v_{c_2}} + m_3 J_{v_{c_3}}^T J_{v_{c_3}} \right) \dot{q} + \text{ماتریس عین قبلی}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\begin{bmatrix} m_1 a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} a_1^2 + a_1 a_2 c_2 + \frac{a_2^2}{4} & \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 a_2 c_2}{4} & 0 \\ \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 a_2 c_2}{4} & \frac{a_1^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) \dot{q}$$

$$\omega_1 = \dot{q}_1 K \; , \; \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) K \Rightarrow J\omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \; J\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I_3 \times 0 \right] \dot{q} = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 & 0 \\ I_2 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D = M = \begin{bmatrix} \overbrace{(m_1+m_2+m_3) a_1^2 + \left(a_1 a_2 c_2 + \frac{a_2^2}{4}\right)(m_2+m_3) + I_1 + I_2}^{d_{11}} & I_2 + (m_2+m_3)\left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 a_2 c_2}{4}\right) & 0 \\ \underbrace{I_2 + \left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1 a_2 c_2}{4}\right)(m_2+m_3)}_{d_{21} = d_{12}} & \underbrace{I_2 + \frac{a_1^2}{4}(m_1+m_2)}_{d_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{m_3}_{d_{33}} \end{bmatrix}$$

صفحه آخر (6)

$$C_{111} = \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$C_{121} = C_{211} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -(m_2+m_3)\left(\frac{a_1 a_2 S_2}{2}\right) = h$$ نامگذاری کرده

$$C_{221} = \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = -(m_2+m_3)\left(\frac{a_1 a_2 S_2}{4}\right) = \frac{h}{2}$$

$$C_{112} = \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -h$$

$$C_{122} = C_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = 0 \qquad C_{311} = 0 = C_{131} \quad C_{312} = C_{132} = 0$$

$$C_{3xy} = 0$$

$$C_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0$$

$$P_1 = m_1 g d_1 \;\&\; P_2 = m_2 g d_1 \;\&\; P_3 = m_3 g (d_1 - l + \theta_3)$$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3 = (m_1+m_2+m_3) g d_1 - m_3 g (l + \theta_3)$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0 \qquad \varphi_3 = \frac{\partial P}{\partial q_3} = -m_3 g$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0$$

معادله لاگرانژ $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q}\right) = L + \frac{\partial L}{\partial q}$

$$\rightarrow \tau_1 = \varphi_1 + d_{11}\ddot q_1 + d_{12}\ddot q_2 + C_{121}\dot q_1 \dot q_2 + C_{211}\dot q_2 \dot q_1 + d_{13}\ddot q_3 + C_{311}\dot q_3 \dot q_1 + C_{321}\dot q_3 \dot q_2 + \dots$$

به همین ترتیب

$$\begin{cases} \tau_1 = 0 + d_{11}\ddot q_1 + d_{12}\ddot q_2 + 2h\dot q_1 \dot q_2 + 0 \\ \tau_2 = 0 + d_{21}\ddot q_1 + d_{22}\ddot q_2 + (-h)\dot q_1^2 \\ \tau_3 = -m_3 g + d_{33}\ddot q_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} h\dot q_1 & h\dot q_2 & 0 \\ -h\dot q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

) 7) مدت 2 ثانیه — از صفر به 90 درجه & $V, a = 0$ در ابتدا و انتهای مسیر

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$q(0) = 0 \,,\; q(2) = 40 \leftarrow$ موقعیت اولیه و انتهایی

$\dot{q}(0) = \dot{q}(t_f = 2) = 0 \longleftarrow$ سرعت ابتدایی و انتهایی مسیر

$\ddot{q}(0) = \ddot{q}(2) = 0 \longleftarrow$ شتاب اولیه و انتهایی

$\Rightarrow q(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$q(2) = 40 \longrightarrow 40 = \cancel{2a_1} + \cancel{4a_2} + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5$ (I)

$= 5a_5 \times 16 = 0$ (II)

$\dot{q}(0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$ & $\dot{q}(2) = 0 = 3a_3 \times 4 + 4a_4 \times 8 + 5a_5 \times 16 = 0$ (III)

$\ddot{q}(0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_2 = 0}$ & $\ddot{q}(2) = 0 = 6a_3 \times 2 + 12a_4 \times 4 + 20a_5 \times 8 = 0$

سه معادله سه مجهول

$$\begin{cases} \text{(I)} \rightarrow & a_3 + 2a_4 + 4a_5 = 5 \\ = \text{(II)} \rightarrow & 3a_3 + 8a_4 + 20a_5 = 0 \xrightarrow{-} 20a_5 = -4a_4 \Rightarrow \boxed{a_4 = -5a_5} \\ \text{(III)} \rightarrow & 3a_3 + 12a_4 + 40a_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_3 = 50} \,,\; \boxed{a_4 = -37.5} \,,\; \boxed{a_5 = 7.5}$$

$$\Rightarrow q = 50t^3 - 37.5t^4 + 7.5t^5$$

ب) در صورتی که جرک هم اضافه گردد در ابتدا و انتها $= 0$، 2 پارامتر دیگر هم باید اضافه گردد که نتیجه مرتبه 7 می‌شوند معادلات

$q(0) = 0 \longrightarrow a_0 = 0$ $\quad \ddot{q}(0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_2 = 0}$

$\dot{q}(0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$ $\quad \dddot{q}(0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_3 = 0}$

$$q = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7$$

$$\begin{cases} q(2) = 40 & 40 = 16a_4 + 32a_5 + 64a_6 + 128a_7 \\ \dot{q}(2) = 0 & 0 = 4a_4 \times 8 + 5a_5 \times 16 + 6a_6 \times 32 + 7a_7 \times 64 \\ \ddot{q}(2) = 0 & 0 = 12a_4 \times 4 + 20a_5 \times 8 + 30a_6 \times 16 + 42a_7 \times 32 \\ \dddot{q}(2) = 0 & 0 = 24a_4 \times 2 + 60a_5 \times 4 + 120a_6 \times 8 + 210a_7 \times 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_4 \simeq -5.69 \\ a_5 \simeq 14.48 \\ a_6 \simeq -12.47 \\ a_7 \simeq 3.64 \end{cases}$$

ادامه ⑦ $\longrightarrow$ $$q(t) = -5.69t^4 + 14.48t^5 - 12.47t^6 + 3.64t^7$$

(ج) LSPB $\longrightarrow$ درجه ۲ $\rightsquigarrow$ $40^\circ \sim 0^\circ$ از & $V_{(0)} = V_{(t_f)} = 0$

$$q_{(t)}: \text{LSPB} \begin{cases} q_0 + \frac{a}{2}t^2 & 0 \leq t_1 \leq t_b \rightarrow t \leq \\ \frac{q_f + q_0 - Vt_f}{2} + Vt & t_b \leq t \leq t_f - t_b \\ q_f - \frac{at_f^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2}t^2 & t_f - t_b \leq t \leq t_f \end{cases}$$

چون پیوسته هستند در نقاط اتصال $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} q_0 + \frac{a}{2}t_b^2 = \frac{q_f + q_0 - Vt_f}{2} + Vt_b \\ \frac{q_f + q_0 - Vt_f}{2} + V(t_f - t_b) = q_f - \frac{at_f^2}{2} + at_f(t_f - t_b) \end{cases}$$

$\boxed{q_{(0)} = q_{(0)} = 0}$ & $\boxed{q_f = 40^\circ}$

$V_{(0)} = \dot{q}_{(0)} = 0 \qquad \dot{q}_{(t_f)} = \dot{V}_{(t_f)} = 0 \Longrightarrow \dot{q}_{(t_f)} = at_f - at = a(t_f - \overset{t_f}{t}) = 0$ ✓

$\hookrightarrow \dot{q}_{(t_0)} = at = at_0 = 0$ ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + \frac{a}{2}t_b^2 = \frac{40 - 2V}{2} + Vt_b \\ \frac{40 - 2V}{2} + V(2 - t_b) = 40 - \cancel{2a} \overset{+2a}{\cancel{+4a}} - 2at_b \end{cases} \longrightarrow$$

برای راحتی $t_b = 0.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} \times 0.25 = 20 - V + 0.5V \\ \cancel{20 - V} + 2V - 0.5V = \cancel{40} + 2a - 2a \times 0.5 \\ \quad 0.5V \qquad\qquad 20 \quad a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$V = \frac{680}{9} \simeq 75.5 \qquad a = \frac{160}{9} \simeq 17.7$$

$$\Rightarrow q = \begin{cases} 0 + \frac{17.7}{2}t^2 & \longleftarrow 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{40 - 75.5 \times 2}{2} + 75.5t & \longleftarrow 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ 40 - \frac{17.7 \times 4}{2} + 75.5 \times 2 \times t - \frac{17.7}{2}t^2 & \longleftarrow 1.5 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

IV 7

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}(t_f) = 0 \longrightarrow a_1 = 0 \quad \& \quad a_0 = \theta$$

$$\cancel{\dot{q}(t_f) = a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = 0}$$

$$\boxed{\dot{q}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = 0}$$

سرعت ماکزیمم $\longrightarrow \dot{\theta}_{max}$ & شتاب ماکزیمم

$$\ddot{q} = 2a_2 + 6a_3 t_f$$

$\xrightarrow{\text{if } a_3 > 0 \ \& \ a_2 > 0 \ \text{|| مثبت}} t = t_f$

$\xrightarrow{\text{if } a_3 < 0 \ \& \ a_2 \neq 0}$ $t = t_0$

مقید همیشه

با توجه به بالا معادله را حل می کنیم