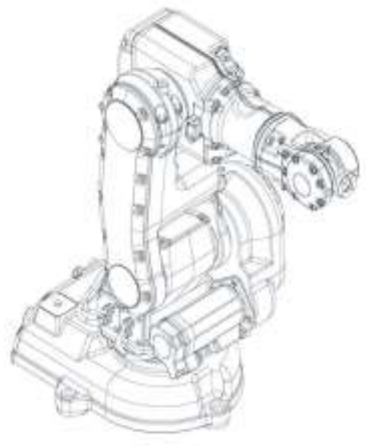
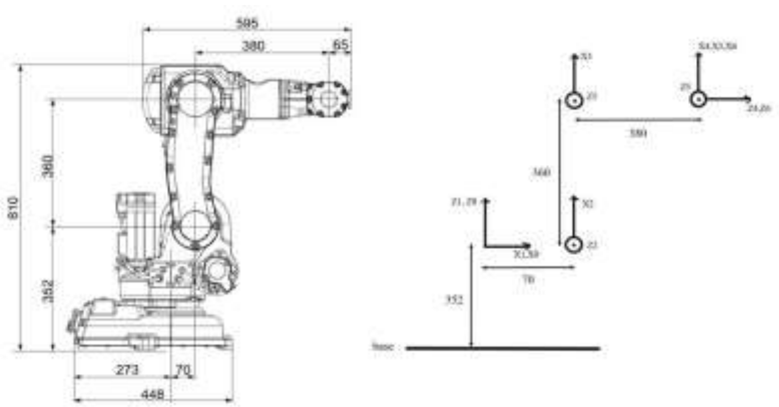
ربات IRB140 از شرکت ABB است که دارای ۶ درجه آزادی می‌باشد که همه مفصل‌های مورد استفاده در این ربات به صورت دورانی هستند. محورهای سه لینک انتهایی ربات در یک نقطه همدیگر را قطع کرده و به بیان دیگر ربات دارای مچ می‌باشد. این ویژگی باعث می‌گردد که سینماتیک معکوس ربات حل تحلیلی داشته باشد. در ادامه شکل ربات موردنظر را نشان می‌دهد.



تصویر شماتیک ربات IRB 140

فریم گذاری ربات و پارامترهای دناویت هارتنبرگ

بر اساس قراردادهای بررسی شده برای فریم گذاری بر روی مفاصل ربات، درشکل زیر فریم های موردنظر مشاهده می‌گردند.



فریم‌گذاری بر درجات آزادی ربات

پارامترهای دناویت هارتنبرگ نیز درجدول نشان داده شده است.

پارامترهای دناویت هارتنبرگ ربات

i	α_{i-1}	A_{i-1}	Θ_i	D_i
۱	۰	۰	Θ_1	۰
۲	۹۰	۷۰	$\pi/2+\Theta_2$	۰
۳	۰	۳۶۰	Θ_3	۰
۴	۹۰	۰	Θ_4	۳۸۰
۵	-۹۰	۰	Θ_5	۰
۶	۹۰	۰	Θ_6	۰

سینماتیک مستقیم

با اســتفاده از رابطه ۱-۱ می‌توان ماتریس تبدیل هر لینک را نسبت به لینک پیشین به دست آورد و در نهایت با ضرب ماتریس‌های به دست آمده، ماتریس تبدیل انتهای موثر را نسبت به مختصات پایه به دست آورد.

رابطه ۱-۱

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c\theta_i} & \boldsymbol{-s\theta_i} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{i-1}} \\ \boldsymbol{s\theta_i c\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{c\theta_i c\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{-s\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{-s\alpha_{i-1} d_i} \\ \boldsymbol{s\theta_i s\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{c\theta_i s\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{c\alpha_{i-1}} & \boldsymbol{c\alpha_{i-1} d_i} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} $$

بنابراین می‌توان ماتریس‌های تبدیل ربات را به صورت روابط ۱-۲ تا ۱-۷ استخراج نمود.

رابطه ۱-۲

$$ {}^{0}_{1}T=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

رابطه ۱-۳

$$ {}^{1}_{2}T=\begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

رابطه ۱-۴

$$ {}^{2}_{3}T=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 360 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$${}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -360 \\ s\theta_4 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ رابطه ۱-۵

$${}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ رابطه ۱-۶

$${}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ رابطه ۱-۷

برای به دست آوردن ماتریس تبدیل انتهای موثر نسبت به مختصات پایه نیز از رابطه ۱-۸ استفاده می‌شود.

$${}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T \; {}^{3}_{4}T \; {}^{4}_{5}T \; {}^{5}_{6}T$$ رابطه ۱-۸

$${}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ رابطه ۱-۹

ژاکوبین

برای به دست آوردن ماتریس ژاکوبین از روش سوم مطرح شده در کتاب استفاده می‌شود. از آن جایی که تمامی مفصـــل های ربات انتخاب شـــده برای این پروژه از نوع revolute هســـتند، ماتریس ژاکوبین از رابطه ۱-۱۰ به دست می آید.

$${}^{0}_{i}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z_i} \times (\boldsymbol{o_n} - \boldsymbol{o_i}) \\ \boldsymbol{z_i} \end{bmatrix}$$ رابطه ۱-۱۰

از آن‌جایی که می‌توان ماتریس ژاکوبین را به دو بخش ژاکوبین موقعیت و ژاکوبین جهت‌گیری تقسیم بندی کرد، هر کدام از این ژاکوبین‌ها در روابط زیر موجود هستند.

$$\boldsymbol{J_v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{j_{11}} & \boldsymbol{j_{12}} & \boldsymbol{j_{13}} & \boldsymbol{j_{14}} & \boldsymbol{j_{15}} & \boldsymbol{j_{16}} \\ \boldsymbol{j_{21}} & \boldsymbol{j_{22}} & \boldsymbol{j_{23}} & \boldsymbol{j_{24}} & \boldsymbol{j_{25}} & \boldsymbol{j_{26}} \\ \boldsymbol{j_{31}} & \boldsymbol{j_{32}} & \boldsymbol{j_{33}} & \boldsymbol{j_{34}} & \boldsymbol{j_{35}} & \boldsymbol{j_{36}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{j_{11} = -10sin((\pi\theta_1)/180)(38sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360) + 36cos((\pi(\pi + 2\theta_2))/360) + 7)}$$

$j_{12} = cos((\pi\theta_1)/180)(380cos((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360) - 360sin((\pi(\pi + 2\theta_2))/360))$

$j_{13} = 380cos((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)cos((\pi\theta_1)/180)$

$j_{21} = 10\cos((\pi\theta_1)/180)(38\sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360) + 36cos((\pi(\pi + 2\theta_2))/360) + 7)$

$j_{22} = sin((\pi\theta_1)/180)(380cos((pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360) - 360sin((\pi(\pi + 2\theta_2))/360))$

$j_{23} = 380cos((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)sin((\pi\theta_1)/180)$

$j_{31} = 0$

$j_{32} = 380sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360) + 360cos((\pi * (\pi + 2\theta_2))/360)$

$j_{33} = 380sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)$
$j_{14} = j_{15} = j_{16} = j_{24} = j_{25} = j_{26} = j_{34} = j_{35} = j_{36} = 0$

$$J_w = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \end{bmatrix}$$

$j_{11} = 0$

$j_{12} = sin((\pi\theta_1)/180)$

$j_{13} = sin((\pi\theta_1)/180)$

$j_{14} = sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)cos((\pi\theta_1)/180)$

$j_{15} = cos((\pi\theta_4)/180)sin((\pi\theta_1)/180) - sin((\pi\theta_4)/180)(cos((\pi\theta_1)/180)cos((\pi\theta_3)/180)cos((\pi(pi/2 + \theta_2))/180) - cos((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_3)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180))$

$$j_{16} = sin((\pi\theta_5)/180)(cos((\pi\theta_4)/180)(cos((\pi\theta_1)/180)cos((\pi\theta_3)/180)cos((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180) - cos((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_3)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)) + sin((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_4)/180)) + cos((\pi\theta_5)/180)(cos((\pi\theta_1)/180)cos((\pi\theta_3)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180) + cos((\pi\theta_1)/180)cos((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)sin((\pi\theta_3)/180))$$

$$j_{21} = 0$$

$$j_{22} = -cos((\pi\theta_1)/180)$$

$$j_{23} = -cos((\pi\theta_1)/180)$$

$$j_{24} = sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)sin((\pi\theta_1)/180)$$

$$j_{25} = -cos((\pi\theta_1)/180)cos((\pi\theta_4)/180) - sin((\pi\theta_4)/180)(cos((\pi\theta_3)/180)cos((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)sin((\pi\theta_1)/180) - sin((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_3)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180))$$

$$j_{26} = cos((\pi\theta_5)/180)(cos((\pi\theta_3)/180)sin((\pi\theta_1)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180) + cos((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)sin((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_3)/180)) - sin((\pi\theta_5)/180)(cos((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_4)/180) - cos((\pi\theta_4)/180)(cos((\pi\theta_3)/180)cos((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)sin((\pi\theta_1)/180) - sin((\pi\theta_1)/180)sin((\pi\theta_3)/180)sin((\pi(\pi/2 + \theta_2))/180)))$$

$$j_{31} = 1$$

$$j_{32} = j_{33} = 0$$

$$j_{34} = -cos((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)$$

$$j_{35} = -sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)sin((\pi\theta_4)/180)$$

$$j_{36} = sin((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)cos((\pi\theta_4)/180)sin((\pi\theta_5)/180) - cos((\pi(\pi + 2\theta_2 + 2\theta_3))/360)cos((\pi\theta_5)/180)$$

از آن‌جایی که ربات انتخاب شده دارای مچ کروی است، ماتریس ژاکوبین نهایی آن طبق آن‌چه که در کتاب آمده است به صورت رابطه ۱-۱۱ خواهد بود.

رابطه ۱-۱۱
$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

به دست آوردن نقاط تکین

برای به دســت آوردن نقاط و وضــعیت های تکین ربات کافی اســت دترمینان ژاکوبین برابر با صفر گردد و از آن جایی که ماتریس ژاکوبین به شکل رابطه فوق نوشته می شود، کافی است برای به دست آوردن نقاط تکین رابطه ۱-۱۲ برقرار باشد.

رابطه ۱-۱۲
$$\det(J_{11}) = 0 \quad , \quad \det(J_{22}) = 0$$

بدین ترتیب معادلات نقاط تکین به صورت رابطه ۱-۱۳ تا ۱-۱۴ خواهند بود.

رابطه ۱-۱۳
$$1368000\cos\left(\frac{\pi\theta_3}{180}\right)\left(38\cos\left(\frac{\pi(\theta_2+\theta_3)}{180}\right) - 36\sin\left(\frac{\pi\theta_2}{180}\right) + 7\right) = 0$$

رابطه ۱-۱۴
$$-380\cos\left(\frac{\pi(\theta_2+\theta_3)}{180}\right)\sin\left(\frac{\pi\theta_5}{180}\right) = 0$$

تحلیل فیزیکی وضعیت‌های تکین

الف) یک از وضــعیت‌های تکین که معادله دوم به دســت می‌آید، زمانی رخ می‌دهد که θ_5 برابر با صــفر یا ۱۸۰ درجه باشــد. از آن‌جایی که ســه زاویه انتهایی ربات که تشــکیل دهنده مچ ربات هســتند طبق زوایای اویلری به صورت zyz هستند، در صورتی که زاویه لینک پنجم برابر با صفر شود، محور لینک‌های چهارم و ششم در یک راستا قرار می‌گیرند و در عمل یکی از درجات آزادی ربات حذف می‌شود.

ب) وضعیت دوم سینگولار که از معادله دوم به دست می‌آید زمانی رخ می‌دهد که $\theta_2 + \theta_3$ برابر با ۹۰ درجه شود. به عبارت دیگر زمانی که لینک سوم در وضعیت قائم نسبت به افق قرار می‌گیرد، ربات در وضعیت سینگولار خود می‌باشد.

پ) وضعیت دیگری که ربات در حالت سینگولار است و از معادله اول به دست می‌آید، زمانی رخ می‌دهد که θ_3 برابر با ۹۰ درجه گردد. در این وضعیت لینک سوم در امتداد لینک دوم قرار می‌گیرد. در این حالت موقعیت end effector بر روی مرز محیط کاری ربات است که این حالت از وضعیت‌های سینگولار به حساب می‌آید.

به‌دست آوردن معادلات دینامیک در فضای مفصلی

برای به دســـت آوردن معادلات دینامیک ربات از روش لاگرانز اســـتفاده می شـــود . ماتریس M در این روش با استفاده از رابطه ۱-۱۵ به دست می‌آید.

رابطه ۱-۱۵ $$M = \sum_{i=1}^{6} m_i J_{vci}^T J_{vci} + J_{wi}^T R_i I_{ci} R_i^T J_{wi}$$

که در رابطه ۲-۶ m_i جرم هر لینک، J_{vci} ژاکوبین موقعیت مرکز جرم هر لینک، I_{ci} ممان اینرسی هر لینک حول مرکز جرمشان و R_i ماتریس تبدیل جهت گیری است.

پس از به دست آمدن ماتریس M می‌توان ماتریس C را طبق رابطه ۱-۱۶ به دست آورد.

رابطه ۱-۱۶ $$C_{ijk} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k}\}$$

که در این رابطه مقادیر k, i, j از یک تا شش هستند.

برای به دست آوردن ماتریس G ابتدا باید انرژی پتانسیل هر لینک به دست آید. بدین منظور انرژی پتانسیل هر لینک عبارت است از حاصل ضرب g در جرم هر لینک و فاصله قائم مرکز جرم هر لینک تا مبدا. در فریم گذاری انتخاب شـده برای ربات، فاصـله قائم مرکز جرم هر لینک برابر اسـت با درایه ستون چهارم و سطر سوم ماتریس تبدیل مرکز جرم هر لینک.

ســپس انرژی پتانســیل تمامی لینک‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند و بدین ترتیب طبق رابطه ۱-۱۷ ماتریس G به دست می‌آید.

رابطه ۱-۱۷ $$G_k = \frac{\partial P}{\partial \theta_k}$$

در نهایت معادلات دینامیکی سیستم و همچنین گشتاورهای موجود در هر لینک از رابطه ۱-۱۸به دست می‌آید.

رابطه ۱-۱۸ $$\sum_j m_{kj}\ddot{\theta}_j + \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} C_{ijk}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j + G_k(\theta) = \tau_k$$

به دست آوردن معادلات دینامیک در فضای کارتزین

با تبدیل مناسب ماتریس‌های M ، G و V معادلات دینامیک سیستم به رابطه ۱-۱۹ تبدیل خواهند شد.

رابطه ۱-۱۹ $$M_x(\theta)\ddot{X} + V_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) = F$$

بدین منظور می‌توان ماتریس‌های معادلات دینامیک سیستم را به صورت روابط ۱-۲۰ تا ۱-۲۲ تبدیل نمود.

رابطه ۱-۲۰ $$M_x(\theta) = J^{-T}(\theta)M(\theta)J^{-1}(\theta)$$

$$V_x(\theta,\dot{\theta}) = J^{-T}(\theta)(V(\theta,\dot{\theta}) - M(\theta)J^{-1}(\theta)\dot{J}(\theta)\dot{\theta})$$ رابطه ۱-۲۱

$$G_x(\theta) = J^{-T}(\theta)G(\theta)$$ رابطه ۱-۲۲

شبیه‌سازی معادلات دینامیکی

برای شبیه‌سازی از مقادی زیر استفاده شود.

مشخصات لینک اول

$X_{c1}= 10$	$Y_{c1}=0$	$Z_{c1}=-200.4$	$M_1=16287$	$I_{xx1}=1400701161$
$I_{yy1}=1360017420$	$I_{zz1}=1360017420$	$I_{xy1}=20700588$	$I_{xz1}=145213376$	$I_{yz1}=220271540$

مشخصات لینک دوم

$X_{c2}= 180$	$Y_{c2}=0$	$Z_{c2}=0$	$M_2=7580$	$I_{xx2}=2515712063$
$I_{yy2}=2454250058$	$I_{zz2}=137288713$	$I_{xy2}=-42758235$	$I_{xz2}=253228718$	$I_{yz2}=-403583352$

مشخصات لینک سوم

$X_{c3}= 0$	$Y_{c3}=-90$	$Z_{c3}=0$	$M_3=8030$	$I_{xx3}=4039217155$
$I_{yy3}=4164863641$	$I_{zz3}=150959769$	$I_{xy3}=2389617$	$I_{xz3}=506243283$	$I_{yz3}=42223519$

مشخصات لینک چهارم

$X_{c4}= 0$	$Y_{c4}=0$	$Z_{c4}=-20$	$M_4=1770$	$I_{xx4}=897284253$
$I_{yy4}=1158796159$	$I_{zz4}=265864124$	$I_{xy4}=-1021758$	$I_{xz4}=480028086$	$I_{yz4}=-1528307$

مشخصات لینک پنجم

$X_{c5}= 0$	$Y_{c5}=-30$	$Z_{c5}=0$	$M_5=145$	$I_{xx5}=73826024$
$I_{yy5}=103161590$	$I_{zz5}=29363661$	$I_{xy5}=40344$	$I_{xz5}=46480089$	$I_{yz5}=63931$

مشخصات لینک ششم

$X_{c6}= 0$	$Y_{c6}=0$	$Z_{c6}=60$	$M_6=25$	$I_{xx6}=13110021$

$I_{yy6}=19629949$	$I_{zz6}=6526028$	$I_{xy6}=0$	$I_{xz6}=9243052$	$I_{yz6}=0$

باید توجه گردد که مقادیر ممان‌های اینرسی در جداول بالا بر حسب $g.mm^2$ ، مقادیر جرم‌ها بر حسب g و طول‌ها در واحد mm هستند. بدین منظور برای تبدیل واحدها به واحدهای استاندارد، ماتریس‌های M و V در $۱۰^{-۹}$ و ماتریس G در ۰,۰۰۰۰۰۱ ضرب می‌شوند.