Aufgabe IV.10.34

Seien $\mathbb{R}_+ := [0, \infty]$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n := \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}$

$$\sin(e^x), 1, x^2 \text{ stetig } \xRightarrow[IV.4.3]{IV.4.2(c)} f_n \text{ messbar} \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \lim_{n\to\infty} f_n = 0 =: f \text{ punktweise, da } \sin(e^x), 1, x^2 \text{ fest, und } \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ : |f_n| \geq |f_{n+1}| \text{ punktweise.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : |\sin(e^x)| \leq 1 \Rightarrow |f_n| \leq \frac{1}{1+nx^2} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{Wähle } g := \frac{1}{1+x^2} \textit{ (die oberen Schrank von } f_1\textit{)}$$

$$\text{Dann ist } g \text{ integrierbar und } |f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

$$\xRightarrow[IV.6.2]{(1),(2),(3)} \int_{\mathbb{R}_+} |f_n - f| dx = \int_{\mathbb{R}_+} |f_n - 0| dx = \int_{\mathbb{R}_+} |f_n| dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \blacksquare$$

Aufgabe IV.10.35

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx, \ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \lambda\text{-integrierbar}$$

Warum ist $\hat{f}$ wohldefiniert?

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R} : & e^{-ixy} \ \lambda\text{-integrierbar} \\
\forall x \in \mathbb{R} : & f(x) \ \lambda\text{-integrierbar} \\
& \text{Seien } \ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig, mit } y_1 = y_2 \\
& \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy_1} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy_2} f(x) dx \\
& \Rightarrow \hat{f}(y_1) = \hat{f}(y_2)
\end{aligned}$$

(*) Das Integral ist nur auf y abhängig, da es auf ganzen $\mathbb{R}$ über x integriert. So ist $\hat{f}$ auch nur auf y abhängig.

Ist $\hat{f}$ stetig?

Da e^{-ixy} 2π-periodisch ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy}f(x)dx \ \forall x,y \in \mathbb{R}\ (y\ punktweise)$$

$$\xRightarrow[\forall x,y\in\mathbb{R}]{|e^{-ixy}|\leq 1} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ix(y+h)}f(x)dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy}f(x)dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi ix(y+h)} - e^{-2\pi ixy})f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left|(e^{-2\pi ixh}-1)\right| |f(x)|\, dx \xrightarrow{h\to 0} 0 \tag{4}$$

Man kann $h := \dfrac{2\pi}{n}$ wählen, und die Folge messbarer (da integrierbar)

$\hat{f}_n := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixh}f(x)$ konstruieren, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixh}f(x)dx = \hat{f} \text{ existiert.} \tag{5}$$

$$\xRightarrow[IV.6.2]{(4),(5)} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi ix(y+h)} - e^{-2\pi ixy})f(x)dx\right| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$\Rightarrow \hat{f}$ stetig, sogar gleichmäßig. ■

Aufgabe IV.10.36

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $f(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ für $0<s\leq 1$ und $f(s) = 0$ sonst definiert. Zeige, dass f messbar ist, und berechne $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Seien $A := (0,1]$ und $B := (-\infty, 0] \cap (1,\infty)$

$$f_A : (0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \xRightarrow{IV.4.2(c)} f_A\ \mathscr{B}orel-messbar \text{ auf } A$$

$$f_B : (-\infty,0]\cap(1,\infty) \to \mathbb{R} \text{ stetig} \xRightarrow{IV.4.2(c)} f_B\ \mathscr{B}orel-messbar \text{ auf } B$$

$$\Rightarrow f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mathscr{B}orel-messbar$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(s)d\lambda(s) &= \int_A f(s)d\lambda(s) + \int_B f(s)d\lambda(s)\\
&= \int_A \frac{1}{\sqrt{s}}\, d\lambda(s) + \int_B 0\ d\lambda(s)\\
&= 2\sqrt{s}\ |_0^1 + 0\\
&= 2 - 0\\
&= 2
\end{aligned}$$