1 Aufgabe IV.10.12

Sei $\mathscr{R} = \{A \subset \mathscr{R} : A \text{ oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ ist endlich}\}$; dies ist ein Ring. Ferner seien $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ durch:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls A endlich} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls A endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

1.a μ_1 und μ_2 sind Prämaße auf $\mathscr{R}$

μ_1 ist Prämaß:
In $\mathscr{R}$ gilt: A endlich $\iff$ $\mathbb{R} \setminus A$ überabzählbar.

$\forall A_1, A_2, ... \subset \mathscr{R}$ paarweise disjunkt gilt:

Es muss genau eine unendliche Teilmenge $A_n \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n, N \in \mathbb{N}$ existiern.

Zu paarweise verschiedene A_n muss es mindestens eine solche Folge entstehen, weil es keine paarweise disjunkte unendliche Folge von endlichen A_n geben kann, die selbst nicht unendlich ist.

(*)Aber es kann auch keine $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von endlichen A_n geben, die unendlich ist, weil $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\complement}$ endlich mit $A_n^{\complement}$ überabzählbar heißt $\exists \varepsilon{>}0$ sodass $\varepsilon{<}d(A_n^{\complement}, A_j^{\complement}) \subset A_n$ aber A_n endlich. Somit folgt die Widerspruch (diesletztes gilt auch für beliebigen A_n)

Nach dem einer entsteht, kann keine unendliche paarweise verschiedene Element $A_n \subset \mathscr{R}$ noch entstehen, da $\mathbb{R} \setminus A_n$ endlich ist.

Somit folgt die Behauptung: $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu_1(A_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0; N{<}\infty$

μ_2 ist Prämaß:
Genau dasselbe gilt für μ_2 wie für μ_1, aber mit ∞ statt 1.

1.b Bestimme die zugehörigen äußeren Maße μ_1^* und μ_2^* sowie die μ_1^*- bzw. μ_2^*- messbaren Mengen.

Nach dem Theorem IV.3.5:

$$\mu_1^*(A) = \mu_1(A) \text{ bzw } \mu_2^*(A) = \mu_2(A)\ \forall A \subset \mathscr{R}$$

$$\mu_1 : \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \{0,1\} \Rightarrow \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \leq \infty$$

$$\text{wenn } \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \Rightarrow 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \text{ bzgl:}(*)$$

$$\mu_2 : \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(A_j) \leq \infty$$

$$\text{wenn } \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = 0 \text{ sonst ist es } \infty$$

$\forall\ Q \subset \mathbb{R} : A \subset \mathbb{R}$ ist μ_1^*-messbar $\iff \mu_1^*(Q) = \mu_1^*(Q \cap A) + \mu_1^*(Q \cap A^{\complement})$

Sei $(Q \cap A) = \emptyset \Rightarrow (Q \cap A^{\complement}) = Q$ Ohne Einschränkung $\Rightarrow \mu_1^*(Q) = \mu_1^*(Q) + 0$

Sei A endlich $\Rightarrow (Q \cap A)$ endlich Ohne Einschränkung $\Rightarrow$

$\mu_1^*(Q) = 0 + \mu_1^*(Q \cap A^{\complement}) \Rightarrow 0$ wenn Q endlich, 1 wenn nicht

Das Analog gilt für μ_2^* mit ∞ anstatt 1

$\Rightarrow A \subset \mathbb{R} : \mu_1^*$- und μ_2^*-messbar

1.c Diskutiere die Eindeutigkeit der Fortsetzung von μ_i zu Maßen auf $\sigma(\mathscr{R})$ bzw. $\mathscr{M}_{\mu_1^*}$

Nach dem Theorem IV.3.5 gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\overline{\mu}_1$ bzw $\overline{\mu}_2$ auf einem auf $\mathscr{R}$ erzeugten $\sigma - Algebra$. Da $\forall A \subset \mathbb{R}\ A\ \mu_1^*$- und μ_2^*-messbar ist, können wir die μ_1^* bzw μ_2^* Prämaßen auf $\sigma(\mathscr{R})$ einschränken und sogar μ_1 und μ_2 als eindeutige Maßen auf $\mathscr{M}_{\mu_1^*}$ bzw $\mathscr{M}_{\mu_2^*}$ fortsetzen.

Da unsere Menge $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(S)$ der Ring der endlichen Teilmenge von S ist mit der trivialen Inhalt $\mu = 0$, gibt es die eindeutige Fortsetzungen von μ_1 und μ_2.

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls A abzählbar} \\ 1 & \text{falls A überabzählbar} \end{cases}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls A abzählbar} \\ \infty & \text{falls A überabzählbar} \end{cases}$$

In unserem Fall entsteht die Eindeutigkeit der Maßen auf der Tatsache, dass die Maßen endliche Maße sind. Da wenn wir nehmen zwei Maßen μ und ν auf einer Erzeuger von unser σ-algebra $\mathscr{E}$ nehmen, dann stimmen sie über $\mathscr{E} \cup \{S\}$ überein.

Aber verallgemeine wenn Seien zwei σ endliche Maßen auf einem $\cap$-Stabilen Erzeuger von einer σ-Algebra, dann stimmen sie überein.

2 Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei S die Menge ihrer Stetigkeitspunkte. Die Oszillationsfunktion zu f ist durch:

$$\omega_f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : \|y_i - x\|<\varepsilon\}$$

erklärt.

2.a Beschreibe S mit Hilfe von ω_f

$$\begin{aligned}
&S = \{x : \omega_f(x) = 0\} \\
&f stetig \Rightarrow \forall \epsilon>0\ \exists \varepsilon>0 : \\
&\|y_i - x\|<\varepsilon \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)|<\epsilon
\end{aligned}$$

ω_f ist als die größte unteren Schränke nach ε von der kleinsten obere Schränke von $|f(y_1) - f(y_2)|$ definiert. Es nimmt ein x an und gibt das Infimum der beliebigen ε offene Teilmenge an der Stelle $x \in \mathbb{R}^d$ von allen Supremums der Wertbereich $\mathbb{R}$ zu diesem x aus.
f ist genau dann stetig in x, wenn $\forall \epsilon>0$ eine solche ε existiert sodass$\|y_i - x\|<\varepsilon$
$\Rightarrow 0 \leq |f(y_1) - f(y_2)|<\epsilon$
$\Rightarrow$ 0 ist die größte untere Schränke der Supremums wenn f stetig an der Stelle x ist.

2.b $\{x : \omega_f(x)<r\}$ ist für alle $r \in \mathbb{R}$ offen

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R}^d : \omega_f(x)<r\} \\
=&\{x \in \mathbb{R}^d : \inf_{\varepsilon>0} \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : \|y_i - x\|<\varepsilon\}<r\} \\
\supset&\{x \in \mathbb{R}^d : \|y_i - x\|<\varepsilon\} \\
\Rightarrow&\forall r>0 : \inf_{\varepsilon>0} \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : \|y_i - x\|<\varepsilon\}<r \\
\Rightarrow&|f(y_1) - f(y_2)|<r\ \forall y_i\ : \|y_i - x\|<\varepsilon\ \forall \varepsilon<0 \\
\Rightarrow&\forall r>0\ \exists B_\varepsilon(x) \Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^d : \omega_f(x)<r\} \text{ ist offen}
\end{aligned}$$

2.c Zeige, dass S eine Borelmenge ist

Mit der Prinzip der guten Menge:

$$\text{Sei } \mathscr{A} = \{S \subset \mathscr{B}(S) : \lambda^d(S) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(I_j) \text{ wobei } \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \supset S\}$$

Nun ist zu zeigen, dass $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra ist:

$\emptyset \subset \mathscr{A} : \lambda^d(\emptyset) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(I_j)$ wobei $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \supset \emptyset \Rightarrow \lambda^d(\emptyset) = 0$

$S \subset \mathscr{A} : \lambda^d(S) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(I_j)$ wobei $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \supset S.$

Das ist klar, weil S offen ist, und jede offene Menge eine offene Überdeckung hat.

$S \subset \mathscr{A} \Rightarrow S^{\complement} \subset \mathscr{A}$: Da S offen ist, ist $S^{\complement}$ abgeschlossen. Und $\forall$ $S^{\complement}$ absgeschlossen gilt:

$\exists \bigcup B_\varepsilon$ offen $\supsetneq S^{\complement}$ mit $\lambda^d(S^{\complement}) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(B_\varepsilon)$

$(S_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} : S_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k,j}$ mit $\lambda^d(S_k) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(I_{k,j})$

$\Rightarrow \lambda^d(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda^d(I_{j,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^d(S_k) + \varepsilon$ für beliebig kleine ε

$\Rightarrow \lambda^d(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(I_{j,k}) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \subset \mathscr{A}$

$\Rightarrow \mathscr{A}$ ist $\sigma - Algebra$ und $S \subset \sigma(S) \subset \mathscr{B}(S) \subset \mathscr{A}$

$\Rightarrow S$ ist eine Borel Menge.

3 Aufgabe 3

Seien α>0 und ε>0. Definiere Mengenfunktionen $h_{\alpha,\varepsilon}$ und h_α auf $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ durch:

$$h_{\alpha,\varepsilon}(A) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^\alpha$$

wobei sich das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen $A \subset \bigcup_j E_j$ durch Mengen vom Durchmesser $\operatorname{diam}(E_j) \leq \varepsilon$ erstreckt wird, bzw.

$$h_\alpha(A) = \sup_\varepsilon h_{\alpha,\varepsilon}(A)$$

Zeige, dass $h_{\alpha,\varepsilon}$ und h_α äußere Maße sind. (h_α heißt das α-dimensionale Hausdorffmaß. Man kann zeigen, dass jede Borelmenge h_α-messbar ist und dass h_d, eingeschränkt auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, ein Vielfaches des Lebesguesmaßes λ^d ist.)

3.a $h_{\alpha,\varepsilon}$ und h_α sind äußere Maße

$$h_{\alpha,\varepsilon}(A) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^\alpha \text{ mit } diam(E_j) \leq \varepsilon$$

$$\emptyset \subset \mathbb{R}^d : h_{\alpha,\varepsilon}(\emptyset) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j))^\alpha \text{ wobei } \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset \emptyset \Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(\emptyset) = 0$$

$$A \subset B ... \subset \mathbb{R}^d : \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j A))^\alpha \leq \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_j B))^\alpha$$

$$\text{wobei } \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j A \supset A \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j B \supset B \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j B \supset A \Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(A) \leq h_{\alpha,\varepsilon}(B)$$

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d : A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k_j} \text{ mit } h_{\alpha,\varepsilon}(A_k) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_{k_j}))^\alpha \geq \sum_{j=1}^{\infty} (diam(E_{k_j})) - \epsilon$$

$$\Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{\alpha,\varepsilon}(E_{jk}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} h_{\alpha,\varepsilon}(A_k) + \epsilon \text{ für beliebig kleine } \epsilon$$

$$\Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} h_{\alpha,\varepsilon}(E_{k_j}) \Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon} \text{ ist ein äußeres Maß}$$

$$h_\alpha(A) = \sup_\varepsilon h_{\alpha,\varepsilon}(A)$$

$$\Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(A) + \varepsilon \leq h_\alpha(A)$$

$$\Rightarrow h_{\alpha,\varepsilon}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k_j}) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{\alpha,\varepsilon}(E_{j_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} h_\alpha(A_k) - \varepsilon$$

$\Rightarrow h_\alpha$ ist ein äußeres Maß .