Université NAZI BONI
ESI-L2

Année académique: 2021-2022
Janvier 2022

TD 1: Déterminants et systèmes linéaires

Exercice 1

Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A_m.
2. Préciser le rang de A_m en fonction du paramètre réel m.
3. On considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ admettant A_m comme matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quel est le rang de f_m ? Pour quels réels m, f_m est-il un isomorphisme?
4. On considère le système linéaire:

$$(\mathcal{S}_m)\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

(a) Sans aucun calcul supplémentaire, pour quels réels m sommes nous assurés que ce système admettra une unique solution?
(b) Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Discuter les systèmes suivants d'inconnue (x, y, z) selon les valeurs des paramètres réels a, m.

$$\begin{cases} (4+m)x-y+z=-1 \\ (2+m)y+4z-2x=-3 \\ (9+m)z-4x-y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. Etudier le rang de A en fonction des paramètres réels a, b.

Exercice 4

1. Sans calculer, montrer que $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ est un entier divisible par 6.

2. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$ où $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ sont des complexes quelconques.

Exercice 5

Une usine récupère 3 types d'alliages de récupération. Elle les fond, les mélange, et compose d'autres alliages. Les compositions des 3 alliages récupérés sont les suivantes:

type	fer	nickel	cuivre
alliage A	10%	20%	70%
alliage B	30 %	40%	30%
alliage C	80%	10%	10%

1. L'usine a reçu une commande de 100 tonnes d'alliages contenant 34% de fer, 28% de nickel et 38% de cuivre. Combien de tonnes de chaque alliage récupéré faut-il mélanger pour satisfaire cette commande?
2. L'usine peut-elle fabriquer de cette manière un alliage contenant 69% de fer, 23% de nickel et 8% de cuivre?

Exercice 6

Discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) selon la valeurs du paramètres réel m.

$$\begin{cases} (m-1)x+my+z=m+1 \\ mx+2y+3z=3 \\ (m+1)x+my+(m-1)z=m-1 \end{cases}$$

Université Nazi BONI
ESI-L2

Année académique: 2020-2021
Novembre 2021

TD 1: Diagonalisation et trigonalisation

Exercice 1

1. Discuter et résoudre suivant la valeur de m le système linéaire suivant:

$$(S_m)\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -m \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le pôlynome caractéristique et les valeurs propres de f.
b. Déterminer des bases pour les sous espaces de f.
c. Indiquer les valeurs de m pour les quelles f est diagonalisable et trouver une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ dans laquelle la matrice de f est diagonalisable.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est: $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous-espaces propres.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et donner la matrice de f dans cette base.
6. on considère les trois suites numériques u, v et w définient simultanément par les conditions: $u_0=-2$, $v_0=1$, $w_0=5$ et pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} u_{n+1}=4u_n-3v_n-3w_n \\ v_{n+1}=3u_n-2v_n-3w_n \\ w_{n+1}=3u_n-3v_n-2w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 3

Trigonaliser les matrices suivantes:
$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est: $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres de A.
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de f est triangulaire? Si oui, donner une telle base. On notera cette matrice T.
3. Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T=D+N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice nilpotente.
4. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$, puis pour $n\in\mathbb{Z}$.

NB: *Une matrice N est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $N^k=0$.*