


Witty Mathematics

妙趣橫生的數學

樸實的詮釋各種數學概念和方法，涵蓋微積分、線性代數、概率論與數理統計、複變函數、數論、機器學習以及學校裡不常講但很有趣的內容。結合自然科學和程式實驗的實例，帶給大家更多角度的數學物理方法理解和妙趣橫生的思考感受。本書亦可作為從中學到研究生和日常科研開發工作的通用參考工具書。

劉蒙恩 （Alex Park） 編

第 0 節 運算、初等函數、函數圖形及其變換

我們在日常生活中經常使用四則運算：加減乘除，這可能是很多人學習了多年數學以後唯一在生活裡經常用到的部分，而實際上那些數學家和資料科學家用到的看起來高深複雜的方法，也不外乎從這些樸實平凡的基礎一點點構建而來。接下來，我們從最簡單的常識開始，逐步深入，探尋各種數學物理方法和自然科學原理的本質及其千絲萬縷的聯繫。在我們漫長的旅途中，隨著我們不斷問為什麼的好奇心，揭開一個個故事和方法。那些科學發展歷史上塵封的偉人足跡，奠定了我們地球人類今天科技文明的基礎。

日常生活中用到的數學，都是為了解決某些實際問題。而解決某些問題，往往是**通過一定的運算獲得結果**。例如我們去菜市場買菜，帶了一張二十元的紙幣，根據當天的口味買了幾棵青菜，付給菜販二十元以後，要找零錢。這時，菜販要計算一下找多少錢，他用（$20-菜的价格$）得到找零多少。

輸入菜價	運算	輸出找零多少
例如買了2元大蔥的話	$20-2$	找零18元
例如買了3.5元青椒的話	$20-3.5$	找零16.5元
例如買了5.8元番茄的話	$20-5.8$	找零14.2元
例如想買21元的西蘭花	買不起不用算	沒買不存在找零

我們來看什麼是**函數**。一般簡單直觀的理解，函數就是一種運算關係，輸入一個或幾個值，得到輸出的一個確定值（注意，**得到的輸出是唯一的確定的**）。

看剛才買菜的例子，假設所購買蔬菜的價格為x，在帶著一張20元鈔票去買菜的情況下，找零多少對於所購買蔬菜價格的函數就是$20-x$。我們把找零錢多少這個函數記作$f(x)$的話，$f(x)=20-x\,,x\leq 20$。這個函數在輸入所購買蔬菜價格後，可以唯一確定的給出應該找零多少錢，如下表所示。這是一個一元（一個輸入）一次（輸入的最高乘方次數是 1）函數。

輸入	函數關係	輸出
$x=2$	$f(x)=20-x\,,x\leq 20$	$f(x)=18$
$x=3.5$	$f(x)=20-x\,,x\leq 20$	$f(x)=16.5$
$x=5.8$	$f(x)=20-x\,,x\leq 20$	$f(x)=14.2$
$x=21$ （不在定義域內，無法計算）	$f(x)=20-x\,,x\leq 20$	沒有輸出

我們再多舉幾個例子：

輸入	關係	輸出
$t = 1$	$s = 9.8t^2$	$s = 9.8$
$t = 2$	$s = 9.8t^2$	$s = 39.2$
$t = 3$	$s = 9.8t^2$	$s = 88.2$

這裡的$s = 9.8t^2$我們可以記作$s(t) = 9.8t^2$。其中t輸入某個值時，對應的s輸出某個值，$s(t)$是引數為t的函數。這個函數可以表示物體在地球地表附近，從靜止開始做自由落體運動時，運動距離s和時間t的關係。這是一個一元二次函數。

輸入	關係	輸出
$a = 3\ b = 4$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 5$
$a = 5\ b = 12$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 13$
$a = 8\ b = 15$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 17$

這裡的$c = \sqrt{a^2 + b^2}$可以記作$c(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$。其中$a$和$b$輸入值時，對應的$c$輸出某個值，$c(a, b)$是引數為$a$和$b$的二元函數。這個函數可以表示直角三角形斜邊長度$c$和兩條直角邊長度$a$、$b$的關係。

1748 年，歐拉在《無窮分析引論》（Introductio in analysin infinitorum）一書中說：“一個變數的函數是由該變數和一些數或常量以任何一種方式構成的解析運算式”。

到 19 世紀末，數學家開始嘗試利用集合論來進行形式化，他們試圖將每一個數學物件都定義為集合。狄利克雷給出了現代的函式定義，也就是我們現在高等數學教材裡的定義的雛形。這種定義下，函數被視作數學關係的特例。

中文中使用的“函數”這個詞由清朝時期杭州數學家李善蘭譯出。其《代數學》書中解釋：“凡此變數中函彼變數者，則此為彼之函數”。

【定義 1】函數（此處特指一元函數，後文無特殊說明處同樣如此）

歐拉定義 一個變數的函數是由該變數和一些數或常量以任何一種方式構成的解析運算式。

現代定義 設X、Y是兩個非空數集，如果存在一個對應法則f，使得X中的每個元素x，按對應法則f，在Y中有唯一確定的元素y與之對應，則稱f為定義在X上的**函數**，通常簡記為$y = f(x)$，$x \in X$。其中x稱為引數，y稱為因變數，X稱為**定義域**，記作D_f。函數值$f(x)$的全體所構成的集合稱為函數f的**值域**，記作R_f。

參考連結

什麼是函數？ https://www.mathsisfun.com/sets/function.html

瑞士數學家 萊昂哈德・歐拉 德語名 Leonhard Euler

歐拉本人簽名 

1707 年 4 月 15 日—1783 年 9 月 18 日

歐拉出生於瑞士巴塞爾的一個牧師家庭，父親保羅・歐拉（Paul Euler）是基督教加爾文宗的牧師。他引進的許多數學術語和書寫格式，例如函數的記法$f(x)$，一直沿用至今。他還在力學、光學和天文學等學科有突出的貢獻。他是一位超級多產作者，其學術著作有七八十冊，光是讀他的書就夠讀一段時間。

對於多數實際應用的情況，現代定義和歐拉定義的區別基本可以忽略。不難想到，我們平時常用的函數，主要就是由各種運算運算式來定義。接下來，我們回顧一下平時常見的四類**運算**。如果不記得某種代數運算具體怎麼進行，可以參閱 https://www.mathsisfun.com/algebra/index.html 。

加減乘除（基本四則運算）

某兩個數合併、某個數拆減去某另一個數（減就是加負數）、某個數倍增某次、某個數均分某份（除就是乘以分數）。應用例如：日常生活中買菜，收付款算帳等。

乘方開方（正冪）

某個數連乘確定次數、某個數連乘確定次數的逆運算（開方就是分數次乘方，計算一個數是由哪個數連乘確定次數得到的）。應用例如：常見幾何體已知邊長的體積計算，已知體積估計邊長等。

指數對數

確定數連乘某次、確定數連乘某次的逆運算（計算一個數是由確定數連乘多少次得到的）。應用例如：細胞增殖，香農對信息量的定義等。

三角與反三角

直角三角形某個角的角度（角對應的單位圓弧長）對應多大的臨邊對邊比例以及這個的逆運算（計算一個直角三角形臨邊對邊或兩臨邊比例對應多大的夾角角度）。應用例如：製造零件和建築中各種尺寸和角度的計算等。

這些運算中的任何一個拿出來，都可以作為一個基礎的函數運算式，只需按函數的歐拉定義，把前文描述中的“某”換成引數或常量，計算結果作為函數值即可。而實際應用中各種問題的計算，往往就是這些基礎運算式互相疊加組合構成的。

加減乘除（基本四則運算）

$y = kx + b$，k和b是常數，比如$k = 2, b = 3$時，$y = 2x + 3$ （一元一次函數）

$y = \frac{\hbar}{x-a} + b$ ，$\hbar,a,b$是常數且h不為0，比如$h = 1, a = 0, b = 0$時，$y = \frac{1}{x}$ （倒數函數）

乘方開方（正冪）

$y = x^a$，a是正常數，比如$a = \frac{1}{2}$時，$y = \sqrt{x}$ （一部分冪函數，如最基本的一元二次函數$y = x^2$）

指數對數

$y = a^x$，a是不為1的正常數，比如$a = 2$時，$y = 2^x$ （指數函數）

$y = \log_a x$，a是不為1的正常數，比如$a = e$時，$y = ln\, x$ （對數函數）

三角與反三角

$y = \sin x$ （正弦函數）

$y = \cos x$ （余弦函數）

$y = \tan x$ （正切函數）

$y = \arcsin x$ （反正弦函數）

$y = \arccos x$ （反余弦函數）

$y = \arctan x$ （反正切函數）

這些基礎運算規則可以疊加組合，構成一些更為複雜的規則。比如，我們可以把$y = \sin x$和$y = x^2$相加得到$y = \sin x + x^2$。再比如，我們可以把上述函數中的引數x處代入其他函數運算式，例如，把$y = 2x + 3$的y代入$y = x^2$的x中，得到$y = (2x + 3)^2$，這個代入過程就是**函數複合**。

就像搭積木，我們可以把上述的基本初等函數和常數經過各種有理運算或者複合，得到各種各樣的運算運算式。通常我們在解決問題的過程中，為了表示清晰，將參與複合的各個函數使用不同的符號。

例如剛才的例子，$f(x) = 2x + 3$，$g(t) = t^2$，按剛才的規則複合就是令$t = f(x)$，$g[f(x)] = (2x + 3)^2$。

我們不難發現，運算規則是對函數引數的取值範圍有影響的。比如分母不能為零，指數對數運算底數不能為 1 且必須大於零，在實數域求解範圍內根號內不能為負等等。這些運算規則給函數引數範圍造成限定，函數的引數可以取的值被限定在某個範圍內（只有這個範圍內的值作為引數輸入進行計算才有意義），若無其他說明這個範圍就是函數實際的**定義域**，這種自然的運算規則對引數取值的限定範圍也稱作函數的**自然定義域**（之前買菜找零例子裡的$x \leq 20$是根據實際情況額外說明限定的定義域）。當函數的輸入從小到大變化時，如果函數的輸出（函數值）也是從小到大變化，那麼這個函數就是單調增的；反之，如果輸入越來越大，輸出卻越來越小，那這個函數就是單調減的。函數的**單調性**（monotonicity）也可以叫做函數的增減性。用相對嚴謹的數學語言描述就是，當函數 $f(x)$ 的引數在其定義域內的某個區間上增大（或減小）時，函數值$f(x)$也隨著增大（或減小），則稱該函數在該區間上具有單調性。如果對於屬於定義域D_f內某個區間上的任意兩個引數的值x_1，$x_2 \in D_f$且$x_1 > x_2$，都有$f(x_1) > f(x_2)$，即在這個區間上具有單調性且單調增加，那麼就說$f(x)$ 在這個區間上是增函數。相反地，如果對於屬於定義域D_f內某個區間上的任意兩個引數的值x_1，$x_2 \in D_f$且$x_1 > x_2$，都有$f(x_1) < f(x_2)$，即在這個區間上具有單調性且單調減少，那麼就說 $f(x)$ 在這個區間上是減函數。前文例子列舉的常見運算，經過有限次有理運算（加減乘除、有理數次乘方開方）或者有限次函數複合構成的單一運算式函數，都是初等函數。我們日常生活中遇到的大多數函數是初等函數。

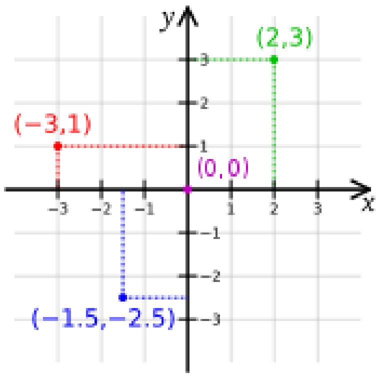
【定義 2】初等函數

初等函數是由冪函數（power function）、指數函數（exponential function）、對數函數（logarithmic function）、三角函數（trigonometric function）、反三角函數（inverse trigonometic function）、常數經過有限次的有理運算（加、減、乘、除、有理數次乘方、有理數次開方）及有限次函數複合所產生、並且在定義域上能用一個解析式表示的函數。

此處定義中的常數也可寫作常函數$y = c$，c是常數，引數取任意值函數值都是c。冪函數包括指數的各種取值情況，例如$y = x$冪是1，$y = \frac{1}{x}$ 冪是-1，都可以歸結為冪函數。 一般的，分段函數不能化簡成一個解析式的不算是初等函數，因為這些分段函數在定義域上不能用一個解析式表示，比如絕對值函數$y = |x|$不是初等函數，它是一個分段函數。另外再舉一個不是初等函數的例子，比如$y = x^x$，它不能用上述函數經過有限次的有理運算及有限次函數複合產生。

實際應用中遇到的函數是多種多樣的，如果僅僅從代數的角度進行數學計算，不免顯得枯燥乏味且不直觀易懂。接下來我們看看如何用**直觀圖形**的方法表示函數。一旦我們把函數這種運算關係用某種方法轉換成圖形畫出來，就意味著代數和幾何產生了緊密的聯繫。幾何圖形是更直觀易懂的，這樣我們就可以直接觀察去快速感受理解複雜的運算關係，某些複雜的運算甚至可以一眼看出答案。為了建立幾何與代數運算的這種聯繫，我們先定義圖形的坐標系。

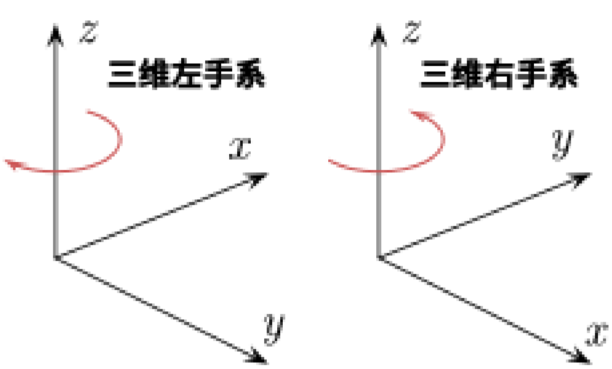
二維直角坐標系通常由兩個互相垂直的坐標軸設置，通常分別稱為x軸和y軸。兩個坐標軸的相交點，稱為原點，通常標記為O，既有“零”的意思，又是法語$Origine$的首字母。每一個軸都指向一個特定的方向。這兩個不同線的坐標軸，決定了一個平面，稱為xy平面，又稱為笛卡爾平面。



通常兩個坐標軸只要互相垂直，其指向何方對於分析問題是沒有影響的，但習慣性地，x軸被水準放置，稱為橫軸，通常指向右方。y軸被豎直擺放而稱為縱軸，通常指向上方。兩個坐標軸這樣的位置關係，稱為**二維的右手坐標系**，或右手系。

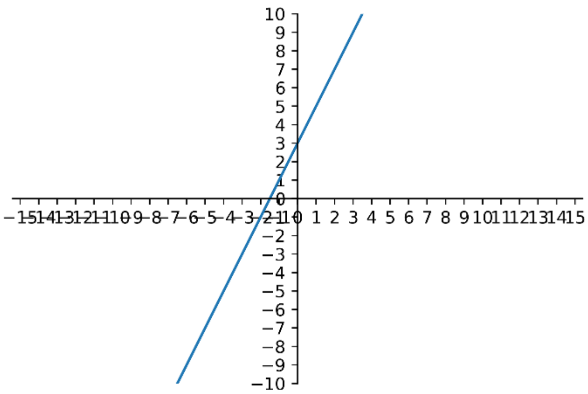
如果把這個右手系畫在一張透明紙片上，則在平面內無論如何旋轉它，所得到的都叫做右手系。但如果把紙片翻轉，其背面看到的坐標系則稱為左手系。這和照鏡子時左右對調類似。一般在沒有特殊說明的情況下，我們預設使用右手系。

為了知道坐標軸上的任何一點離原點的距離，我們可以刻畫數值於坐標軸。那麼，從原點開始，往坐標軸所指的方向，每隔一個單位長度，就刻畫數值於坐標軸。這數值是刻畫的次數，也是離原點的正值整數距離。同樣地，背著坐標軸所指的方向，我們也可以刻畫出離原點的負值整數距離。稱x軸刻畫的數值為x座標，又稱橫坐標，稱y軸刻畫的數值為y座標，又稱縱坐標。雖然這裡這兩個座標都是整數刻畫的，但按照比例，我們可以為坐標軸上的任意一個點刻畫實數座標值。任何一點P在xy平面的位置，可以由直角坐標(x, y)來唯一確定的表達。只要從點P畫一條垂直於x軸的直線。從這條直線與x軸的相交點，可以找到點P的x座標即橫坐標。同樣地，可以找到點P的y座標即縱坐標。這樣，我們可以得到點P的直角坐標$P(x, y)$。



直角坐標系可以推廣至三維空間甚至高維空間。若要建立三維直角坐標系，在原本的二維直角坐標系，再添加一個垂直於x軸，y軸的坐標軸，稱為z軸。若這三個坐標軸滿足**右手定則**（所謂滿足右手定則，就是右手握拳動作時，除大拇指外的四指指向和轉動方向為x軸正方向轉向y軸正方向，大拇指朝向為z軸正方向），則可得到我們常用的三維直角坐標系 。z軸與x軸y軸相互垂直相交於原點。和二維直角坐標系類似，在三維空間的任何一點P，可以用直角坐標$P(x, y, z)$來表達其位置。二維直角坐標系右手系的坐標軸將xy平面分為四個部分，我們稱右上角的區域為第一象限，逆時針數其他象限，分別定義為第二、三、四象限。類似的，三維直角坐標系右手系分為八個區域，分別定義為第一到第八卦限。象限和卦限的翻譯取自《易經》中的“太極生

兩儀，兩儀生四象，四象生八卦”。要在直角坐標系表示函數圖形，就是把符合函數運算式$y=f(x)$的點在坐標系裡標記出來，即所有符合函數運算式這個等式的(x,y)所構成的圖形（其中x是引數的值，y是對應的函數值）。我們的圖形表示區域大小是有限的，一般我們針對具體問題只標記函數圖形的某個部分。例如函數$y=2x+3$的圖形，就是這條藍色的直線。如果圖形不變，x軸和y軸的地位互換（把原來的x軸標記為y軸，把原來的y軸標記為x軸），圖形表達的仍然是一個函數的話，這個函數就是原來函數的**反函數**。



手工繪製初等函數圖形草圖的辦法，通常就是在給定區間內，取樣一些定義域中的值，然後用這些值求出對應函數值，把一堆點$(x,f(x))$在坐標系中標出，然後連起來。比如$y=2x+3$，當$x=-1$時，$y=1$，標出$(-1，1)$；當$x=0$時，$y=3$，標出$(0，3)$；當$x=1$時，$y=5$，標出$(1，5)$；當$x=2$時，$y=7$，標出$(2，7)$；……然後把他們順次連起來，就是函數$y=2x+3$的草圖。

對於有一個引數的函數（一元函數，例如前文自由落體物體加速度為定值的勻加速直線運動時運動距離s和時間t的關係）來說，我們可以在二維直角坐標系中用曲線圖形表示它。對於有兩個引數的函數（二元函數，例如前文直角三角形斜邊長度c和兩條直角邊長度a、b的關係）來說，我們可以在三維直角坐標系中用曲面圖形表示它。對於多元函數，我們可以在高維直角坐標系中表示，但顯然不再直觀易懂，所以我們在平時如果需要觀察相應的直觀圖形，通常使用某些降維的方法，把多元問題拆解成多個一元函數或二元函數進行直觀表示。直角坐標系是數學家笛卡爾所提出，所以又稱為**笛卡爾坐標系**。

法國數學家 勒內・笛卡爾 法語名 René Descartes

笛卡爾本人簽名 

1596 年 3 月 31 日－1650 年 2 月 11 日

重要著作 1637 年 La Géométrie 《幾何學》

將幾何座標體系公式化而被認為是解析幾何之父。在笛卡爾的年代，拉丁語是學者常用語言，他也如當時人們的習慣，在著作使用他的拉丁語名字 Renatus Cartesius（瑞納圖斯・卡提修斯），所以由他創造的笛卡爾坐標系也被稱作卡提修坐標系。

顯然我們現今已經不是只有紙筆的古代，這種費時費力的草圖繪製已經沒有必要。電腦程式可以利用同樣的草圖繪製方法，幫助我們快速的生成某個函數在指定區域的草圖，接下來我們介紹當今最常用的免費工具，並在程式實驗的基礎上，詳細討論各種初等函數的形態特點和應用實例。

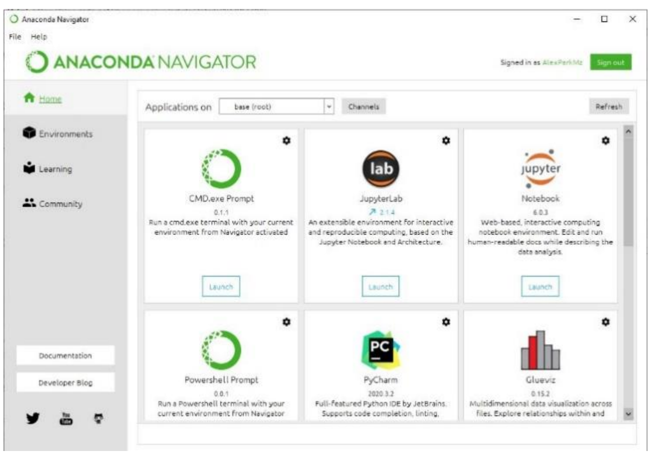
如何用資料科學家的工具玩兒轉函數圖形？其實很簡單，下面我們就來動手操作。首先我們去找一個資料科學家常用的工具集，當下最流行的莫過於 Anaconda，它是一個工具集，把很多開源免費的工具集成在了一起，可以快速安裝上手使用。去搜尋引擎尋找它，下載安裝即可。

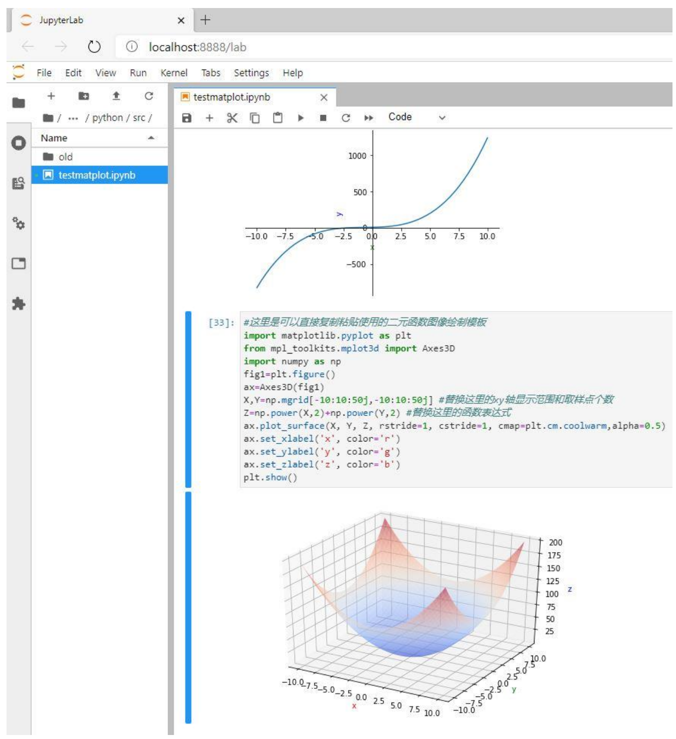
參考連結

去哪裡下載 Anaconda 免費版？（Windows 系統）

https://www.anaconda.com/products/individual#windows

當然也可以使用 Linux 等桌面作業系統，它都支援。





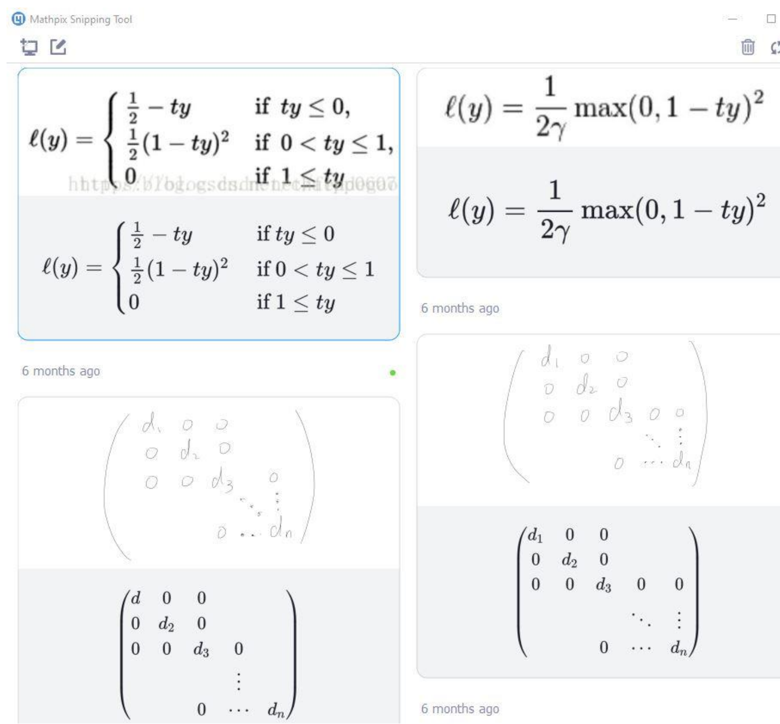
下載完成後，打開 Anaconda navigator，安裝元件 matplotlib（一個繪圖工具包），我們使用 Jupyter Lab 來做實驗，程式碼都是 Python 語言編寫的。不瞭解 Python 程式？不要擔心，我提供了所有配套的原始程式碼和筆記，帶有詳細的逐行注釋，即便你完全沒有見過 Python，也可以很輕鬆的上手。在 Jupyter Lab 中打開視頻課程中提供的檔 testmatplot.ipynb，就可以看到函數圖形繪製的入門代碼。本書後續的課程將不再複製繁瑣的程式原始程式碼到書裡，那樣會佔用巨量的篇幅，我們只在本節詳細講解一次如何使用本書配套的程式碼。

為了介紹方便，我們複製粘貼了整個 testmatplot.ipynb 的內容到後文，即便你還沒有安裝實驗環境，也可以直接閱讀來瞭解相應的內容。本書希望幫助大家在最短的時間裡獲得最多的有效資訊和技

巧，就算你完全不想瞭解電腦程式，也沒有關係，可以直接跳到後續綠色的部分，**複製粘貼**一下，修改一下函數運算式，就可以繪製出圖形了。

在 Jupyter Lab 裡，滑鼠左鍵點擊一個程式碼片段，它的左側會標記為藍色，你可以隨時修改代碼的內容，然後按 Ctrl+Enter 就可以立刻運行顯示運行結果。並且整個代碼和結果可以作為筆記檔保存。

Jupyter Lab 的檔裡還可以加入標準 LaTex 語法的 markdown 文本，你可以很輕鬆的把數學公式和想法筆記記錄在裡面。因為支援標準 LaTex，後續你的筆記也可以方便的編纂成書籍來印刷。我用 Jupyter Lab 寫 LaTex 排版數學公式和證明推理過程的時候，並不會直接編寫 LaTex 原始程式碼，那樣比較麻煩，目前有一個免費工具 Mathpix Snipping Tool，可以直接把手寫公式或者網頁截圖、照片之類的裡面的公式轉換成 LaTex 公式，複製粘貼即可。



使用 Mathpix Snipping Tool 識別截圖和手寫公式到 LaTex 公式格式

另外，我用 Sublime 編輯器加 OmniMarkupPreviewer 外掛程式來進行 Latex 的 markdown 所見即所得編輯，這樣可以節省很多時間而且價格低廉。而且，這個所見即所得是用流覽器實現的，所以你可以直接從流覽器裡複製粘貼筆記到諸如 Word 等 Office 工具裡，不需要任何額外的檔案格式轉換工具。

本書的配套程式原始程式碼大多是像 testmatplot.ipynb 檔一樣的 Jupyter 筆記格式，一是方便大家快速運行實驗，二是方便隨時加入自己的實驗感想和讀書筆記。課後我們愉快的交流，同樣也可以使用 Jupyter 筆記進行。第一個實驗代碼 testmatplot.ipynb 分為以下六小段代碼，從最簡單的函數圖形

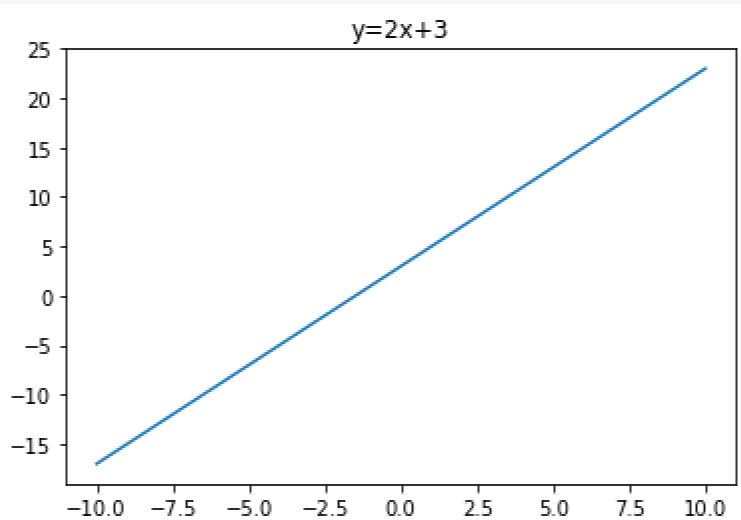
繪製程式入手，瞭解如何快速生成一個一元函數或二元函數運算式的某部分圖形。我們繪圖主要使用 matplotlib 模組，它是免費的。

參考連結

官方詳解如何使用 matplotlib 來進行繪圖 https://matplotlib.org/contents.html

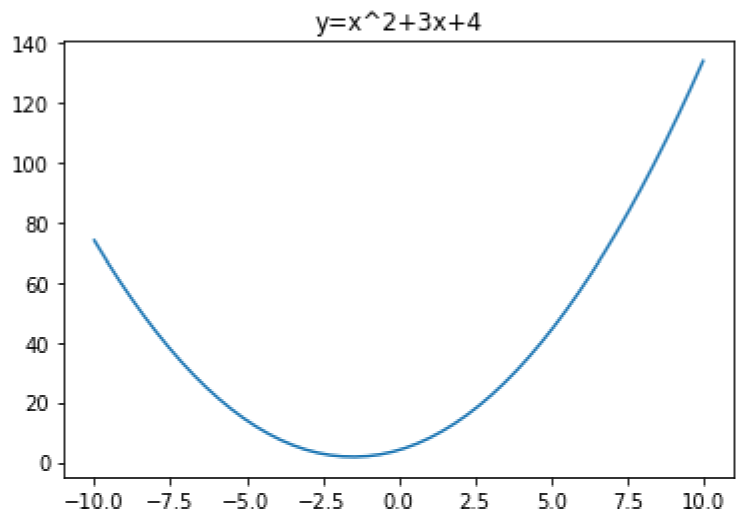
首先，我們用簡單的八行代碼，繪製一條直線$y = 2x + 3$。正如代碼所示，我們使用 numpy 庫來快速生成等間隔的橫坐標，numpy 是一個非常常用的庫，擴充了很多有用的批量資料處理方法，我們後續會頻繁使用它。

```
# 示例：如何簡單顯示一條直線

import matplotlib.pyplot as plt #繪圖用的模組

import numpy as np

x=np.linspace(-10,10,50) #從-10 到 10 生成 50 個取樣座標

y=2*x+3 #用取樣點 x 座標去求取樣點 y 座標

plt.figure() #創建一個繪圖物件

plt.title("y=2x+3")#標題

plt.plot(x, y) #用取樣點(x,y)去構建曲線

plt.show() #顯示模組中的所有繪圖物件
```



把這條直線改成一個二次函數拋物線$y = x^2 + 3x + 4$只需替換一行函數運算式即可。兩個星號是多少次冪的意思，和其他語言的小尖帽子^或者 pow 類似。

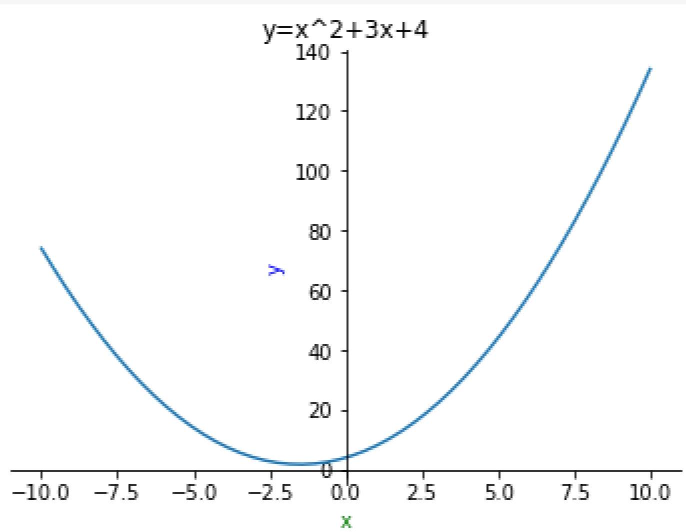
```
# 示例：如何簡單顯示一條拋物線

import matplotlib.pyplot as plt #繪圖用的模組

import numpy as np

x=np.linspace(-10,10,50) #從-10 到 10 生成 50 個取樣座標

y=x**2+3*x+4 #用取樣點 x 座標去求取樣點 y 座標

plt.figure() #創建一個繪圖物件

plt.title("y=x^2+3x+4")#標題

plt.plot(x, y) #用取樣點(x,y)去構建曲線

plt.show() #顯示模組中的所有繪圖物件
```



我們發現這個函數圖形的坐標軸和數學書裡常見的不太一樣，看著會有點怪怪的，因為一般統計的長條圖喜歡用這種形態，所以它默認就是這樣的。接下來，我們可以加入一些代碼，把坐標軸調成數學書裡的樣子，就是 x 軸和 y 軸在原點相交。

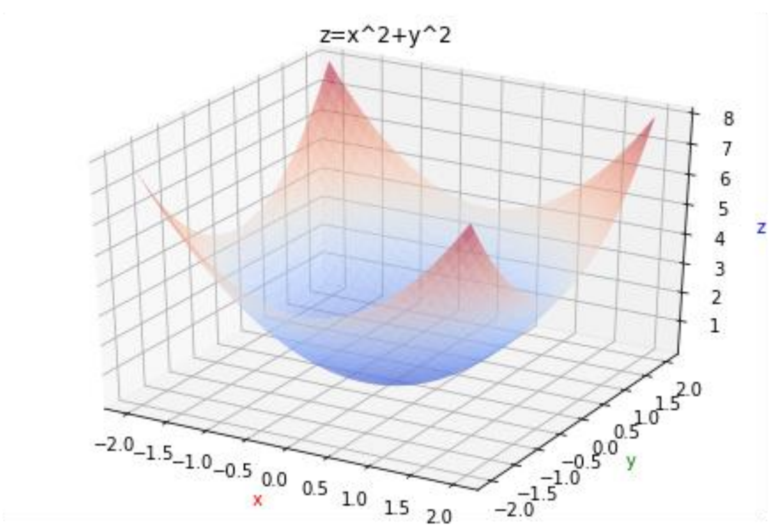
```
# 示例：如何簡單顯示一條拋物線，並把坐標軸調整到習慣位置

import matplotlib.pyplot as plt #繪圖用的模組

import numpy as np
```

```python
x=np.linspace(-10,10,50) #從-10 到 10 生成 50 個取樣座標

y=x**2+3*x+4 #用取樣點 x 座標去求取樣點 y 座標

plt.figure() #創建一個繪圖物件

plt.title("y=x^2+3x+4") #標題

plt.plot(x, y) #用取樣點(x,y)去構建曲線

ax=plt.gca()

ax.spines['right'].set_color('none')

ax.spines['top'].set_color('none')

ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))

ax.yaxis.set_ticks_position('left')

ax.spines['left'].set_position(('data',0))

ax.set_xlabel('x', color='g')

ax.set_ylabel('y', color='b')

plt.show() #顯示模組中的所有繪圖物件
```

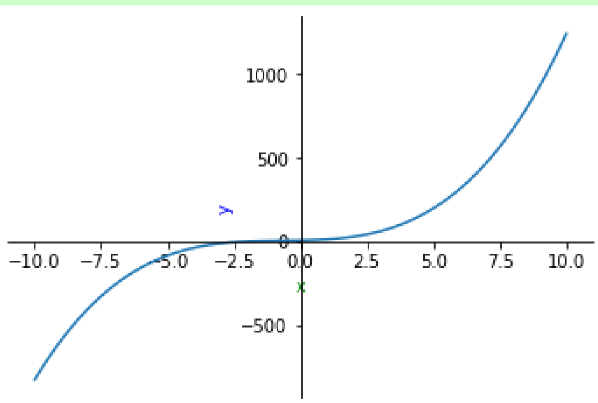


這樣就和數學書裡的函數圖形差不多了，我們接著看看如何生成好看的二元函數立體曲面圖形，這個比我上學時的數學書裡的更好看一點。

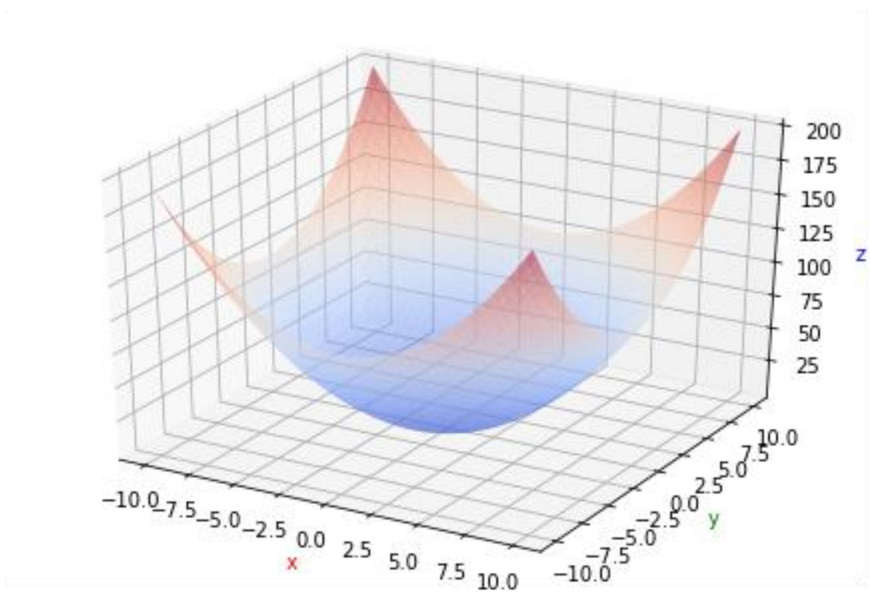
```
# 示例：如何簡單顯示一個曲面(二元函數)

import matplotlib.pyplot as plt #繪圖用的模組

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D #繪製 3D 座標的函數

import numpy as np

fig1=plt.figure() #創建一個繪圖物件

ax=Axes3D(fig1) #用這個繪圖物件創建一個 Axes 物件(有 3D 座標)

X,Y=np.mgrid[-2:2:40j,-2:2:40j] #從-2 到 2 分別生成 40 個取樣座標，並作滿射聯合

Z=np.power(X,2)+np.power(Y,2) #用取樣點橫縱坐標去求取樣點 Z 座標

plt.title("z=x^2+y^2") #標題

ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=plt.cm.coolwarm,alpha=0.5) #用取樣點(x,y,z)去構建曲面

ax.set_xlabel('x', color='r')

ax.set_ylabel('y', color='g')

ax.set_zlabel('z', color='b') #給三個坐標軸注明

plt.show() #顯示模組中的所有繪圖物件
```



```
#這裡是可以直接複製粘貼使用的一元函數圖像繪製範本

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

x=np.linspace(-10,10,50) #替換這裡的橫軸顯示範圍和取樣點個數

y=x**3+2*(x**2)+3*x+4 #替換這裡的函數運算式

plt.figure()

plt.plot(x, y)

ax=plt.gca()

ax.spines['right'].set_color('none')

ax.spines['top'].set_color('none')

ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))

ax.yaxis.set_ticks_position('left')

ax.spines['left'].set_position(('data',0))

ax.set_xlabel('x', color='g')

ax.set_ylabel('y', color='b')

plt.show()
```



```
#這裡是可以直接複製粘貼使用的二元函數圖像繪製範本

import matplotlib.pyplot as plt

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

import numpy as np

fig1=plt.figure()

ax=Axes3D(fig1)

X,Y=np.mgrid[-10:10:50j,-10:10:50j] #替換這裡的 xy 軸顯示範圍和取樣點個數

Z=np.power(X,2)+np.power(Y,2) #替換這裡的函數運算式

ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=plt.cm.coolwarm,alpha=0.5)

ax.set_xlabel('x', color='r')

ax.set_ylabel('y', color='g')

ax.set_zlabel('z', color='b')

plt.show()
```



至此，我們獲得了快速數形結合的直觀展現能力，接下來，我們就逐一分析各種初等函數，獲得一些可以快速解題的必要知識。這部分的配套代碼是 sec1-1.ipynb。通常數學模型是為了解決具體的實際問題，所以許多常見的數學表達都有他們的**物理意義**，就是這一堆表達在自然物理世界代表什麼意思。一個數學模型可能表達多種物理問題，我們在後續的每種函數圖像的研究時，引入一種易懂的物理意義，和現實的物理情況結合起來，這樣我們的表達和計算就更容易直觀的理解。類似的，我們也可以考慮數學表達的**幾何意義**，就是把數學表達和直觀的幾何圖形規律聯繫起來。

下面我們開始逐一研究初等函數及其函數圖像特徵。首先我們來畫直線。**一元一次函數**的圖形都是直線，我們可以隨便瞎編一些運算式，用上面現成的程式畫出來看看什麼樣子。比如我們在圖 1-1 繪製 $y = x$（藍色），$y = x + 3$（橙色），$y = 2x + 3$（綠色）三條直線。

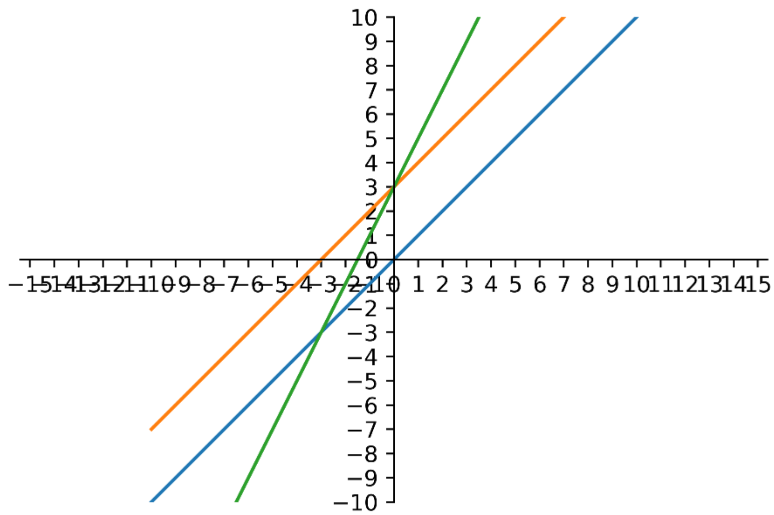


圖 1-1 不同斜率和截距的直線

我們在對一個函數運算式修修補補嘗試改變的時候，函數的圖像就按我們的修補進行了相應的改變。首先繪製了藍色的$y = x$，之後繪製$y = x + 3$的時候，實際就是對函數運算式整個加了3，這時函數的圖像在$y = x$的基礎上整個向上平移了3。之後我們在$y = x + 3$的基礎上，在x前面乘了2，這時函數的圖像整個在$y = x + 3$的基礎上向y軸這個中心收縮了2倍。不僅僅是對於直線，下列變換規則對於任何形式的單引數函數$y = f(x)$都適用。

【規則 1】一元函數圖形的變換

對於函數$y = f(x)$，$f(x)$可以是任意函數運算式，

在所有x前面加負號：相當於圖像整個按y軸為對稱軸翻轉；

對所有x取絕對值：相當於圖像y軸左邊部分抹掉，再按y軸為對稱軸把y軸的右邊部分複製到左邊；

對$f(x)$取絕對值：相當於圖像x軸下方部分按x軸為對稱軸翻轉到x軸上方；

在$f(x)$或者y前面加負號：相當於圖像整個按x軸為對稱軸翻轉；

給所有x加（減）一個值：加就是函數整個圖像向左平移這個值，減則向右平移這個值，x左加右減；

給$f(x)$加（減）一個值：加就是函數整個圖像向上平移這個值，減則向下平移這個值，$f(x)$上加下減；

給y加（減）一個值：加就是函數整個圖像向下平移這個值，減則向上平移這個值，y上減下加；

給所有x乘以一個值：相當於整個函數圖像以y軸為中心向中心收縮形變，收縮這個值這麼多倍；

給$f(x)$乘以一個值：相當於整個圖像以x軸為中心向中心伸展形變，伸展這個值這麼多倍；

給y乘以一個值：相當於整個圖像以x軸為中心向中心收縮形變，收縮這個值這麼多倍；

將兩個函數加起來：就是逐一將這兩個函數橫坐標相同的兩點處的函數值相加（縱坐標相加）得到的新圖像，形狀融合。其他諸如兩個函數相減、相乘、相除也是類似的，注意相除時除數不能為零。

x、y地位互換：反函數的圖像與原函數的圖像關於直線$y = x$對稱。

二元函數亦可推廣得到類似的規則，但表達較為複雜，其平移有前後左右，其縮放中心為平面。

一元一次函數的圖像是直線，說白了就是引數增加某個步長的值，函數值也相應的增加或減少某個步長的值，他們總是按固定比例變化的。就是引數和函數值成正比例相關。在現實世界中有很多類似的例子，為了便於理解，我們給直線找一個直觀的示例。

【物理意義示例】一元一次函數

物體勻加速運動（例如地表附近不計空氣阻力的自由落體運動）時，某時刻速度與所加速時間的關係。

$v = at + v_0$

$某时刻速度 = 加速度 \times 时间 + 初始速度$

v是引數為t的一次函數。

例如我們可以這樣進行物理實驗。找一個高架，從高處自由落體一個小球，用高速攝像機拍攝其運動過程。這樣我們就可以容易的知道在每個時刻，小球的運動速度如何變化（例如觀察某一小段時間內小球的下落距離，即可算出這一小段時間的平均速度，近似作為這一小段時間中點時刻的瞬時速度）。經過實驗不難發現，隨著時間的推移，小球的下落速度越來越快，速度和經過落體的時間成正比，其比例就是重力加速度。若小球從靜止開始下落時開始計時實驗，則上面函數式中的$v_0 = 0$，如果我們截取某一段下落的過程，可以將v_0設置成計時開始時的速度，這個初始速度就是這個直線函數的截距（引數t

為0時函數值v的取值），而重力加速度就是這個直線函數的斜率（引數t前面乘的常數a，代表引數變化時函數值的變化速度，a越大變得越劇烈，直線就越陡峭，也就是直線斜的程度）。

我們可以在 sec1-1.ipynb 程式中多次改變直線函數運算式，運行觀察後，我們不難總結直線一元一次函數的圖像特徵。

【規則 2】一元一次函數的圖像特徵

一元一次函數 $y = kx + b$ 的圖像是一條直線。

k的值是斜率，代表直線的傾斜陡峭程度，其絕對值越大越陡峭。

$k > 0$時，$y = kx + b$是定義域上的增函數，必過一三象限；$k < 0$時，$y = kx + b$是定義域上的減函數，必過二四象限。

$k = \tan\theta$ 其中θ是直線上方向和x軸正方向的夾角。

b的值是截距，代表直線和y軸交點的縱坐標。

再回到小球下落的物理實驗，不難發現，有了對函數圖像特徵的分析，我們可以在得知重力加速度和初始速度的情況下，迅速畫出函數圖像，並從函數圖像中迅速得知實驗中任意時刻的速度值。這也就是數學分析對於現實中物理問題認知的重要意義之所在。一旦你掌握了一個現實物理問題的數學模型，即便你不再進行重複實驗，你也可以單從數學角度進行分析，迅速得知這個模型所涵蓋範圍內你需要得知的資料。

接下來，我們重複同樣的工作，研究其他初等函數。首先總結**一元二次函數**的圖像特徵。一元二次函數就是最高次數為2的一元函數，其寫成$y = ax^2 + bx + c$或是$y = a(x + l)^2 + m$是無所謂的，因為後者就是由前者通過配方得到的等價形式（$l = \frac{b}{2a}, m = c - \frac{b^2}{4a}$），可見所有一元二次函數都可以通過標準的$y = x^2$經過規則 1 中的縮放平移變換得到。其他$n$元$n$次函數類似，不論展開寫成不同次數項構成的多項

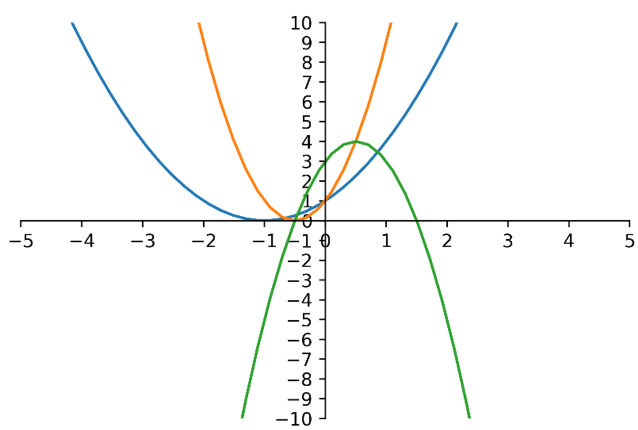


圖 1-2 不同 a、b、c 的一元二次函數拋物線

式（按二項式定理展開），還是配方成由標準基礎函數的平移縮放，都是無妨的，我們根據實際問題求解的需要使用不同的表達形式。下面和之前一樣，隨便畫幾個一元二次函數的圖像，他們分別是藍色的$y = x^2 + 2x + 1$，橙色的$y = 4x^2 + 4x + 1$，綠色的$y = -4x^2 + 4x + 3$，如圖 1-2 所示。

這次我們更詳細的實踐一下函數圖形變換規則（前文所述的規則 1）。

$y = x^2$ 這是一條頂點在原點的抛物線，圖 1-2 裡沒有畫出，但我們不難想像。

把剛才頂點在原點的抛物線左移 1： $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$。

把上面的抛物線向 y 軸收縮 2 倍： $y = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$，

把上面的抛物線右移 1：$y = [2(x - 1) + 1]^2 = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$。

把上面的抛物線按 x 軸翻轉：$y = -(2x - 1)^2 = -4x^2 + 4x - 1$

把上面的抛物線上移 4：$y = -(2x - 1)^2 + 4 = -4x^2 + 4x + 3$

我們可以在 sec1-1.ipynb 程式中多次改變一元二次函數運算式，運行觀察後，我們不難總結直線一元二次函數的圖像特徵。

【規則 3】一元二次函數的圖像特徵

一元二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖像是一條抛物線。

a的值具有開口情況的資訊，正值開口向上，負值開口向下，a的絕對值越大抛物線在同樣座標尺度下顯得越尖越陡峭。

b的值具有對稱軸情況的資訊，抛物線的對稱軸是$x = -\frac{b}{2a}$。對稱軸兩側單調性相反。

c的值具有上下位置情況的資訊，c是抛物線與y軸交點的縱坐標。

函數圖像與x軸的交點橫坐標是方程$ax^2 + bx + c = 0$的實數解，是$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$。

函數圖像的頂點座標是$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$。

從上述特徵不難發現，我們可以通過函數圖像迅速確定一元二次方程的解（有沒有實數解，有幾個，分別是多少），並且它快速的呼應了韋達定理。因為抛物線的對稱軸是$x = -\frac{b}{2a}$，所以兩根（$ax^2 + bx + c = 0$的兩個實數解）的均值是$-\frac{b}{2a}$，所以兩根之和為$-\frac{b}{a}$。

參考連結

韋達定理 https://zh.wikipedia.org/wiki/韋達定理

一元二次函數的圖像是拋物線，是引數增加某個步長的值，函數值相應的增加或減少比上個函數值變化步長更大某個值的值，它不像直線那樣函數值隨引數按固定比例變化，而是變化的步長本身也在變，增減步長的變化是直線那樣均勻變化的。比如$y = x^2$，當x分別取1，2，3，4時，函數值是1，4，9，16，引數的變化步長是1，而函數值的變化步長是3，5，7。

在現實世界中有很多拋物線的例子，為了便於理解，我們給拋物線找一個直觀的示例。這個示例接應之前的直線函數圖像，為同一個力學問題。

【物理意義示例】一元二次函數

物體勻加速運動（例如地表附近不計空氣阻力的自由落體運動）時，位移與所加速時間的關係。

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$位移 = \frac{1}{2}加速度 \times 时间^2 + 初始速度 \times 时间$$

s是引數為t的二次函數。

我們還是沿用高架小球自由落體實驗，只不過這一次我們觀察記錄運動總距離和運動經歷的時間。通過實驗得到的資料，不難總結出上面的公式。我們將在下一節深入的思考這個公式通過理論推導的獲得過程。

接著我們總結**倒數函數**及其相關常見函數的圖像特徵。我們和之前一樣，隨便畫幾個倒數函數$y = \frac{k}{x-a} + b$ 的圖像，他們分別是橙色藍色的$y = \frac{1}{x}$，紅色綠色的$y = \frac{1}{x-2} - 2$。

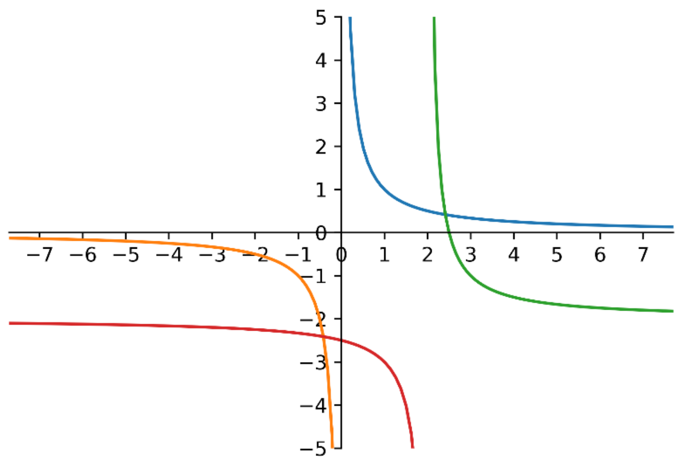


圖 1-3 不同 k、a、b 的倒數函數雙曲線

對於倒數（除運算）計算，分母是不可以為0的。所以倒數函數的自然定義域是除去分母為零處的所有實數。當函數圖像很靠近分母為零位置時，倒數的絕對值會變得很大。分母為0處無法取值的分隔號

$(x=a)$和分式值為0處的橫線$(y=b)$被稱作倒數函數的漸近線，就是可以逐漸接近但卻無法達到的直線。我們可以在 sec1-1.ipynb 程式中多次改變倒數函數運算式（注意同時把程式裡分母為零處的強制連續去掉），運行觀察後，我們不難總結倒數函數的圖像特徵。

【規則 4】倒數函數的圖像特徵

倒數函數 $y=\frac{h}{x-a}+b$ 的圖像是雙曲線。

a和b的值表明漸近線的位置，$x=a$和$y=b$是$y=\frac{h}{x-a}+b$的漸近線。

h具有陡峭程度（靠近漸近線的速度）的資訊，h的絕對值越小越陡峭彎折越劇烈，越大彎折越平緩。

h為正時雙曲線的兩支在左下方和右上方（兩支單調減），h為負時雙曲線的兩支在左上方和右下方（兩支單調增）。

函數圖像不僅關於原點對稱，還分別關於直線$y=x+b-a$和$y=-x+b+a$對稱。

函數圖像上到漸近線交點最近的點的座標為$(-\sqrt{h}+a,-\sqrt{h}+b),(\sqrt{h}+a,\sqrt{h}+b)$。

倒數函數是引數增加某個步長的值，函數值相應的反比例減少某個值。例如最簡單的$y=\frac{1}{x}$，實際就是$xy=1$去掉$x=0$。也就是引數和函數值成反比例相關。在現實世界中有很多類似的例子，為了便於理解，我們給它找一個直觀的示例。

【物理意義示例】倒數函數

恒溫恒量時，理想氣體的壓強與體積的關係。

$$p=\frac{nRT}{v}$$

$$气体压强=\frac{气体量\times 通用气体常量\times 气体温度}{气体体积}$$

p是引數為v的倒數函數。

我們可以這樣做實驗，在恒溫環境，緩慢的壓縮和釋放封閉活塞，用氣壓感測器在封閉活塞內測量氣體壓強，記錄活塞內空間體積和對應的壓強資料。通過實驗資料，不難總結出氣體體積和壓強的反比關係。當然，這裡的體積並不能取負值，所以實驗資料擬合的函數圖形僅僅是雙曲線的一支。

參考連結

理想氣體定律 https://baike.baidu.com/item/氣體壓強

為了更好的體驗一下函數圖形變換，我們接著前文描述的內容，把一次函數和倒數函數加起來，例如隨意構造一個函數$y = 0.4x + \frac{5}{x-2} + 3$。在 sec1-1.ipynb 中，已經畫出了它的圖像，如圖 1-4 所示。

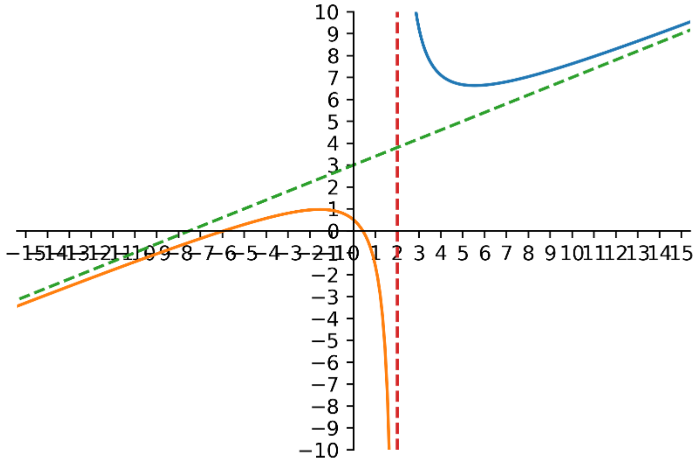


圖 1-4 倒數函數加一次函數的圖像

這個函數的漸近線是$x = 2$，$y = 0.4x + 3$。它的右支離x軸最近的點在$x = \frac{5\sqrt{2}+4}{2}$處（考慮第一象限的分支，倒數函數單調減，直線單調增，加起來增還是減，其平衡的點出現在其相等處，令$t = x - 2$，令單調增加部分和單調減少部分相等，常數甩到一邊不管，$0.4t = \frac{5}{t}$解出t後再平移2得到倒數與直線平衡處的x，就是離x軸最近的點）。改變常數項參數多次繪製，總結其圖像特徵。

【規則 5】一元一次函數加倒數函數的圖像特徵

一元一次函數加倒數函數 $y = kx + \frac{h}{x-a} + b$ 的圖像是雙曲線。

a和b的值表明漸近線的位置，$x = a$和$y = kx + b$是$y = kx + \frac{h}{x-a} + b$ 的漸近線。

h具有陡峭程度（靠近漸近線的速度）的資訊，h的絕對值越小越陡峭彎折越劇烈，越大彎折越平緩。

h為正時曲線的兩支在左下方和右上方，h為負時曲線的兩支在左上方和右下方。

k的值代表斜漸近線的斜率，h、k同為正或同為負時，k的絕對值越大兩條漸近線靠得越近，越小離得越遠，h、k異號時，k的絕對值越大兩條漸近線離得越遠，越小靠得越近。

當$x = \pm\sqrt{\frac{h}{k}} + a$時，曲線兩支分別處在離$y = b$最近的點。

這個函數由兩個基本初等函數疊加獲得，所以相比之前介紹的函數略顯複雜，它將成正比與成反比融合在了一起，當成反比相對占優時，成正比的部分減緩了函數值的衰減速度，當成正比相對占優時，成反比的部分減緩了函數值的增加速度。成正比的部分和成反比的部分互相平衡時，也就是函數圖像處

在離$y=b$最近的點（極值點）。在現實世界中有很多類似的例子，為了便於理解，我們給它找一個直觀的示例。不同與前面幾個函數用力學和熱學的例子，這次我們舉一個幾何學應用的例子。

【幾何意義示例】一元一次函數加倒數函數

恒定面積以矩形圈地時（改變矩形的長寬比例，但保持矩形面積一定），矩形總周長（籬笆用料）和矩形某一邊邊長的關係。

$$y=2\left(x+\frac{S}{x}\right)$$

$$矩形周长=2\times\left(矩形某一边的长度+\frac{矩形面积}{矩形某一边的长度}\right)$$

y是引數為x的函數。

根據規則 5 給出的最後一條性質，或者直觀理解，都不難得出，當$x=\sqrt{S}$時，籬笆用料最省，也就是面積恒定時，正方形的周長是所有矩形中最短的。

至此為止，我們已經分析總結了數個基本初等函數。不論是一次函數、二次函數、倒數函數，他們本質都是引數的確定次方的運算。一次函數是引數的一次方，二次函數是引數的二次方，倒數函數是引數的負一次方，如果再加上開方運算（引數的分數次方），我們可以總結這一大類函數的特徵。這一大類函數稱作冪函數。

在具體介紹冪函數之前，我們先來瞭解函數的**奇偶性**。

【定義 3】偶函數 奇函數

如果對於函數$f(x)$的定義域內**任意一個**x，都有$f(-x)=f(x)$，那麼函數$f(x)$就叫**偶函數**。

如果對於函數$f(x)$的定義域內**任意一個**x，都有$f(-x)=-f(x)$，那麼函數$f(x)$就叫**奇函數**。

注意定義里加粗了“任意一個”。判斷函數奇偶性時首先要看其定義域是否關於原點對稱。一個函數是奇函數或偶函數，其定義域必須關於原點對稱，定義域不對稱，必定非奇非偶。例如$y=x^3$是一個奇函數，因為$(-x)^3=-x^3$，而$y=x^2$是偶函數，因為$(-x)^2=x^2$。

【規則 6】奇函數和偶函數的特徵

奇函數滿足圖形關於原點對稱，並且可寫出

$$f(x)+f(-x)=0$$

$$f(x)\times f(-x)=-[f\ (x)]^2$$

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$$

偶函數滿足圖形關於y軸對稱，並且可寫出

$$f(x) - f(-x) = 0$$

$$f(x) \times f(-x) = [f\ (x)]^2$$

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = 1$$

1、 兩個奇偶性相同的函數相加所得的函數奇偶性不變。

2、 兩個奇偶性相同的函數相乘所得的積為偶函數。

3、 兩個奇偶性不同的函數相乘所得的積為奇函數。

4、 幾個奇函數或偶函數複合，只要有一個是偶函數，結果是偶函數；若無偶函數則是奇函數。

5、 偶函數的和差積商是偶函數。

6、 奇函數的和差是奇函數。

7、 奇函數的偶數個積商是偶函數，奇函數的奇數個積商是奇函數。

8 、奇函數或偶函數的絕對值為偶函數。

結合規則 1 和規則 6，不難得出函數圖像關於某點對稱、關於某垂直或水準直線對稱的代數表達。

【規則 7】函數圖像關於某點、某垂線、某水平線對稱

如果對於定義域內任意一個x，有$f(a+x)+f(b-x)=c$，那麼函數圖像關於$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$中心對稱；

如果對於定義域內任意一個x，有$f(a+x)=f(a-x)$，那麼函數圖像關於$x=a$軸對稱。

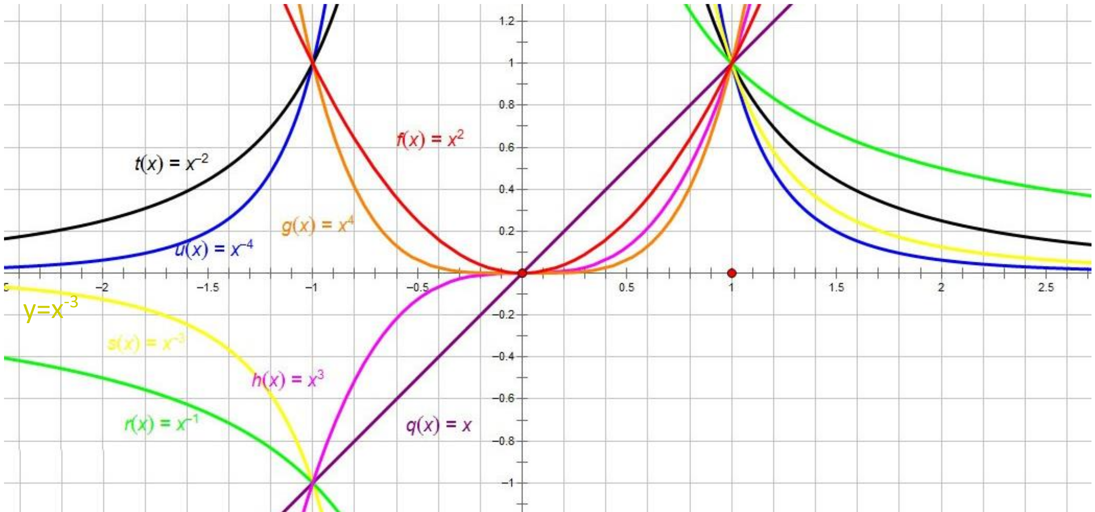
如果對於定義域內任意一個x，有$f(x)+g(x)=c$，那麼函數$f(x)$與$g(x)$圖像關於$y=\frac{c}{2}$軸對稱。

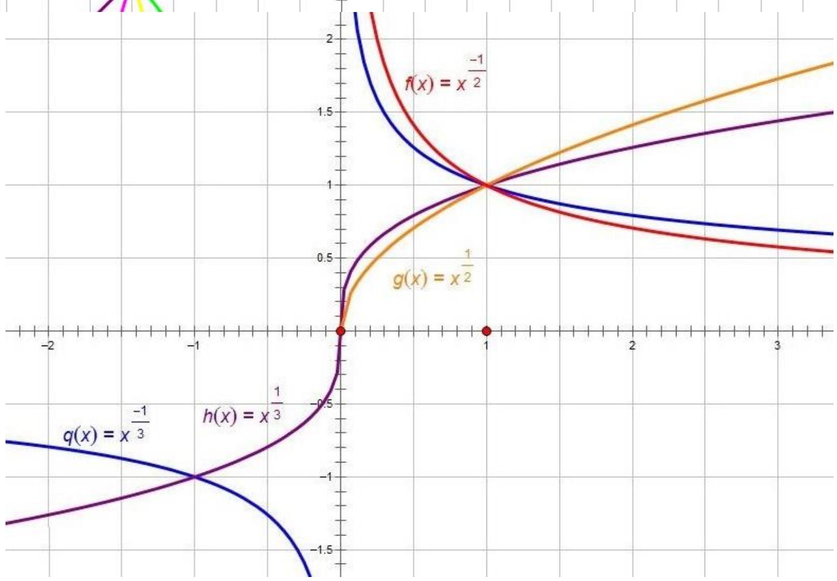
通過規則 1 直接畫圖可以分析得出這些代數表示。或者更直觀得說，通過把奇函數和偶函數按規則 1 平移，即可得到規則 7 的前兩條，第三條是第二條規則對換x軸y軸後的表示。研究函數的奇偶性（函數圖像的對稱性）主要是為了減少某些問題求解的複雜程度。例如知道了一個具有對稱性的某函數一部分的圖像特徵，其關於對稱中心或者對稱軸的另一半就可以直接根據對稱性克隆出來。在瞭解奇偶性之後，我們繼續回來討論冪函數，在某些情況下，冪函數是奇函數或者偶函數。這樣一來，我們只要研究明白冪函數的奇偶性分佈和正半部分的圖像，另一半很多時候就可以直接複製出來。為了簡化討論，我們暫且只研究冪次為有理數的冪函數。

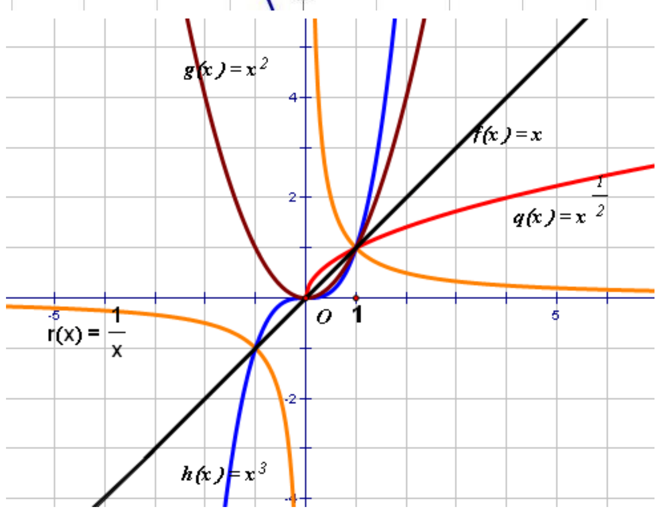
下面以不同顏色給出了十餘個冪函數的圖像，供直觀參考觀察。

參考連結

冪函數 https://baike.baidu.com/item/冪函數







我們可以用程式繪製沒有經過平移和縮放的各次冪函數進行觀察比較（冪函數的主要特徵在參考連結裡已經描述，我們主要是進一步觀察冪次變化帶來的圖形變化規律）。比如，我們將冪函數的冪次分為四個區間，分別是負值小於-1、負值大於-1、正值小於1、正值大於1，在每個區間裡取四五個從小到大的示例，順次繪製觀察。

繪製的時候可能會遇到 invalid value encountered in power 的錯誤，可以根據參考連結裡描述的規律確定奇偶性（下一頁也給出了冪函數奇偶性的快速判定表格），然後按 https://stackoverflow.com/questions/45384602/numpy-runtimewarning-invalid-value-encountered-in-power 的方法進行繪製。

經過觀察，不難發現最直觀顯然的規律，冪函數的冪次越大，函數值在大於1之後變化越劇烈越陡峭。對於第一象限的正值區間來說，冪函數的圖形變化可以隨著冪次變化做成連續平滑的動畫。動畫見本節配套代碼 sec1-1.ipynb。

所有的冪函數都過點$(1,1)$，因為1的任何次方都等於1。

如果是傳統考試或者特殊情況，需要**手工繪製冪函數圖像**的話，進行如下兩步即可完成：

第一步，根據冪次所屬的區間（前文所述的四個區間）確定函數圖像在**第一象限**的基本形狀；

首先，如果**冪次是正的**，第一象限的圖像一定是**單調增**的，如果冪次**小於 1**，那第一象限的圖像就是**橫趴**的，且**冪次越小趴的越平**，如果冪次**大於 1**，那第一象限的圖像就是**豎起來**的，且**冪次越大豎的越陡**；

如果**冪次是負的**，第一象限的圖像一定是**單調減**的，以沿直線$y=x$對稱的雙曲線$y=x^{-1}$為參照，冪次越小（**負的更多**的）在**$x>1$時越在下方**，在$x<1$時越在上方。

第二步，根據冪函數的奇偶性判定表（後文提供）確定函數在**第二或第三象限**的圖像。

首先，冪次**分母為偶數**時不用對稱複製了，因為**一定是非奇非偶函數**，開偶數次方根號決定了沒有負值定義域；

如果冪次**分母是奇數**，則**分子是奇數**就是**奇函數**，對稱複製到第三象限，如果**分子是偶數**就是**偶函數**，對稱複製到第二象限。

另外，如果是**無理數冪次的冪函數**，不存在負的定義域（正無理數冪次定義域包括0，負無理數冪次定義域只有大於0的正值），則它**一定是非奇非偶函數**，例如$y=x^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}$，我們一般選取離它較近的有理數冪次的圖像來近似，只畫出第一象限圖像即可。

冪函數$f(x) = x^{k\frac{m}{n}}$，$k \in \left\{-1，1\right\}$，$m,n \in N^+$的定義域、值域和奇偶性

	m,n均為奇數		m為奇數 n為偶數		m為偶數 n為奇數	
	$k=1$	$k=-1$	$k=1$	$k=-1$	$k=1$	$k=-1$
定義域	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
奇偶性	奇函數	奇函數	非奇非偶	非奇非偶	偶函數	偶函數

在實際應用中，我們根據冪函數的冪次變化規律，只識記第一象限的函數圖像，然後根據上表的奇偶性規律，即可得到冪函數的整個定義域上的圖像。對於無理數冪次的冪函數，其定義域不包含負值部分，所以一定是非奇非偶函數，在使用電腦程式繪製其函數圖像時，可以取臨近的兩個有理數冪次的圖像，夾逼得到近似的無理數冪次的冪函數圖像。在一般的日常工程應用中，我們遇到的大多是有理數冪次的冪函數，例如前文所列舉的一元一次函數、一元二次函數、倒數函數，再例如常見規則幾何體已知邊長計算體積常用的一元三次函數、已知體積或面積計算邊長的開三次或開二次方等等，都是有理數冪次的冪函數。

接下來我們來看**指數函數**。和之前一樣，我們隨意編造幾個指數函數，用之前的程式範本繪製它們的圖像。例如我們繪製藍色的$y=2^x$，橙色的$y=5^x$，綠色的$y=(\frac{1}{2})^x$，紅色的$y=(\frac{1}{5})^x$，如圖 1-5 所示。在之前初等函數的分析，我們把平移和縮放的常量融合到了函數運算式裡（例如一元一次函數的k和b，一元二次函數的a、b、c等等），是為了能夠更直接的快速分析解題同時更熟練的使用規則 1。但從分析指數函數開始，我們並沒有這樣做，並不是因為不可以這樣，所有一元函數的圖形變換都可以使用規則 1，而是為了更簡單直觀的說明其他關鍵的問題。 改變常數項參數多次繪製，總結其圖像特徵。

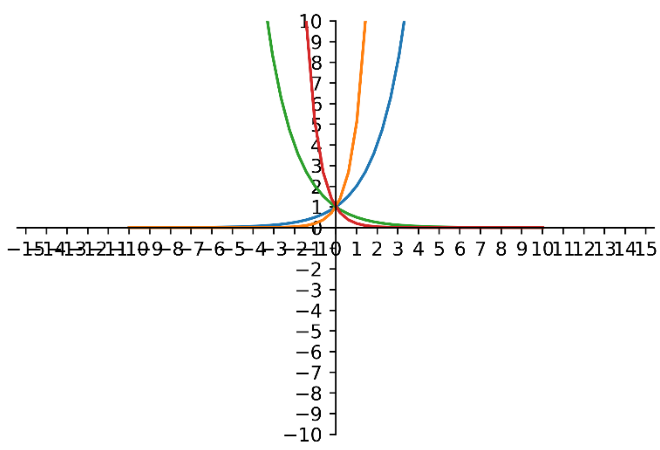


圖 1-5 不同底數的指數函數圖像

【規則 8】指數函數的圖像特徵

$y=a^x, a>0$ 且$a\neq 1$的圖像是一條各點陡峭程度正比於那一點處函數值的曲線。其定義域是$(-\infty,+\infty)$，其值域為$(0,+\infty)$。

$a>1$時，$y=a^x$是定義域上的增函數；$a<1$時，$y=a^x$是定義域上的減函數。

底數 a 具有陡峭程度的資訊，a 的值越遠離 1 越陡峭，越靠近 1 越平緩。（函數值大於 1 時）

$y=a^x$和$y=(\frac{1}{a})^x$的圖像關於y軸對稱。

指數函數的圖像是一條各點陡峭程度正比於那一點處函數值的曲線，簡單直觀的說，指數函數就是隨著引數的增長，函數值按恒定速率翻倍的函數。例如理想情況下細胞的二分裂，每隔一段時間，總量就會翻倍，兩個變四個，四個變八個，八個變十六個。指數函數之所以限定$a>0$ 且$a\neq 1$，是因為當$a=0$或$a=1$的時候，它會退化成去掉一點的常函數或常函數，而$a<0$時圖像並不連續，比如$(-2)^{\frac{1}{2}}$不存在，不能作為初等函數研究。

【物理意義示例】指數函數

理想狀態下細胞二分裂，某時刻細胞總數量和分裂總時間的關係。

$y=2^x$

$细胞总数量=2^{分裂经历的时间}$

y是引數為x的指數函數。

在日常生活中，特別是複利的計算（例如信用卡貸款利息）和指數函數有關。歷史上就是因為複利的拆分計算問題，雅各・伯努利在 1683 年引入了重要的**自然對數函數的底數e**。思路是這樣的：

【物理意義示例】自然對數函數的底數 e

設一份貸款的年利率為x，為增加貸款收益逐月計算複利（每個月清算一次本息，沒有還就本息合計在一起再計算利息），則每個月本息合計為上個月的$(1+\frac{x}{12})$，也就是每個月計算本息合計都要乘以$\left(1+\frac{x}{12}\right)$，一年就是第一個月貸款額的$(1+\frac{x}{12})^{12}$。同理，如果拆分成逐日計算複利，一年就是第一天貸款額的$(1+\frac{x}{365})^{365}$。更細的拆分就可以帶來更高的貸款收益，我們考慮無窮細的拆分，最多能把獲利增加到原來的多少倍，這個極限倍數就是自然對數的底數e。

具體來說，假定年利率為100%，借期1年本息合為200%，按年清算收取本息就是$(1+\frac{100\%}{1})^1$，利息平均每月約8.3%。按複利可以只借1個月，1個月未能還款，本息合計為借款，如此1年下來本息合計約為261.3%。如果借貸者能在1個月內歸還，則不需要付1整年的利息，放貸者快速收回資金可以借給他人；拖到1年歸還，放貸者得到比正常放貸1年要高的利息； 1年後按複利計算本息快速增長，借貸者可

能就還不起了，而放貸者獲得抵押品。甚至可以逐日借款，這樣1年的收益高於261.3%，但增大不多，而借貸者可以更快還清少付利息，e 就是設立更小還款時限增加獲利，能達到的1年極限收益，即約為271.8%。

根據以上思路，記 $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$。這裡的$\exp(x)$就是$e^x$。其中$e$是一個無理數，$e = 2.718281828459045\ldots$ 某些現代工程書籍中，指數函數（exponential function）有時特指$y = e^x$。由於$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，不難感受到，$e$這個常數或許與倒數函數有某些聯繫。

前文寫雅各・伯努利之所以用全名，而不是像介紹歐拉和笛卡爾那樣只寫姓氏，是因為有很多個“伯努利”。比如，雅各・伯努利的弟弟約翰・伯努利是萊昂哈德・歐拉的博士導師。伯努利（Bernoulli）家族是一個商人和學者家族，來自瑞士巴塞爾。伯努利家族的建立人，萊昂・伯努利，於 16 世紀從比利時安特衛普移民到巴塞爾。很多藝術家和科學家出自伯努利家族，特別是 18 世紀。

參考連結

伯努利家族 https://zh.wikipedia.org/wiki/伯努利家族

瑞士數學家 雅各・伯努利 德語名 Jakob I. Bernoulli

1654 年 12 月 27 日－1705 年 8 月 16 日

當他讀了勒內・笛卡爾、沃利斯的書後，頓受啟發，興趣轉向數學。1676 年到荷蘭、英國等處，結識當地學者。從 1687 年起任巴塞爾大學教授，直到 1705 年 8 月 16 日於巴塞爾去世。

雅各・伯努利主要貢獻有：伯努利數、伯努利多項式、伯努利試驗、伯努利過程、伯努利分佈、伯努利不等式、伯努利雙紐線、伯努利微分方程等。

指數函數的反函數是**對數函數**。顯然在底數相同時，他們的圖像關於直線$y = x$對稱。我們用上面指數函數例子的底數，繪製對數函數，如圖 1-6 所示，他們分別是藍色的$y = \log_2 x$，橙色的$y = \log_5 x$，綠色的$y = \log_{\frac{1}{2}} x$，紅色的$y = \log_{\frac{1}{5}} x$。顯然，對數函數的圖像特徵可以根據指數函數的特徵快速總結。

繪製對數函數的時候，我們發現 numpy 中的log默認為以e為底取對數，我們可以使用**換底公式**來寫出任意其他底數的函數運算式。

參考連結

對數函數的換底公式

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:change-of-base/a/logarithm-change-of-base-rule-intro

就像以e為底的指數函數記作exp，以e為底的對數函數也有特別的符號，記為ln。因為有換底公式這樣的規律存在，所以我們只要能計算ln，就能用換底公式 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 計算以其他數字為底的對數。另外

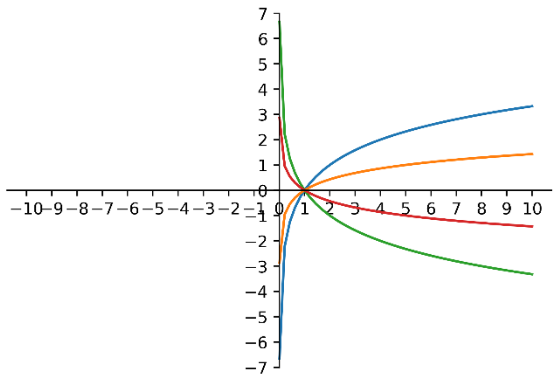


圖 1-6 不同底數的對數函數圖像

更進一步的，從這個運算式結合規則 1 可見，任意底數的對數函數都可以看成是 $\ln x$ 向x軸收縮 $\ln a$ 倍得到的。同理，指數函數$y = a^x$也可以寫成$y = e^{x \ln a}$，即任意底數的指數函數都可以看成是 e^x 向y軸收縮 $\ln a$ 倍得到的。指數函數（exponential function）有時特指$y = e^x$，因為底數不同也僅是簡單縮放。

【規則 9】指數函數和對數函數的換底收縮特徵

$y = a^x = e^{x \ln a}$ 即 $y = e^x$ 向 y軸 收縮 $\ln a$ 倍得到 $y = a^x$。

$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 即 $y = \ln x$ 向 x軸 收縮 $\ln a$ 倍得到 $y = \log_a x$。

【規則 10】對數函數的圖像特徵

$y = \log_a x \,, a > 0$ 且$a \neq 1$的圖像是一條各點陡峭程度反比於那一點處引數值的曲線。其定義域是$(0, +\infty)$，其值域為$(-\infty, +\infty)$。

$a > 1$時，$y = \log_a x$是定義域上的增函數；$a < 1$時，$y = \log_a x$是定義域上的減函數。

底數 a 具有陡峭程度的資訊，a 的值越靠近 1 越陡峭，越遠離 1 越平緩。（引數大於 1 時）

$y = \log_a x$和$y = \log_{\frac{1}{a}} x$的圖像關於x軸對稱。

既然對數函數是指數函數的反函數，所以其物理意義我們自然可以考慮到和前面相同的細胞二分裂的例子，無非是互換x、y的位置，對數函數可以表達理想細胞二分裂時，分裂總時間和某時刻細胞總數

量的關係。為了更深入的理解對數函數在實際工程中的作用，我們引入另一個當代常見的使用對數函數的示例：信息量的定義。

【物理意義示例】對數函數

一件事件發生的概率p越大，攜帶的資訊越小，比如太陽會從東邊出來，一年之中冬天比夏天冷，這樣的事情發生了，我們幾乎沒有得到什麼資訊；反之，概率越小，攜帶的資訊越大，比如股市崩盤了，某國家陷入戰爭，這樣的事情發生了，則意味著大量的資訊。

用一個函數 $f(p)$描述**信息量**，這個函數是以事情發生概率p為引數的函數，它應該滿足：

1. $f(p)$大於等於 0，

2. $f(p)$是一個減函數，

3. $f(1) = 0$，

4. 對於兩件相互獨立的事情，他們同時發生了，獲得的信息量是他們分別信息量之和 。

滿足上述條件的函數是對數函數，我們通常使用如下形式表達信息量：

$f(p) = -\log_a p$

$a = 2$時，信息量單位為 bit；$a = e$時，信息量單位為 nat；$a = 10$時，信息量單位為 hart。

我們在後文介紹概率和統計方面的內容時，會很頻繁的使用對數函數。

參考連結

信息量為什麼定義為對數的形式 https://blog.csdn.net/dog250/article/details/79081043

接下來我們研究**三角函數**。三角函數和我們之前接觸的函數所做的運算有所不同，它是一個**一元運算**，即只有一個輸入，在沒有和其他參數進行運算的情況下，即得到輸出。我們之前介紹的函數，涉及的運算大多是**二元運算**，雖然他們也只有一個輸入，是一元函數，但涉及的代數運算都是和其他參數或者常量交互產生結果（加減乘除乘方對數），比如直線有斜率截距、倒數函數引數頭頂上有分子、冪函數有指數、指數和對數函數有底數，只不過我們把這些作為常數參數固定了，而三角函數在沒有平移縮放的基礎定義時，並沒有這樣的常量參與運算，換句話說，它是真正的一元運算。

首先我們用一張圖和一張表格縱覽常見三角函數的定義，我們定義如圖 1-7 所示的直角三角形，

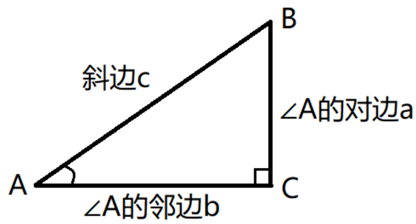


圖 1-7 說明三角函數的直角三角形

$\angle ACB$為直角。對$\angle BAC$而言，$\angle BAC=\theta$，對邊（opposite）$a=BC$、斜邊（hypotenuse）$c=AB$、鄰邊（adjacent）$b=AC$，用這個三角形結合下表說明各三角函數的定義。

各常見三角函數的定義（引數輸入為$\angle A$的弧度，即θ）

函數名稱	英文名稱	數學縮寫	函數值運算（輸出）	函數值運算的描述
正弦	sine	sin	a/c	$\angle A$的對邊比斜邊
余弦	cosine	cos	b/c	$\angle A$的鄰邊比斜邊
正切	tangent	tan或tg或$tang$	a/b	$\angle A$的對邊比鄰邊
餘切	cotangent	cot或ctg	b/a	$\angle A$的鄰邊比對邊
正割	secant	sec	c/b	$\angle A$的斜邊比鄰邊
余割	cosecant	csc或$cosec$	c/a	$\angle A$的斜邊比對邊

根據上述定義，顯然各三角函數之間有關聯，例如 $\mathbf{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$\tan\alpha\cot\alpha=1$，$\sin\alpha\csc\alpha=1$。三角函數之間的快速轉換計算可以參閱下表：

函數	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	$\sec$	$\csc$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

另外還有一些不常見的三角函數，比如正矢、餘矢等等，在此不再贅述。1631 年徐光啟與鄧玉函、湯若望合撰《大測》首次將三角函數引入中國並確立了正弦、余弦等譯名。歐拉的《無窮分析引論》中最早使用了接近現代三角函數的簡寫sin、cos、$tang$、cot、sec、$cosec$。

參考連結

平面三角公式之幾何淵源 https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=31306

三角函數的常用公式與某些速記方法 https://baike.baidu.com/item/三角函數/1652457

為了更直觀清晰的給出三角函數的幾何意義，我們在單位圓（半徑為 1 的圓）上構造三角函數值長度的線段，如圖 1-8 所示。所以某些地方又把三角函數叫做**圓函數**。

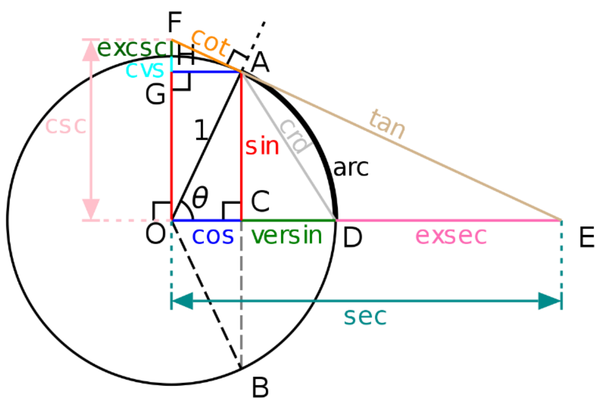


圖 1-8 所有三角函數在單位圓上的函數值表示

可見，當 A 點在單位圓上旋轉，而其他點的連帶幾何關係不變時，各三角函數的函數值（不同顏色所標出的線段長度）隨θ的變化而變化，當我們用θ所對的單位圓弧長來表示θ時，可以用平移勻速圓周運動立面投影的方式構造出三角函數在笛卡爾坐標系的函數圖像：

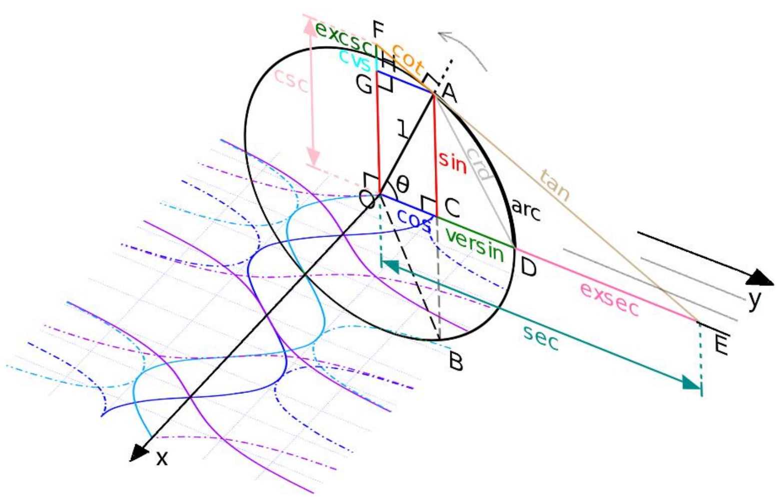


圖 1-9 三角函數圖像的物理幾何構造方法

以構造 $y = \cos\theta$ 為例，如圖 1-9 所示，把圖 1-8 所示的單位圓立起來，過 O 點作垂直於單位圓平面的垂線，並沿其定義為 x 軸正方向，定義 ODx 平面上與射線 OD 平行的方向為 y 軸正方向，將 A 點在單位圓做勻速圓周運動，其他點的幾何關係保持不變，在 A 點勻速圓周運動的同時，將單位圓沿 x 軸方向做同樣速度的勻速直線運動，C 點在 xOy 平面劃過的曲線就是函數$y = \cos\theta$的圖像。

【幾何意義示例】正弦余弦函數圖像

沿垂直於圓面的中軸線勻速直線運動的單位圓，單位圓上某一點沿單位圓做勻速圓周運動，這一點在與單位圓平面垂直的平面上的投影軌跡，即為正弦/余弦函數圖像。

和之前考察其他的初等函數類似，我們可以用程式隨意繪製幾個三角函數，比如最具代表性的藍色的$y = \sin x$，橙色的$y = \cos x$，綠色的$y = \tan x$，如圖 1-10 所示。這幾個函數的圖像有不斷重複的特徵，我們再繪製其他三角函數，不難發現也如此，這種周而復始迴圈重複的特稱，稱為函數的**週期性**。

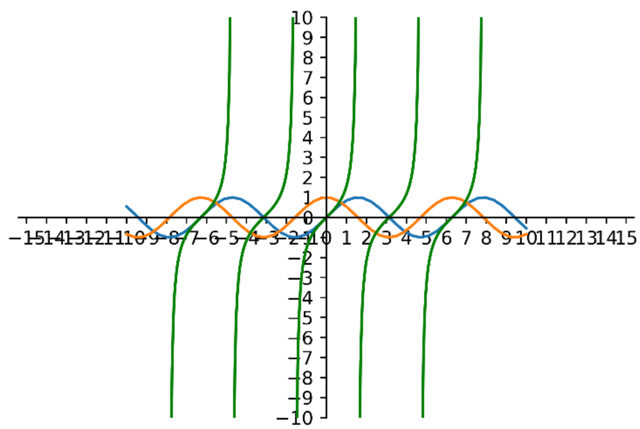


圖 1-10 正弦余弦正切函數圖像

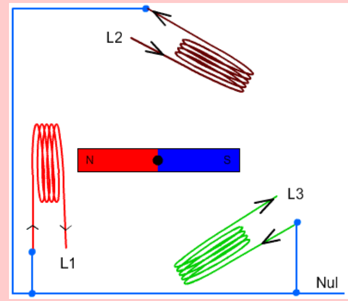
【定義 4】週期函數

對於函數$y = f(x)$，如果存在一個不為零的常數T，使得當x取定義域內的每一個值時，$f(x+T) = f(x)$都成立，那麼就把函數$y = f(x)$叫做**週期函數**。不為零的常數T叫做這個函數的**週期**。最小的正值T稱為這個函數的**最小正週期**。

事實上，任何一個常數kT，$k \in Z$，且$k \neq 0$都是它的週期。並且週期函數$f(x)$的週期T是與x無關的非零常數，且週期函數不一定有最小正週期，比如狄利克雷函數（引數為無理數時函數值為0，有理數時函數值為1）。另外，我們把最小正週期T的倒數稱為**頻率**，即 $f = \frac{1}{T}$。由上下文的圖不難發現，正弦函數和余弦函數的最小正週期是2π，正切函數和餘切函數的最小正週期是π。所以基本的正弦函數和余弦函數的頻率是$\frac{1}{2\pi}$。如果我們按規則 1 把$\sin x$收縮ω倍，得到的$\sin \omega x$的週期為$\frac{T}{|\omega|}$，頻率為$\frac{|\omega|}{2\pi}$，ω這個縮放的係數就是前文幾何意義裡所描述的轉動的**角速度**。特斯拉發明的交流發電機，產生的交流電壓就是正弦

波，可以表達成一個正弦函數。我們今天使用的交流電亦是如此，比如中國地區室電（220 伏 50 赫茲）電壓 $V = 220\sin 314t$ 。

【物理意義示例】正弦函數/余弦函數



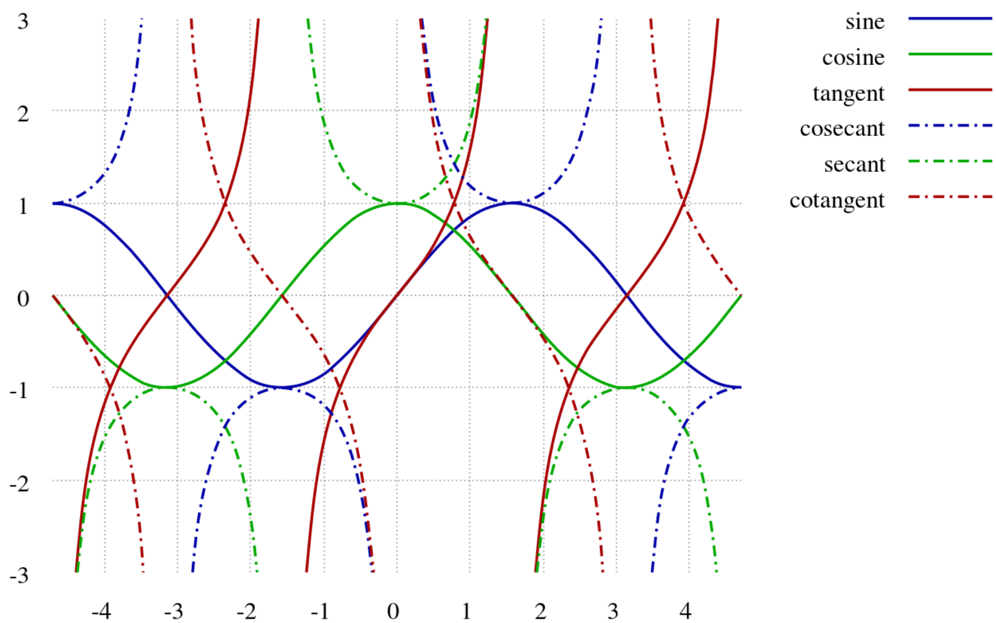
理想勻速交流發電機產生的某一路上的電壓V與時間t的關係。

$V = A\sin \omega t$

其中一路某时刻的电压 = *最大电压* × sin(*系数* × *时间*)

V是引數為t的正弦函數。

由圖 1-8 和圖 1-9 也不難發現，所有三角函數都是改變引數θ，在單位圓裡周而復始循環往復的獲得確定幾何位置所決定的值，所以他們都是週期函數。比如 $\frac{\pi}{4}$（45°）和 $\frac{9\pi}{4}$（405°）所表示的位置是相同的，二者各個三角函數的值也都相同。只要得知它們至少一個週期內的函數圖像，就可以重複得到其他部分，我們可以在$(-\pi, \pi)$區間內繪製六個常見三角函數sin、cos、tan、cot、sec、csc的圖像如下：



在觀察他們的圖像並計算驗證後，不難總結出一系列常見三角函數的圖像特徵。

【規則 11】常見三角函數的圖像特徵

$y = \sin x$（正弦函數）對稱中心 $(k\pi, 0), k \in Z$，對稱軸$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$，它是奇函數。

$y = \cos x$（余弦函數）對稱中心$(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0), k \in Z$，對稱軸$x = k\pi, k \in Z$，它是偶函數。

$y = \tan x$（正切函數）和$y = \cot x$（餘切函數）對稱中心$(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in Z$，沒有對稱軸，它們是奇函數。

以上四個函數在函數圖像經過x軸時，其陡峭程度與$y = x$或$y = -x$相同。

$y = \sec x$（正割函數）對稱中心$(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0), k \in Z$，對稱軸$x = k\pi, k \in Z$，它是偶函數。

$y = \csc x$（余割函數）對稱中心 $(k\pi, 0), k \in Z$，對稱軸$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$，它是奇函數。

為了進行後續的計算討論，我們先根據三角函數最基本的描述和特徵，介紹**余弦定理**和它的特殊情況**畢達哥拉斯定理**，這兩個定理的描述和拼圖簡單直觀理解證明，如圖 1-11 和圖 1-12 所示。

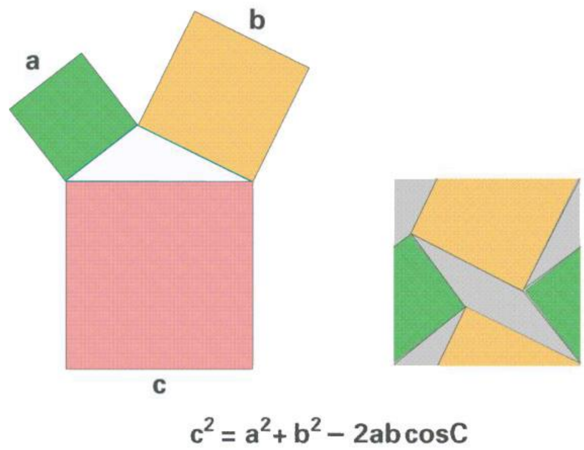


圖 1-11 余弦定理及其圖形證明

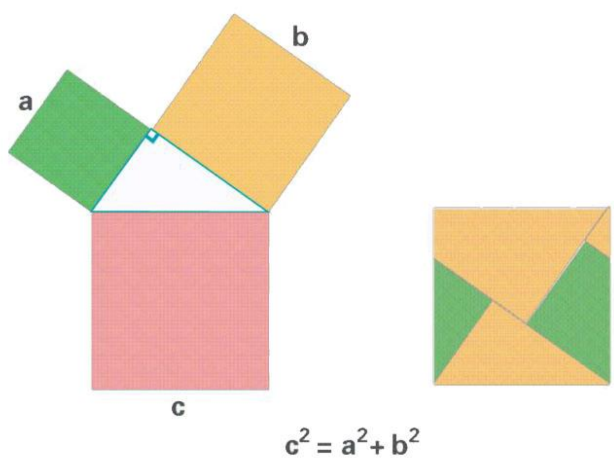


圖 1-12 畢達哥拉斯定理及其圖形說明

這兩個定理證明的動畫展示可以參見本節原始程式碼筆記檔 sec1-1.ipynb 中的相應部分。

除了余弦定理，還有正切定理、餘切定理，它們和我們後續的討論關係不大，都可以由相關三角函數定義和圖 1-8 得出，此處不做贅述，具體可參考 https://zh.wikipedia.org/wiki/三角函數#正切定理。另外，還有很常用的正弦定理，它用於一個三角形的兩個角和一個邊已知時，直接計算未知邊的長度。（實際上不用正弦定理，直接在三角形內作一條三角形的高，也是可以計算的，也就是正弦定理的

證明過程）正弦定理是說，對於邊長為a、b、c，對角為A、B、C的三角形，有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中$R$是這個三角形的外接圓半徑。其證明可見 https://zh.wikipedia.org/wiki/正弦定理。

根據前文對三角函數的描述，通過畢達哥拉斯定理（**畢氏定理**），我們可以通過計算，得到一些特殊角度值的三角函數值，如下表所示：

函数名	$0\ (0^\circ)$	$\frac{\pi}{12}\ (15^\circ)$	$\frac{\pi}{6}\ (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$	$\frac{5\pi}{12}\ (75^\circ)$	$\frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0
sec	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\pm\infty$
csc	$\pm\infty$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	1

在實際應用中，遇到的角度不可能僅僅是表格中所列出的特殊值。首先，我們經常遇到需要將某個三角函數的引數值增加或減少直角倍的情況。根據規則 1，可以直接平移函數圖像來獲得新的函數解決問題，而如果需要進行快速的代數求解的話，就需要這樣一類公式，它能快速求解三角函數引數變化直角（也就是$\frac{\pi}{2}$）的整數倍。這些公式都可以由三角函數的定義和具體的函數圖形推導得出或驗證。

【規則 12】常見三角函數的誘導變換法則（誘導公式）

$trigfunc1\left(\pm\theta+\frac{k\pi}{2}\right)=(-1)^m trigfunc2(\theta)$，$k\in Z$，$m\in\{0,1\}$

$trigfunc1$和$trigfunc2$為三角函數sin、cos、tan、cot、sec、csc等。

當k為偶數時，$trigfunc1$和$trigfunc2$相同；當k為奇數時，$trigfunc1$和$trigfunc2$不同且為同族的三角函數，例如sin和cos，tan和cot，sec和csc等。

m取0還是1，也就是$trigfunc2$前面的符號正負，取決於將θ看作銳角時$trigfunc1\left(\pm\theta+\frac{k\pi}{2}\right)$的正負，當$trigfunc1\left(\pm銳角\theta+\frac{k\pi}{2}\right)$為正時，取正號$m=0$，當$trigfunc1\left(\pm銳角\theta+\frac{k\pi}{2}\right)$為負時，取負號$m=1$。

$trigfunc2$前面的符號正負可簡記為： sin的正值都在x軸上方，cos的正值都在y軸右方，tan/cot 的正值斜著一三象限。誘導公式可以舉例如 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$等等。在$k\in(-4，4]$這個範圍內，可以根據上述規則寫出 90 個

常見三角函數的誘導公式。不常見三角函數例如正矢餘矢也有誘導公式，例如 $\operatorname{versin}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cvs}\theta$，它們可以經由不常見三角函數與常見三角函數的關係簡單的匯出，例如 $\operatorname{versin}\theta=1-\cos\theta$，$\operatorname{cvs}\theta=1-\sin\theta$ 。

除了引數增減直角倍（平移$\frac{k\pi}{2}$）以外，自然就考慮到能否將引數增減任意的數值。例如我們把α看作引數，將三角函數平移任意角度β，計算平移後的函數值，結果寫成α、β的三角函數組合而成的運算式，就是規則 13。對於正弦函數$y=\sin x$，我們又稱其圖像為標準的正弦波，對於平移後的函數$y=\sin(x+\varphi)$，其圖像自然也是正弦波，我們稱φ為$y=\sin(x+\varphi)$這個函數圖像的**相位**。

【規則 13】常見三角函數的兩角和差公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

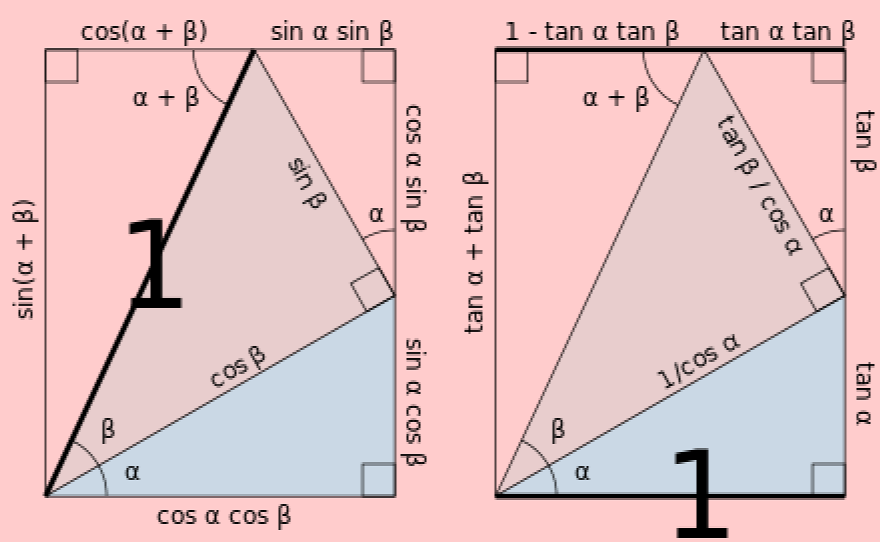
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

通過圖 1-8 和三角函數的定義可以證明這些公式。規則 12 的誘導公式是兩角和差公式在其中一角是$\frac{k\pi}{2}$時的特例。兩角和差公式也可以通過下圖的幾何意義快速直觀理解。

【幾何意義示例】常見三角函數的兩角和差公式

設圖中加粗的部分長度為 1，角α、β如圖標注所示，則兩角和公式可由矩形邊長如圖表達。



針對上面的幾何意義示例裡的左圖，當角β是某個特殊值時，$\cos\beta$和$\sin\beta$可以看成係數，由畢達哥拉斯定理，令$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$可以變成

$\boldsymbol{a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)}$，其中$\tan\varphi=\frac{b}{a}$，

這個式子又叫三角函數的線性組合**輔助角公式**，它說明了：相同週期但是相位不同的正弦波，它們的線性組合（乘以常數並互相加減）有相同的週期但是相位不同。

有了規則 13，我們就有了將一個常見三角函數平移任意角度的代數運算方法。為了覆蓋更多角度的三角函數計算，我們自然可以想到，除了平移之外，還要縮放。根據三角函數的單位圓定義和兩角和公式，我們可以進一步得到二倍角公式（令$\beta=\alpha$，按兩角和公式求和）和三倍角公式（二倍角公式的2α再加α），將二倍角公式和三角函數之間的關係式聯立反過來求解，可以得到半倍角公式，將常用倍角公式列出如下：

【規則 14】常見三角函數的二倍角、半倍角、三倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$$\sec 2\alpha=\frac{\sec^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\csc 2\alpha=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2}\sec\alpha\csc\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\csc\alpha-\cot\alpha$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cos\alpha\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3} + \alpha)\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha)$$

觀察上述公式不難發現，對於正弦函數或者余弦函數，角的乘係數越高，其按兩角和展開後的三角函數的最高冪次越高。可以從兩方面考慮，一是從代數角度，按規則 13 的兩角和公式展開，對基礎三角函數冪次升高了，所以角度越累加（角的倍數越高）展開後三角函數的冪次就越高；二是從函數圖像考察，對正弦函數或者余弦函數，引數前乘以一個倍數係數，這個係數越大，函數圖像就收縮得越緊，頻率就越高，它單調的局部就越陡峭，也就是對基礎三角函數的運算冪次越高（和冪函數一樣，冪次越高靠近(1,1)的局部越陡峭，可以看成三角函數的局部複合冪函數）。

有了對基礎三角函數的平移和縮放對應的快速代數運算，從數值計算的角度，我們可以使用前文中表格給出的特殊角度的三角函數值結合這些快速計算的公式，覆蓋很多角度的三角函數值，自然也可以近似的快速得到某個角度的三角函數值。但平移和縮放的意義遠不止數值計算，把上述三角函數公式按規則 1 從函數規律的角度考察，可以感受到這一類函數獨特的變換特徵。例如圖 1-13，我們可以感受一下正弦函數冪次的提高帶來的圖形變化，我們繪製了藍色的$y = \sin^3 x$，橙色的$y = \sin^{18} x$，綠色的$y = \sin^{33} x$，紅色的$y = \sin^{48} x$，淡紫色的$y = \sin^{63} x$。

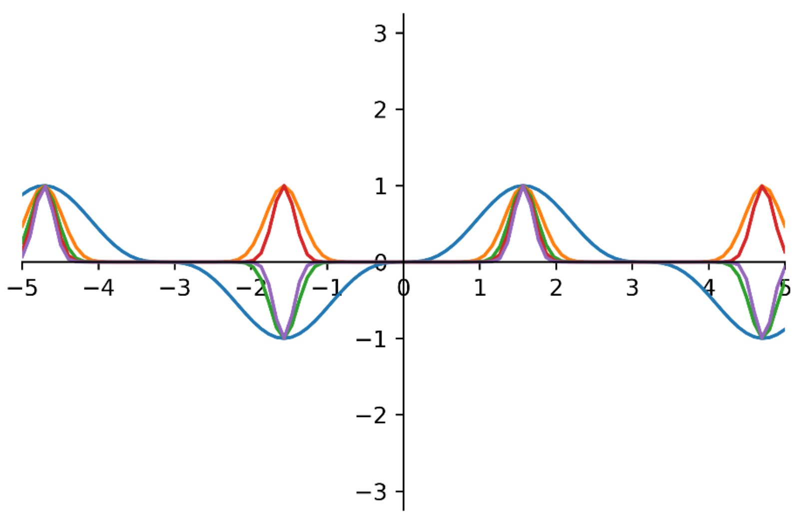


圖 1-13 正弦函數不同冪次的圖像

為了更明顯的體驗前兩段的描述，我們在同一坐標系上繪製綠色的綠色的$y = \sin x$，橙色的$y = \sin 5x$，藍色的$y = \sin^{23} x$，紅色的$y = \sin^5 x$，如圖 1-14 所示。從繪製的圖形可以看出，$y = \sin^{23} x$在接近極大值處比$y = \sin^5 x$要更接近$y = \sin 5x$，按倍角公式展開時，最高次數的項如果不帶係數看，對應的圖像在單調局部的陡峭程度遠不如原來帶係數的項，只有帶上縱向拉伸的係數和其他的項參與運算，它們合起來才是多倍角展開前的圖形。為了更確切的體驗，我們在同一坐標系上繪製正弦三倍角公式左邊和右邊的兩項，如圖 1-15 所示。

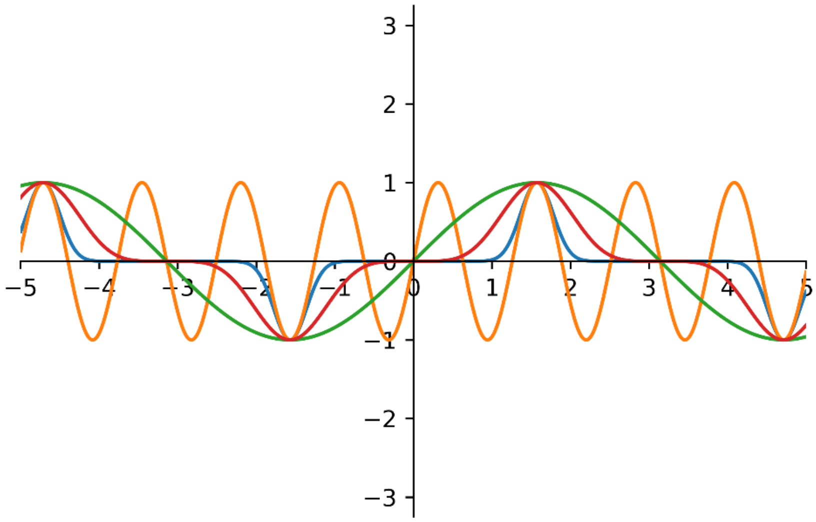


圖 1-14 正弦函數不同冪次和不同角速度的圖像

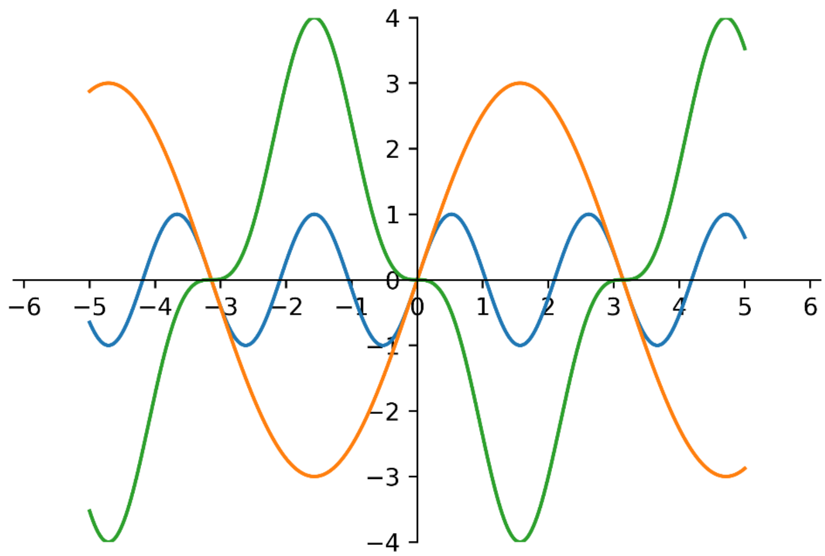


圖 1-15 正弦三倍角公式的各項圖像

正弦三倍角公式在前文的規則 14 中，是$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$。在圖 1-15 中，三條圖線分別是藍色的$y = \sin 3x$，橙色的$y = 3\sin x$，綠色的$y = -4\sin^3 x$，用規則 1 的函數值相加融合，橙色的圖線加綠色的圖線等於藍色的圖線。前文所有的三角公式，除了前文描述時提到的基礎代數幾何證明方法，也可以像此處一樣，利用規則 1，從函數圖形變換的角度理解。

前文描述的三角函數兩角和差公式、倍角公式，大多都是**升冪公式**，就是將公式左側看作基礎三角函數的圖像變換（引數加上什麼東西或者乘以某個係數），其函數運算式的代數展開形式（公式右側）的基礎三角函數的最高冪次上升。有升冪公式自然就有降冪公式，不難發現，半倍角公式就是降冪的，它將引數乘以$\frac{1}{2}$，右側的展開形式出現了根號（$\frac{1}{2}$次冪）。將半倍角公式左右兩邊同時平方，得到的等式組，就是那些三角函數的常見**降冪公式**（冪簡約公式）。概括的說，這些升冪降冪的公式，是為了在不

同頻率（不同角速度）的三角函數和不同冪次的基礎三角函數之間建立聯繫。更廣義的說，是將週期函數引數的縮放（頻率變化）和原頻率基礎函數的冪次建立了聯繫。

常見的降冪公式主要有下表列出的這些：

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$	$\sin^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{1-\cos 4\theta}{8}$
$\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}$	$\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{4}$	$\sin^3\theta\cos^3\theta = \dfrac{3\sin 2\theta-\sin 6\theta}{32}$
$\sin^4\theta = \dfrac{3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta}{8}$	$\cos^4\theta = \dfrac{3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta}{8}$	$\sin^4\theta\cos^4\theta = \dfrac{3-4\cos 4\theta+\cos 8\theta}{128}$
$\sin^5\theta = \dfrac{10\sin\theta-5\sin 3\theta+\sin 5\theta}{16}$	$\cos^5\theta = \dfrac{10\cos\theta+5\cos 3\theta+\cos 5\theta}{16}$	$\sin^5\theta\cos^5\theta = \dfrac{10\sin 2\theta-5\sin 6\theta+\sin 10\theta}{512}$

從上表不難看出，隨著冪次的提高，展開式呈現出了一定的規律，實際上，降冪公式是有規律可循的，反過來說，升冪公式也是一樣，典型的就是**n倍角公式**，規則 14 是$n=2$和$n=3$時的部分特例。

參考連結

任意正整數次冪的**冪簡約公式**

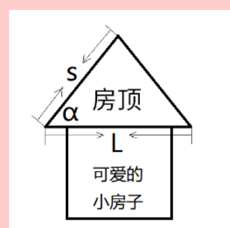
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%81%92%E7%AD%89%E5%BC%8F#%E5%B9%82%E7%AE%80%E7%BA%A6%E5%85%AC%E5%BC%8F

n倍角公式

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%81%92%E7%AD%89%E5%BC%8F#%7F'%22%60UNIQ--postMath-000000C5-QINU%60%22'%7F%E5%80%8D%E8%A7%92%E5%85%AC%E5%BC%8F

三角函數有如此多的公式，以至於前文提到的幾十個公式也只是冰山一角，熟悉它們有意義嗎？這是一個數學學習中經常遇到的問題，這一切僅僅是表面表達的形式變化嗎？它們有意義嗎？我們先看一個和降冪公式有關的建築學中的物理意義示例。

【物理意義示例】利用正弦二倍角降冪觀察函數極值



一間新房建成時即將要封頂，考慮到下雨時落下的雨滴能儘快流離房頂，

要設計好房頂的坡度，近似的，設雨滴沿房頂滾下時做理想的無初速度無摩擦運動。

那麼示意圖中銳角α的角度應該是多少？ 可見雨滴做理想的勻加速直線運動，

根據前文所述的一元二次函數物理意義示例中的公式，$s=\frac{1}{2}at^2$，

$\frac{L}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2$，解$t$得 $t=\sqrt{\frac{gL}{\sin\alpha\cos\alpha}}$，根據正弦二倍角公式 $t=\sqrt{\frac{2gL}{\sin 2\alpha}}$，

顯然當$\alpha=\frac{\pi}{4}$時，$\sin 2\alpha$取得極大值1，t取得極小值$\sqrt{2gL}$。

對於這個問題上文中的求解，二倍角公式的降冪操作所具有的意義是，讓我們能夠將函數表達化成便於分析解決問題的形式。當然，這並不是說此處必須要使用二倍角公式，求引數為α的函數$t = \sqrt{\frac{gL}{\sin\alpha\cos\alpha}}$在$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$的極小值，這個問題也可以用直接給出函數圖形等方法解決，正所謂條條大路通羅馬。不僅僅是這個問題，大多數的下游任務具體問題，都可以用多種方法管道解決，我們掌握的工具越多越豐富，解決問題就越快速便利。這就好比，如果你完全不學習不懂三角學和力學，不知道二倍角公式也不知道勻加速直線運動的位移公式，甚至不知道函數是什麼，上文這個雨滴流淌的問題你也未必解決不了，但是無疑你解決需要花費更多的精力和時間（或者之前有了其他方面的有助於解決這個問題的經驗知識積累或者工具積累）。歷史和知識存在的意義，就是讓你在求解下游任務的時候起點更高一些，可能原本需要思考、實驗、計算幾天才能解決的問題，有了**先驗知識的積累**，也許你只用 10 秒就得到了答案，這就是知識的力量。本書盡力提供給讀者盡可能強大的這種力量和工具，但對讀者來說更有價值的是汲取這種力量的速度和自身的思考力，如果本書能在這兩方面同樣給予讀者某些提高，實乃作者萬幸之至。哪些東西有意義，哪些東西更重要，要看你的目標是什麼。如果目標是為了實用的下游任務，要看要完成的下游任務是什麼，具體是要做什麼；如果目標是為了求知和理解本身，恭喜你，我也是，我們是同路人。從求知和理解本身的角度出發，前文闡述的一堆公式和主線的思路是有意義的，因為這一切是後面的章節討論積分變換（例如傅裡葉變換）等內容的基礎；從實用的角度出發，要看具體要解決什麼問題，如果遇到的是諸如上述示例房頂雨滴流淌這樣的問題，這些討論也許有那麼一丁點但非必要的作用。

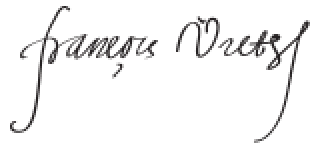
常見三角函數的降冪升冪公式除了前文所描述的，還有韋達的**積化和差、和差化積**，如下表所示：

积化和差	和差化积
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

這些公式可以由兩角和差公式直接證明。這裡的韋達就是前文一元二次方程韋達定理那個韋達。他在其 1579 年出版的三角學著作《應用於三角形的數學定律》（Canon mathematicus seu ad triangula）一書中給出了積化和差、和差化積公式和前文所述的很多公式。韋達最早明確給出有關圓周率的無窮運算式，之後韋達用代數方法解決幾何問題的思想由笛卡兒、費馬繼承，笛卡爾發展出了前文

所介紹的直角坐標系解析幾何。歷史上，法國在 17 世紀第二個三分之一的時間裡是無可爭辯的數學中心，最重要的人物大概就是笛卡爾和皮埃爾・德・費馬（就是費馬大定理那個費馬）。

法國數學家 弗朗索瓦・韋達 法語名 François Viète

韋達本人簽名 

1540 年生日不詳－1603 年 12 月 13 日

他是有意識地、系統地使用符號的人。他不僅用字母表示未知量和未知量的乘冪，而且用來表示一般的係數。在他的著作《應用於三角形的數學定律》中，有解直角三角形、斜三角形等的詳述，並且還有平面三角形的正切定理、球面鈍角三角形的余弦定理、許多三角恒等式等。他發展了利用六種三角函數求解各種平面與球面三角形的方法。

另外，還有一些比較常用的三角公式，他們並非升降冪變化的。這些公式中，比較有代表性的是**托勒密定理**和**正切半形公式**（又叫“萬能公式”）。

參考連結

托勒密定理的三角函數表達 https://zh.wikipedia.org/wiki/托勒密定理#和差化積證明

萬能公式可以將各種三角函數都化成正切半形來統一表達。這樣可以把具有不同三角函數的問題裡的所有三角函數都化成一種函數進行統一運算或者統一換元（比如後續章節介紹的某些含有三角函數的積分求解），是一種無腦萬能的解決方法。將規則 14 中的正切半倍角公式直接代入規則 15 的運算式中，即可證明這些公式。

【規則 15】正切半形公式（萬能公式）

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

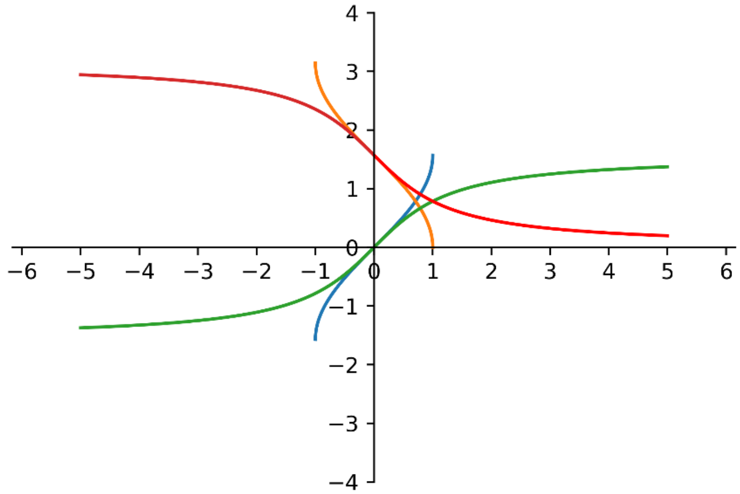


圖 1-16 常見的反三角函數圖像

由於三角函數都是週期函數，它們在定義域上是沒有反函數的，因為反過來不是函數（引數取一個值，對應的計算結果有多個而不唯一）。所以，反三角函數，是在三角函數的主值區間（主值區間就是描述一個函數所有值的區間，比如對於$\sin x$，其主值區間就是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；而$\cos x$就是$[0,\pi]$）求得的反函數。我們繪製常見的**反三角函數**如圖 1-16 所示，分別是藍色的$y=\arcsin x$，橙色的$y=\arccos x$，綠色的$y=\arctan x$，紅色的$y=\operatorname{arccot} x$。反正割和反余割函數之所以暫且不做討論，是因為不同教科書定義的值域有可能不同，為了避免歧義和誤解，遇到實際問題可以具體問題具體分析，反正割和反余割函數也是取一段正割或一段余割函數求反函數。另外，不常見的三角函數也都有對應的反三角函數，同樣的道理，都是取三角函數的某一段，求其反函數獲得。本書反三角函數使用arc開頭的記號，是為了避免使用諸如$\sin^{-1}x$這樣的表示會和$\frac{1}{\sin x}$產生混淆。

根據三角函數和反三角函數的定義、圖 1-16、規則 7、規則 11，不難總結常見反三角函數的圖像特徵如下：

【規則 16】常見反三角函數的圖像特徵

$y=\arcsin x$（反正弦函數）對稱中心 $(0,0)$，它是奇函數，定義域上的增函數。

$y=\arccos x$（反余弦函數）對稱中心 $(0,\frac{\pi}{2})$，定義域上的減函數。

$y=\arctan x$（反正切函數）對稱中心 $(0,0)$，定義域上的增函數。

$y=\operatorname{arccot} x$（反餘切函數）對稱中心 $(0,\frac{\pi}{2})$，定義域上的減函數。

反正弦函數和反余弦函數的圖像關於$y=\frac{\pi}{4}$對稱。

反正切函數和反餘切函數的圖像關於$y=\frac{\pi}{4}$對稱。

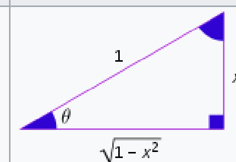
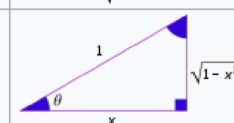
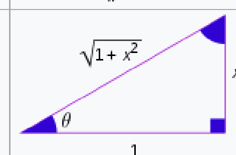
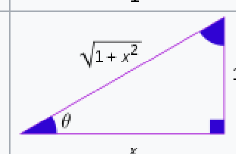
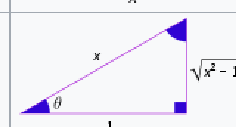
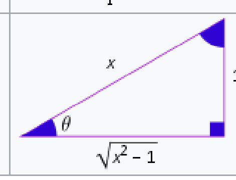
再根據規則 12 給出的誘導公式，我們很容易得到反三角函數之間的關係。比如，根據誘導公式 $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$，令$y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$，可以得到$\arccos y = \frac{\pi}{2} - x$，而原等式左右兩側相等，$y = \sin x$，可以得到$\arcsin y = x$，所以$\boldsymbol{\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y}$。同樣的道理，我們可以這樣根據幾十個常用的誘導公式，得到幾十個反三角函數之間的關係。

更進一步的，其他的公式關係也是一樣，所有的三角函數關係式，都可以用上述換元方法，寫出對應的反三角函數關係式。其中在解決實際問題中，比較常用的是**反三角函數的加減法公式**。

參考連結

反三角函數的加法公式和減法公式 https://zh.wikipedia.org/wiki/反三角函數#加法公式和減法公式

反三角函數和三角函數複合的計算，可以參考下表進行，他們都是可以由定義直接匯出的。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	图示
$\arcsin x$	$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$	$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	
$\arctan x$	$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan(\arctan x) = x$	
$\operatorname{arccot} x$	$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x}$	
$\operatorname{arcsec} x$	$\sin(\operatorname{arcsec} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\cos(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x}$	$\tan(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2-1}$	
$\operatorname{arccsc} x$	$\sin(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{x}$	$\cos(\operatorname{arccsc} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\tan(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

至此為止，我們介紹了本節最開始時提及的構成初等函數的全部幾類基礎函數。將這些函數彼此進行有限次的加減乘除、有理數次數的乘方開方，互相進行有限次的函數複合，可以得到千變萬化的函數運算式，這些運算式每一個都是初等函數。

本節的最開始，我們定義函數的時候強調過，函數輸入一個值，其輸出是唯一的確定的。如果一個運算規則，輸入一個值，輸出的值不止一個，則不是一個函數。所以很顯然，在笛卡爾座標表達的很多常見的曲線圖形，都不是函數（只要過曲線上所有的點對 x 軸作垂線，如果所作的垂線和曲線有不止一個交點，就說明這個曲線並不是一個函數的圖像）。

下面我們介紹常用的非函數的圖像：圓和橢圓。

根據畢達哥拉斯定理，我們很容易想到以原點為圓心，半徑為1的**圓**，他的運算式應該是$x^2+y^2=1$，也就是一個這樣的點的軌跡，這個點到原點的距離始終為1（它的橫縱坐標的平方和是1^2），如圖 1-17 所示。

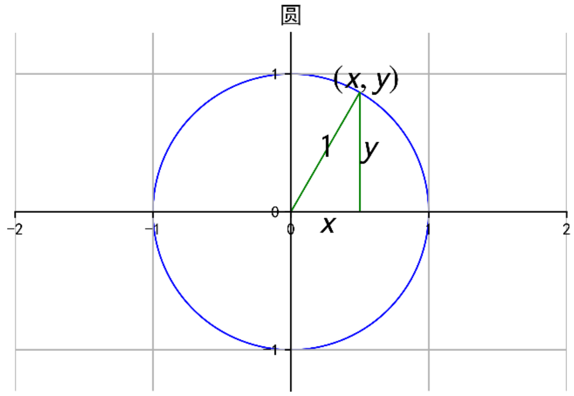


圖 1-17 圓心在原點的單位圓圖形

很容易想到，半徑為 r 的圓心在原點的圓，其運算式是$x^2+y^2=r^2$。

對於這個圓圍成的實心圓形**區域**，可以用不等式表達$x^2+y^2\le r^2$。

那麼圓心不在原點呢？比如圓心在(x_0,y_0)的圓，其運算式為$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$。

對於這個圓圍成的實心圓形區域，可以用不等式表達$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$。

為了更清晰的說明任意運算式的圖像平移、縮放、旋轉變換的代數表達，我們在前文規則 1 的基礎上，拓展在二維直角坐標系任意圖形的運算式的平移縮放旋轉變換規則。

【規則 17】二維直角坐標系上的圖形變換

一個含有動點座標（含變數x、y）資訊的等式或不等式，其在二維直角坐標系上表達的圖形，變換規則和對變數x、y的操作的對應關係如下：

向右平移x_0距離（向左平移相當於向右平移$-x_0$）：在所有x減去平移量，$x-x_0$

向上平移y_0距離（向下平移相當於向上平移$-y_0$）：在所有y減去平移量，$y-y_0$

以y軸為中心收縮a倍（伸展相當於收縮$\frac{1}{a}$）：給所有x乘以收縮倍數，ax

以x軸為中心收縮b倍（伸展相當於收縮$\frac{1}{b}$）：給所有y乘以收縮倍數，by

以原點為中心逆時針旋轉角度θ（順時針旋轉相當於逆時針旋轉$-\theta$）：

所有的x變成：$x\cos\theta - y\sin\theta$

所有的y變成：$x\sin\theta + y\cos\theta$

規則 17 的平移和縮放規則，和前文的規則 1 是完全類似的，這裡多出了旋轉變換的規則。這個旋轉規則可以證明如下。如圖 1-18 所示，假設v的頂點是(x,y)，v與x軸正方向的夾角為φ，(x,y)到原點的距離是r，將v逆時針旋轉角度θ得到v'，v'的頂點是(x',y')。

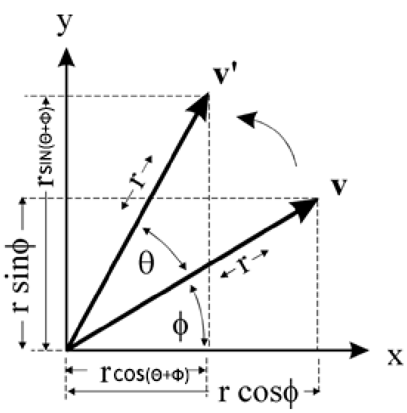


圖 1-18 二維直角坐標系中旋轉一定角度的座標變化

根據圖 1-18 所示，顯然$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$x' = r\cos(\theta+\varphi)$，$y' = r\sin(\theta+\varphi)$。將$x'$和$y'$的運算式按規則 13 的兩角和公式展開，可得：

$$x' = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\theta+\varphi) = r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi = y\cos\theta + x\sin\theta$$

至此，我們就可以對二維直角坐標系內的任意圖形，根據規則 17 進行平移、縮放、旋轉。根據規則 17，我們對剛才單位圓的運算式進行變換，把它拉伸成**橢圓**，以y軸為中心沿x軸伸展a倍，以x軸為中心沿y軸伸展b倍，給x和y分別乘以$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$（此處假設$a > b > 0$），得到橢圓的運算式$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，如圖 1-19 所示（此處假設$a = 1.8$ $b = 1.2$）。

根據圖 1-19 畫出的橢圓，我們標記兩個點，$(-\sqrt{a^2-b^2},0)$和$(\sqrt{a^2-b^2},0)$。如圖，橢圓上任意一點(x,y)到這兩點的距離d_1、d_2可以按畢達哥拉斯定理（或更直接的"**兩點間距離公式**"，即(x_1,y_1)和(x_2,y_2)兩點間的距離$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$）寫成$\sqrt{(x^2+\sqrt{a^2-b^2})^2 + y^2}$和$\sqrt{(x^2-\sqrt{a^2-b^2})^2 + y^2}$。根據之前得到的橢圓運算式$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，可得$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$。將其代入距離$d_1$

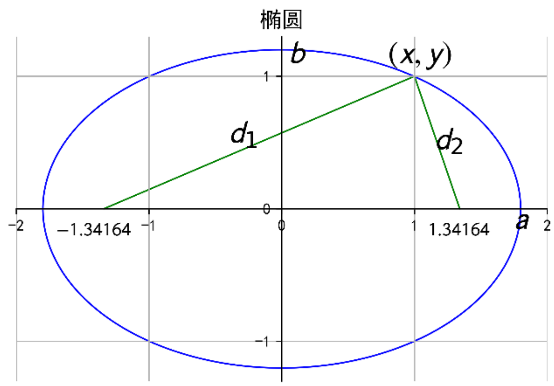


圖 1-19 由單位圓拉伸得到的橢圓圖形

的運算式，可得$d_1=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2\sqrt{a^2-b^2}x+a^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x+a)^2}=a+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$。同理可得：$d_2=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\sqrt{a^2-b^2}x+a^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a)^2}=a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$。所以$d_1+d_2=2a$。

由此可知，我們通過單位圓縮放得到的橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（此處假設$a>b>0$），可以在其長軸上找到關於橢圓中心對稱的兩點$(-\sqrt{a^2-b^2},0)$和$(\sqrt{a^2-b^2},0)$，使橢圓上任意一點到這兩點的距離之和為定值$2a$。這也是橢圓的一種定義方法，即曲線上任意一點到兩定點距離之和為定值的曲線。

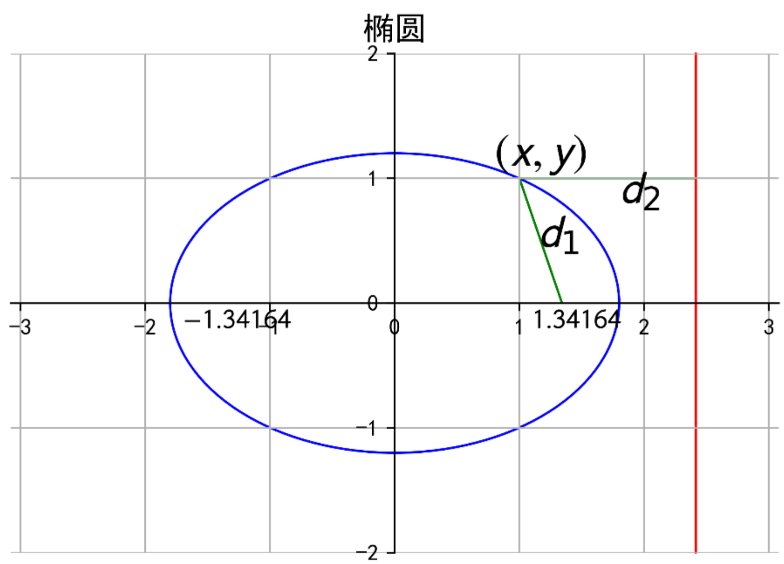


圖 1-20 橢圓及其準線

我們再在同樣的橢圓旁邊尋找一條垂線$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$，和前文的分析相同，我們容易得到此處$d_1=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\sqrt{a^2-b^2}x+a^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a)^2}=a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$，而$d_2=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}-x$，將$d_1$、$d_2$相除並通分可得$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b^2}x}{a}}{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b^2}x}{\sqrt{a^2-b^2}}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$。如果遇到這條直線不是垂直與坐標軸的情況，計算距離可按“**點到直線的距離公式**”進行，即$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$，其中直線是$Ax+By+C=0$，點是$(x_0,y_0)$，它和之前介紹的兩點間兩裡公式一樣，可以由畢達哥拉斯定理證明。

由$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$可知，橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（此處假設$a>b>0$），可以找到一條與長軸垂直的直線$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$，使橢圓上任意一點到點$(\sqrt{a^2-b^2},0)$的距離比這橢圓上任意一點到這條垂線的距離為定值$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$。這也是橢圓的一種定義方法，即曲線上任意一點到一個定點與這任意一點到一條定直線的距離之比是一個小於1的正常數的曲線。基於這種曲線上任意一點到定點和定直線距離比值是定值的描述，我們可以定義一類曲線，不僅僅是橢圓。平面上，到定點的距離與到定直線的距離的比e是常數的點的軌跡我們稱作**圓錐曲線**（conic section）。當$0<e<1$時為橢圓；當$e=1$時為拋物線；當$e>1$時為雙曲線。這裡的常數e稱為圓錐曲線的**離心率**，定點稱為**焦點**，定直線稱為**準線**。焦點到曲線上一點的線段稱為**焦半徑**。之所以叫圓錐曲線，是因為這一類曲線是不同角度的平面與圓錐的錐面相交的交線，如圖 1-21 所示，第一個圖交線為拋物線，第二個圖交線為圓和橢圓，第三個圖交線為雙曲線，可見與圓錐相交的平

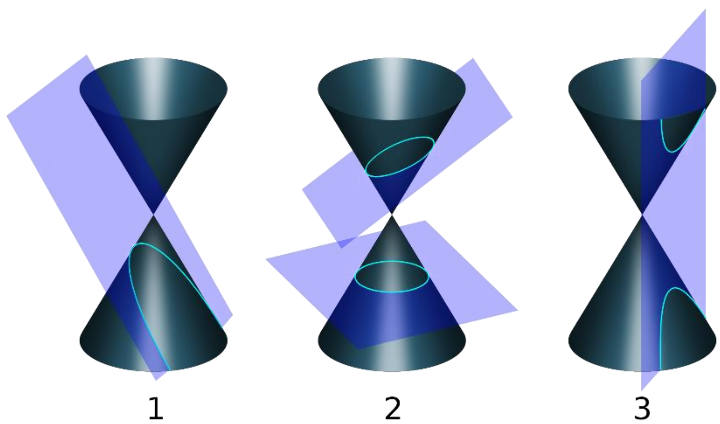


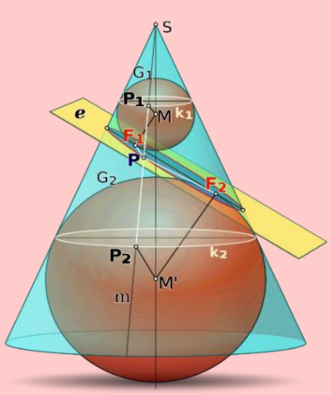
圖 1-21 圓錐曲線

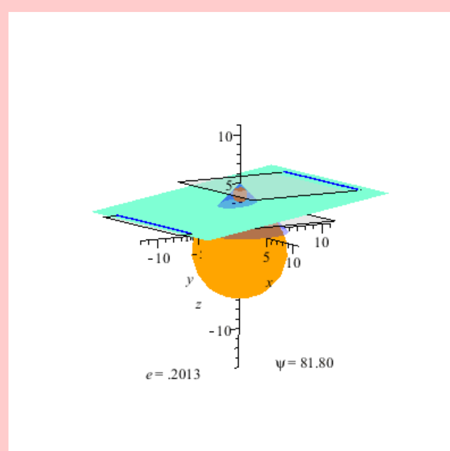
面和圓錐母線的角度比也和離心率有關。出生在法國的丹德林（Germinal Pierre Dandelin）證明了我們之前描述的確實是圓錐曲線。

【幾何意義示例】圓錐曲線的丹德林球（霜淇淋筒定理）

平面上到定點的距離與到定直線的距離的比e是常數的點的軌跡就是平面與圓錐錐面相交的交線。

證明過程見 https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres





動畫見本節示例代碼

實際上，在笛卡爾坐標系裡，一個有關x、y的二元二次方程總是能表示圓錐曲線。各圓錐曲線的方程、離心率、焦點準線距離等常用速算數據可以見下表總結：（**半焦距**指兩焦點間距的一半，**半正焦弦**是過焦點最短的弦長度的一半，過焦點、平行於準線的直線與圓錐曲線相交於兩點，此兩點間的線段稱為圓錐曲線的**通徑**，物理學中又稱為**正焦弦**。）

圆锥曲线	方程	离心率（e）	半焦距（c）	半正焦弦（ℓ）	焦点准线距离（p）
圆	$x^2+y^2=a^2$	0	0	a	∞
椭圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2-b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$
抛物线	$y^2=4ax$	1	$-$	$2a$	$2a$
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

我們對照這個表格，重新看本節前面描述的拋物線和雙曲線。當時描述的是函數圖像，所以局限在圖像用垂線相交只能有一個交點（引數輸入任何值，函數值都是唯一確定的）。實際上當初描述的一元二次函數和倒數函數，就是上表中拋物線和雙曲線方程的標準形式旋轉了一定角度，從而使它們是函數圖像。可以通過規則 17 描述的旋轉變換，將$y^2=4ax$旋轉$\frac{\pi}{2}$成$y=qx^2$、將$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$旋轉$\frac{\pi}{4}$成 $y=\frac{q}{x}$。

【規則 18】圓錐曲線的常用特徵

離心率相同的圓錐曲線都是相似圖形。一個圓錐曲線，只要確定了離心率，形狀就確定了。特別的，因為拋物線的離心率都等於1，所以所有的拋物線都是相似圖形。函數圖像分析時描述的開口大小和陡峭程度，都是針對某個固定的座標尺度而言的。

Pappus 定理：圓錐曲線上一點的焦半徑長度等於該點到相應準線的距離乘以離心率。（定義變形即得）

Pascal 定理：圓錐曲線的內接六邊形，若對邊兩兩不平行，則該六邊形對邊延長線的交點共線。

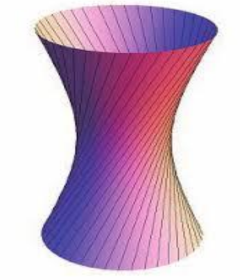
Brianchon 定理：圓錐曲線的外切六邊形，其三條對角線共點。

【物理意義示例】拋物線和雙曲線的應用

由拋物線繞其對稱軸旋轉，可得到一個叫做旋轉拋物面的曲面。在這個軸上有一個具有奇妙性質的焦點，任何一條過焦點的直線由拋物面反射出來以後，都成為平行於軸的直線。這就是我們為什麼要把探照燈反光鏡做成旋轉拋物面的道理。

由雙曲線繞其虛軸旋轉，可以得到單葉雙曲面，它又是一種直紋曲面，

由兩組母直線族組成，各組內母直線互不相交，而與另一組母直線卻相交。



人們在設計高大的立塔（如冷卻塔）時，就採取單葉雙曲面的體形，既輕巧又堅固。

【物理意義示例】不同速度的天體被星球捕獲成的運動軌跡（不同離心率的圓錐曲線）

假設某天體在距離星球一定距離時有垂直於引力方向的速度。

這個速度較慢時，會墜落到星球上；

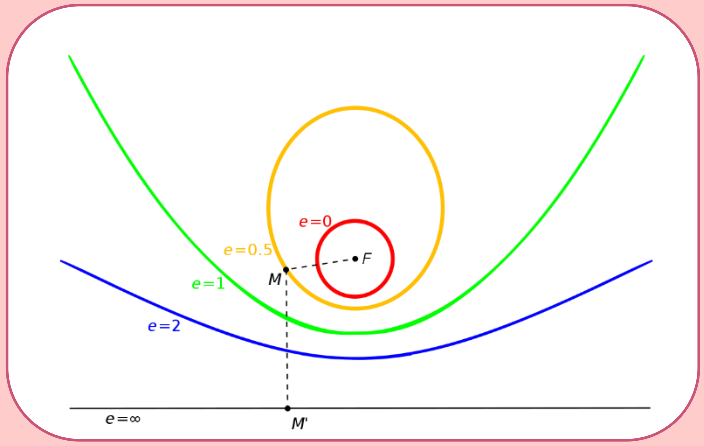
速度稍快些，會進行圓周運動；

速度再快些，軌道橢圓；

速度再快些，拋物線；

速度再快些，雙曲線；

速度再快些，接近直線。



我們可以像前文定義橢圓那樣，給雙曲線也賦予多種定義。除了圓錐曲線的慣用形式比值離心率的定義，雙曲線還可以描述為：曲線上任意一點到兩定點距離之差為定值的曲線。基於其標準形式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和比值離心率定義，可以進行相關演算驗證這種定義，具體計算方法和前文敘述橢圓部分的類似。

下面我們介紹**雙曲函數**。我們可以將單位圓和三角函數的圖 1-8 加入雙曲線$x^2-y^2=1$，構造雙曲正弦$y=\sinh x$、雙曲余弦$y=\cosh x$、雙曲正切$y=\tanh x$等函數，如圖 1-22 所示。

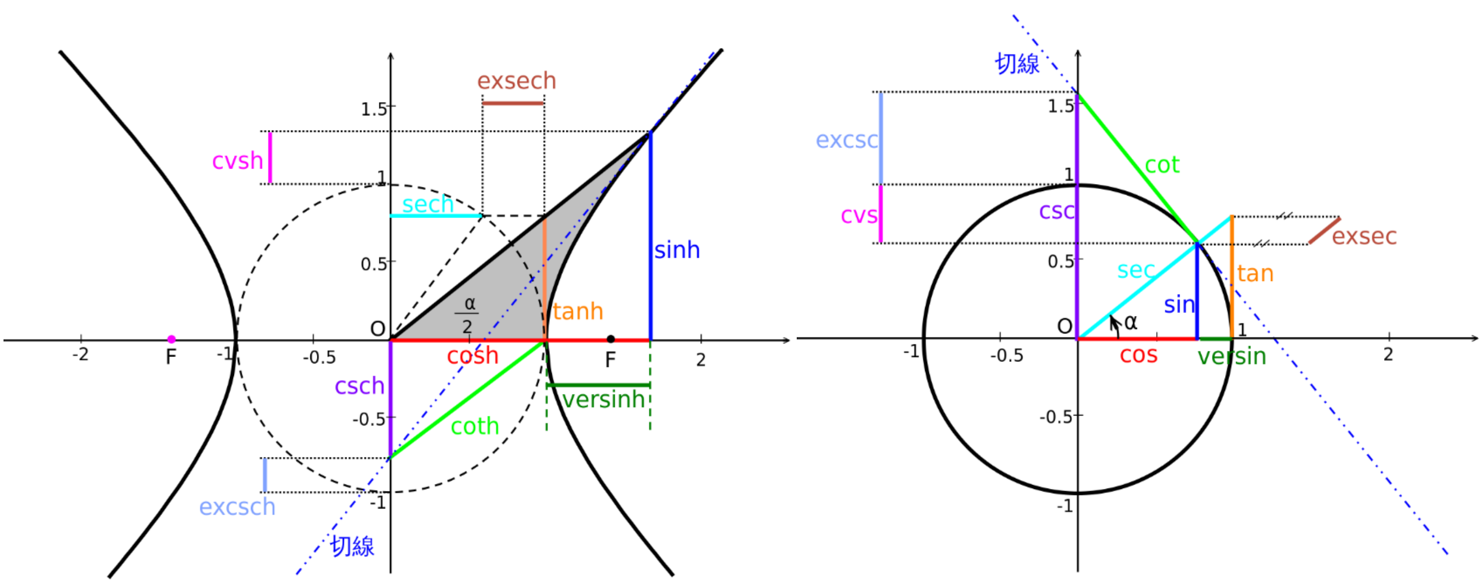


圖 1-22 左圖雙曲函數在單位雙曲線上表示，灰色部分面積為$y=\frac{1}{x}$雙曲角的一半；右圖三角函數在單位圓上表示

圖中雙曲函數的引數是雙曲角α，函數值為圖中所示線段長度，類似圖 1-8。值得注意的是，雙曲角不是夾角角度，而是正比於圖中灰色面積。

【物理意義示例】雙曲余弦函數與懸鏈線

懸鏈線（Catenary）是一種常用曲線，物理上用於描繪懸在水準兩點間的因均勻引力作用向下彎的均勻軟繩的形狀，因此得名。運算式為：$y=\frac{a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})}{2}$记为$y=a\cosh\frac{x}{a}$，其中$x$是引數，$a$是常量。

其也為初等函數。$y=\cosh x$ 稱為**雙曲余弦函數**。

奧古斯都・德・摩根（就是集合運算裡摩根律那個摩根）在其 1849 年出版的教科書《Trigonometry and Double Algebra》中將三角學擴展到了雙曲線。為了說明雙曲函數的定義由來，我們回顧最簡單的雙曲線$y=\frac{1}{x}$的右上支圖像，如前文圖 1-3 所示的藍色部分。$y=\frac{1}{x}$的漸近線是兩個坐標軸，它們互相垂直，這個$y=\frac{1}{x}$被稱為**直角雙曲線**。根據規則 4 中的描述，我們可知$y=\frac{1}{x}$離原點最近的點為$y=x$上的$(1,1)$，它到原點的距離是$\sqrt{2}$，我們按規則 17 中的旋轉變換將其順時針旋轉$\frac{\pi}{4}$，即可將其原來的對稱軸$y=x$擺平到x軸上。然後再按規則 17 中的縮放變換，以y軸為中心沿x軸收縮$\sqrt{2}$倍，即可得到圖 1-22 中所示的雙曲線，它的運算式是$x^2-y^2=1$，我們稱其為**單位雙曲線**。

早期的研究不少是在倒數函數的圖像上完成的，我們只要將其按上面的描述旋轉並按需進行必要的縮放，就可以得到擺正的焦點在x軸上並且與單位圓相切的單位雙曲線。反過來也是一樣的，我們把圖 1-22 中的雙曲線旋轉縮放回$y=\frac{1}{x}$的話，圖中所示的雙曲正弦和雙曲余弦的長度就要伸展成原來的$\sqrt{2}$倍，如圖 1-23 中所示。單位雙曲線中雙曲線扇形的面積（圖 1-22 中的灰色部分）是對應雙曲線$y=\frac{1}{x}$下雙曲角的$\frac{1}{2}$。

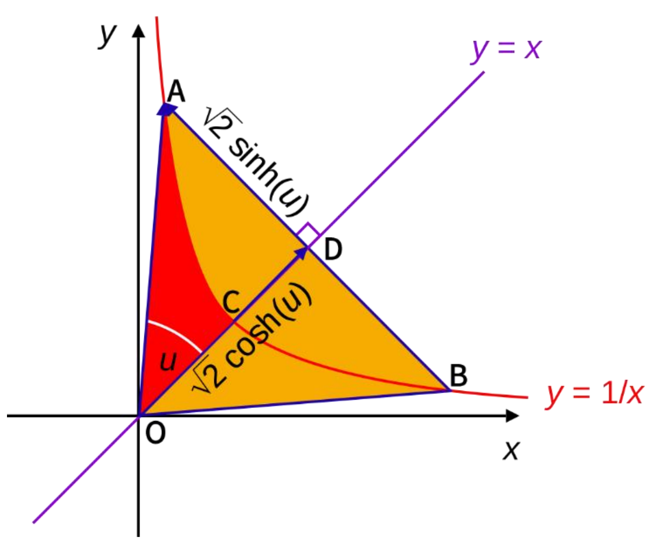


圖 1-23 在$y=\frac{1}{x}$研究雙曲函數

雙曲角是指在笛卡爾座標平面上，由原點(0,0)出發的兩條射線與雙曲線$y=\frac{1}{x}$相交處$(x,\frac{1}{x})$及(1,1)之間的角，標稱這個雙曲角的量級並不是圓弧度，而是圍成的這個雙曲線扇形的面積，這個量級就是$\ln x$。

參考連結

1647 年格裡高利將對數聯繫於雙曲線$y=\frac{1}{x}$的弓形面積，而牛頓給出自然對數的無窮級數大約在 1665 年 https://en.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent

在圖 1-23 中，u**就是雙曲角**，標稱它的就是**紅色部分的雙曲線扇形**ACO**的面積**，比如A的座標是$(x_A,\frac{1}{x_A})$，那麼$u=\ln x_A$，反之$x_A=e^u$。這個雙曲角是有正負的，比如如果我們定義圖中紅色部分的雙曲角COA是負的，那在$y=x$另一側對稱的那個角COB就是正的。因為B的座標是$(\frac{1}{x_A},x_A)$，雙曲角COB就是$\ln\frac{1}{x_A}=-u$，B的橫坐標就是e^{-u}。根據圖 1-23 中的幾何關係，直線$y=x$與x軸正方向的夾角是$\frac{\pi}{4}$，直線ADB與其垂直，A、B兩點的橫坐標分別為e^u、e^{-u},可知$AD=\frac{\sqrt{2}(e^u-e^{-u})}{2}$。再根據之前的分析與圖 1-22 聯繫，可知$\sqrt{2}\sinh u=AD=\frac{\sqrt{2}(e^u-e^{-u})}{2}$，故$\mathbf{\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$。同理可得$\mathbf{\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}}$，再根據相似三角形的比例關係，可解得$\mathbf{\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$。

雙曲函式定義式的另一種幾何角度的具體推導，也可以參考如下連結，第一個連結提供了在沒有積分知識也不知道$\ln x$的情況下，用純幾何圖形和雙曲線的特徵（同樣用到了格裡高利的書籍 Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni (Geometric work of squaring the circle and conic sections)中的結論）推導出雙曲正弦和雙曲余弦函數的含有自然對數函數底數e的運算式，其思路具有較強的借鑒性，可以類比參考前文對“信息量”的定義。

參考連結

1891 年期刊 Messenger of Mathematics 中雙曲正弦和雙曲余弦定義式的幾何匯出 https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599484047_0020?tify={%22pages%22:[150],%22view%22:%22info%22}

1647 年書籍 Geometric work of squaring the circle and conic sections 原版掃描 https://books.google.com/books?id=xMBhhRtupQsC&pg=PT35#v=onepage&q&f=false

雙曲函數的最初來源 懸鏈線研究 https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary

https://zh.wikipedia.org/wiki/懸鏈線

有人自然會問，為什麼要定義雙曲角作為雙曲函數的引數，為什麼不直接用圖 1-23 裡的x作為引數呢？為什麼不直接用圖 1-22 裡的弧度角度作為引數呢？我們觀察到，二者主要的區別是計數的量級不同。針對這一點，我們介紹**坐標軸的函數變換**。

例如這裡的雙曲角，實際上就是一種對x座標的對數變換。如圖 1-24，我們將原來的x軸變換成m軸，$m = \ln x$，原來在xy平面上的直線$y = x$變成了指數函數的樣子。當我們使用原來的等距座標，某些問題不便於觀察和解決的時候，可以考慮坐標軸的函數變換。這裡的坐標軸對數變換相當於將座標刻度變成不等距的標稱，座標值越大，間隔越密集（例如圖 1-24 的右圖，如果在m軸對應標出x座標，會發現它們是不等距的，越遠離原點越密集）；相反的，如果進行坐標軸的指數變換，則座標值越大，間隔越鬆散。

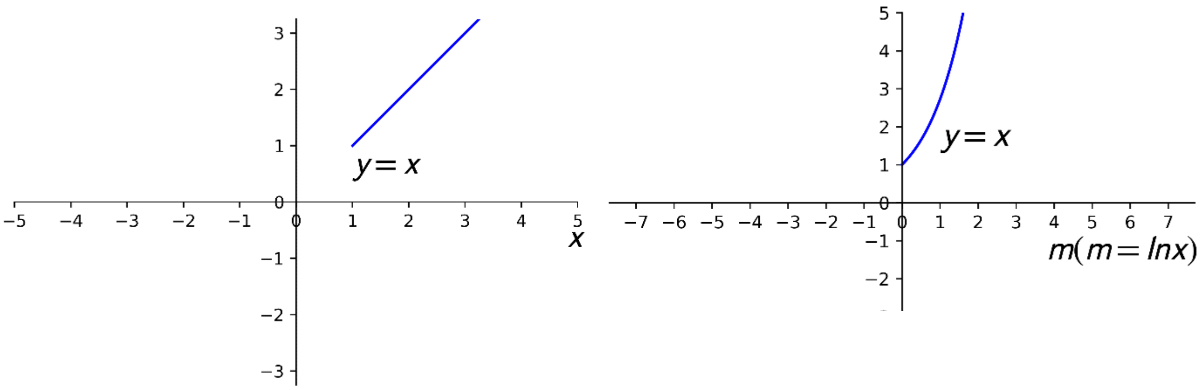


圖 1-24 坐標軸的對數變換 函數$y = x$在不等距座標下的表達

實際上，在前文對圖 1-23 進行討論時，本質就是計數量級的變換，將x座標進行對數變換變成了u座標，和圖 1-24 中x軸變成m軸是一樣的。坐標軸的函數變換，代數運算本質上是一種函數複合。我們最常用的是x軸或y軸的對數變換，主要用於表達某些在等距座標下不容易直觀觀察的圖形。圖 1-23 的討論，雙曲余弦的函數值如果輸入x進行計算，將x直接作為引數，函數形態是類似圖 1-4 的一元一次加倒數函數，這種形態不便於說明解決當時的問題。雙曲余弦這種表達最初是懸鏈線形態的研究中得到的，它的圖像本身就是懸鏈線（懸在水準兩點間的均勻引力作用下的軟繩的形狀）的形態。

如果不用微積分方法，把懸鏈線近似的拆成平均間隔的有限個理想質點進行幾何力學分析，然後尋找規律，用歸納法推廣到無窮多個質點，就是懸鏈線。在有限個理想質點做幾何力學分析時，不難發

現，這些質點沿重力方向垂直投影到水平線上，分佈是越靠近兩端越密集的，而如果得到了每個質點所處高度關於質點計數的函數表達，顯然是無法直接說明懸鏈線本身形態的，必須設法在質點水準位置和其所處高度之間建立聯繫，坐標軸的函數變換（或類似的圖形分析方法）是微積分還不流行的時代解決問題的重要方法之一。處在不同的歷史時期，解決同樣的問題可能會有截然不同的思路。在成熟的電腦工具廣泛應用的今天，從一個幾何圖形擬合出一個函數表達已經是易如反掌的事情，但我們強大的工具和演算法都是以前人積累的分析結果為基礎進行構建的。凡事求魚不如求漁，理解歷史並把握方法創造的本質，很多時候比獲得單純的問題結果更重要。

如同當α遍歷實數集$\mathbb{R}$時，點$(\cos\alpha, \sin\alpha)$的軌跡是一個圓$x^2+y^2=1$一樣，當α遍歷實數集$\mathbb{R}$時，點$(\cosh\alpha, \sinh\alpha)$的軌跡是單位雙曲線$x^2-y^2=1$的右半邊。這是因為有以下的恒等式：$\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha=1$，參數$\alpha$不是圓角而是雙曲角，它表示$x$軸、連接原點與雙曲線上點$(\cosh\alpha, \sinh\alpha)$的直線、單位雙曲線三者所圍成面積的兩倍。這種用一個參數α來遍歷出曲線的方式，分別寫出的x、y關於α的運算式，稱作曲線的**參數方程**。

我們可以用老套路，繪製雙曲正弦$y=\sinh x$、雙曲余弦$y=\cosh x$、雙曲正切$y=\tanh x$的函數圖像，如圖 1-25 所示，進而結合圖像和前文所述，總結它們的圖像特徵。

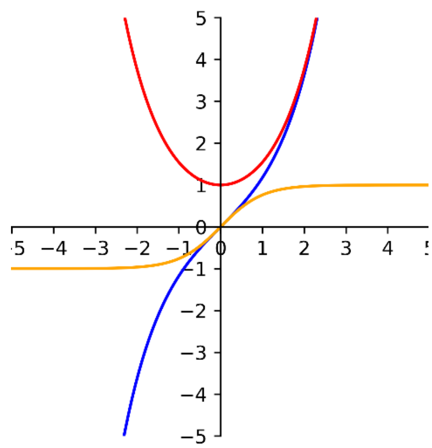


圖 1-25 常見的雙曲函數圖像

【規則 19】常見雙曲函數的圖像特徵

$y=\sinh x$（雙曲正弦函數）對稱中心 (0,0)，它是奇函數。

第一象限接近$y=\frac{1}{2}e^x$，第三象限接近$y=-\frac{1}{2}e^{-x}$。

$y=\cosh x$（雙曲余弦函數）對稱軸$x=0$，它是偶函數。

第一象限接近$y=\frac{1}{2}e^x$，第二象限接近$y=\frac{1}{2}e^{-x}$。

$y=\tanh x$（雙曲正切函數）對稱中心(0,0)，它是奇函數。

第一象限接近$y = 1$，第三象限接近$y = -1$。

雙曲正弦函數和雙曲正切函數在經過x軸時，其陡峭程度與$y = x$相同。

【規則 20】常見雙曲函數的升降冪公式

由於雙曲函數和三角函數之間的對應關係，雙曲函數的恒等式和三角函數的恒等式之間也是一一對應的。對於一個已知的三角函數恒等式（誘導公式等相位變換除外），只需要將其中的三角函數轉成相應的雙曲函數，並將含有有兩個sinh的積的項（包括$\coth^2 x$、$\tanh^2 x$、$\sinh^2 x$、$\operatorname{csch}^2 x$、$\sinh x \sinh y$）轉換正負號，就可得到相應的雙曲函數恒等式。

雙曲函數和三角函數是有很多對應的，不僅僅表現在規則 20 所述的代數形式對應。

如圖 1-22 的左右兩部分所示，左右給定相同的α（就像前文描述參數方程時那樣），在單位圓和單位雙曲線上，雙曲函數與三角函數有如下的對應關係：

正弦同樣是從x軸到曲線的半弦。

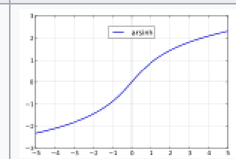
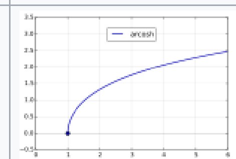
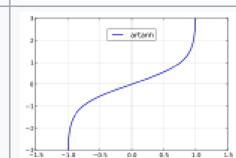
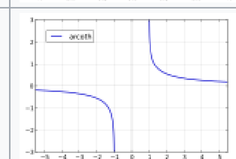
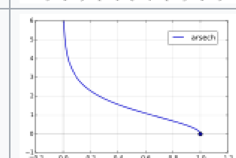
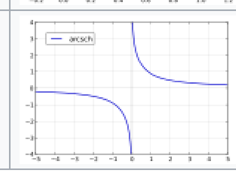
余弦同樣是從y軸到曲線的半弦。

正切同樣是過$(1,0)$在曲線上的切線到終邊的長度。

余割同樣是y軸與過終邊和曲線交點的切線與y軸的交點和原點之距離。

三角函數角的量值可以任意實數，但α實際位置上只會介於 0 到2π之間，其餘是$\alpha + 2k\pi, k \in Z$中其他和α位置相同的角度，迴圈繞著圓旋轉，故三角函數可以有週期；雙曲角的量值可以任意實數，且位置各不相同，故無法如三角函數一樣有週期性。

常見的雙曲函數，除了雙曲余弦函數這種以外，其他可以直接在定義域上取反函數。雙曲余弦函數是偶函數，定義域上取反不是函數，所以提到反雙曲余弦函數，我們通常只在雙曲余弦函數的正值區間求反。雙曲函數的反函數（**反雙曲函數**）可以參考下表：

名称	常用符号	定义	定义域	值域	图像
反双曲正弦	$y = \operatorname{arsinh} x$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
反双曲余弦	$y = \operatorname{arcosh} x$	$\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
反双曲正切	$y = \operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	
反双曲余切	$y = \operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	
反双曲正割	$y = \operatorname{arsech} x$	$\ln\left(\frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$	$(0, 1]$	$[0, +\infty)$	
反双曲余割	$y = \operatorname{arcsch} x$	$\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x \rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	

至此，我們描述完了常見的初等函數及其特徵。回顧本節：函數、常見運算、函數複合、函數的單調性、初等函數、笛卡爾坐標系、右手定則、在 JupyterLab 快速繪製一元二元函數圖形、函數的圖形變換、一元一次函數、一元二次函數、倒數函數、一元一次加倒數函數、函數的奇偶性及其運算特徵、函數圖像對稱性的代數表達、冪函數、手工繪製冪函數草圖、指數函數、自然對數的底數 e、對數函數、指數對數函數的換底收縮、三角函數、函數的週期性、余弦定理和畢氏定理、常用的三角函數公式、反三角函數、常用的反三角函數公式、二維直角坐標系上任意圖形的平移縮放旋轉、圓和橢圓、圓錐曲線及其常用概念、雙曲函數及其定義式推導、參數方程、常用的雙曲函數公式、反雙曲函數，以及路過的物理和幾何意義示例。

第 1 節 累加、積分、無窮、極限、導數、差分

待續。

我們的世界是虛擬的

活得有趣一點吧，難得來一趟。

莊生曉夢迷蝴蝶

望帝春心托杜鵑