
运算与函数

什么是函数？

给钱（函数的输入）

算账（函数）
给的钱减去菜价

找零（函数的输出）

买一把葱**2**元，
买菜的人给多少钱记为**x**，
找零钱多少记为**y**，

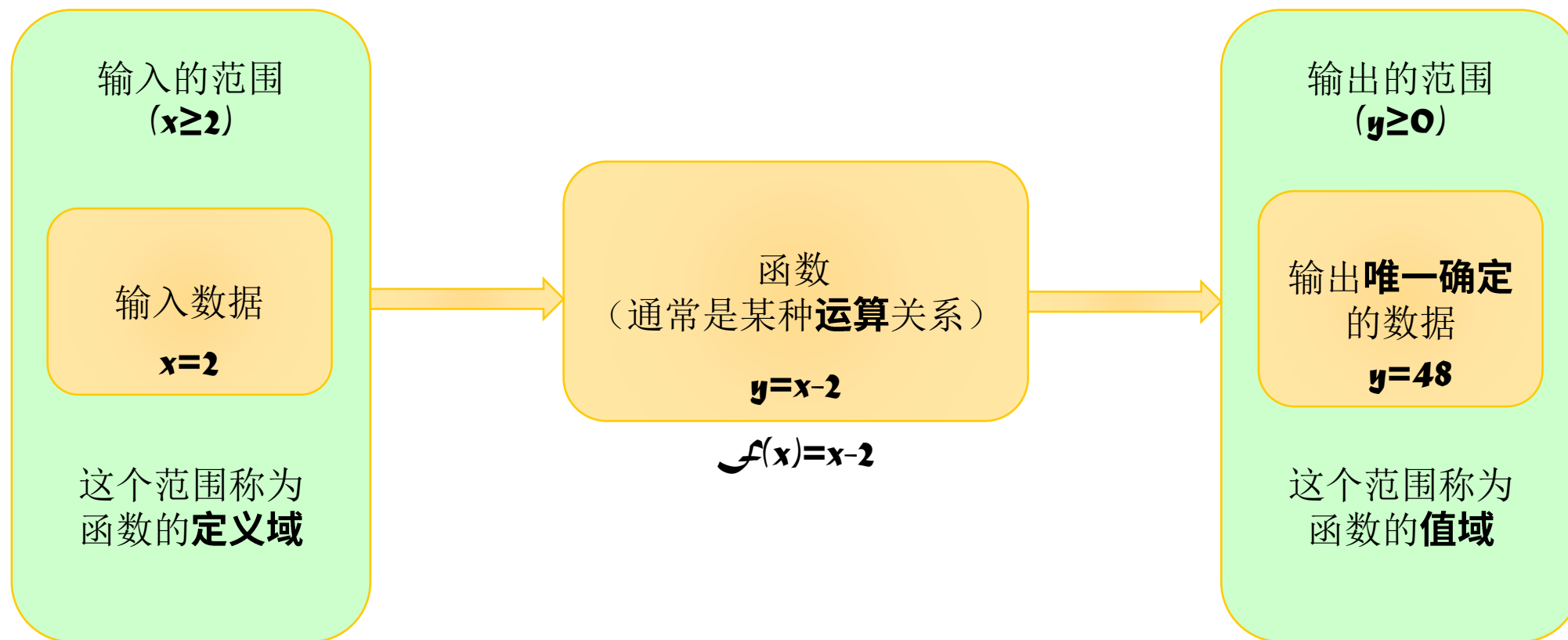
买了这把**2**元的葱，
以给了多少钱为自变量
的计算找零多少的函数：

$$y = x - 2 \quad (x \geq 2)$$

在 **$x \geq 2$** 时，给定一个**x**，
就能计算出一个**唯一确定**的**y**。

比如给了**50**元，
则 **$y = 50 - 2 = 48$** ，找零**48**元。

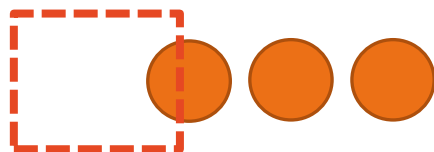
这种函数关系通常简记为 $y = f(x)$



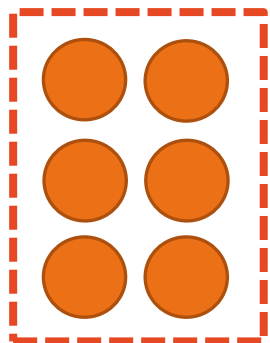
常见的基本运算（四则运算）



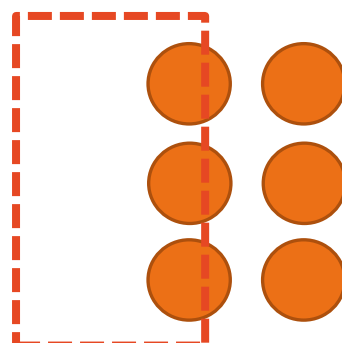
$$1 + 2 = 3$$



$$3 - 2 = 1$$

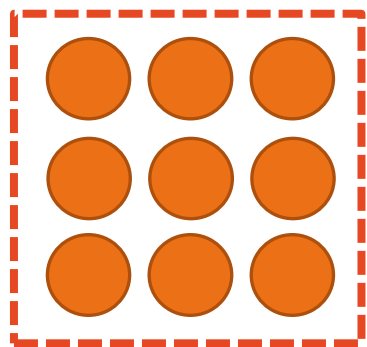


$$3 \times 2 = 6$$

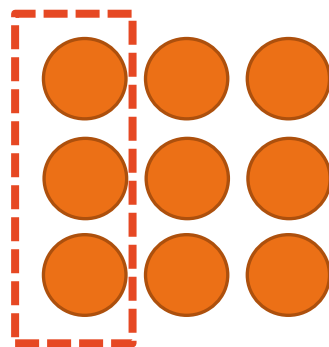


$$6 \div 2 = 3$$

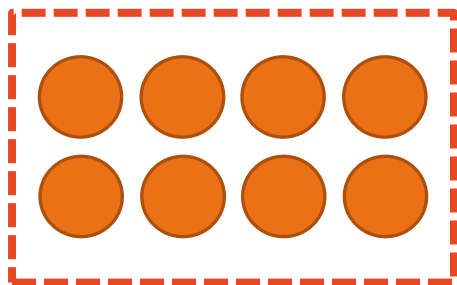
常见的基本运算（乘方开方 指数对数）



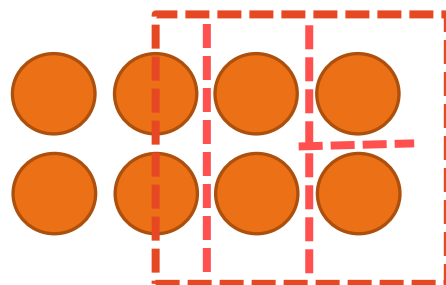
$$3^2 = 9$$



$$\sqrt{9} = 3$$



$$2^3 = 8$$



$$\log_2 8 = 3$$

我们定义了这样一类函数 E

这类函数中的每一个在整个定义域上的表达式都可以写成**一个**运算表达式（不用分段表示），
这些运算表达式

通过**有限次的有理运算**（加减乘除、有理数次乘方开方）得到的结果还属于这类函数。

通过**有限次复合**（把一个函数作为自变量输入给另一个函数）得到的结果还属于这类函数。

我们把

常数、幂函数（一般的代数运算加减乘除乘方开方）、指数函数、对数函数

（也就是刚才介绍的基本运算关系构成的函数）

都加入这类函数，这类函数E，称作**初等函数**（**elementary function**）。



 Joseph Liouville 约瑟夫·刘维尔

1809.3.24-1882.9.8

在1833年至1841年的一系列论文中介绍了通过使用有限次算术运算和复合，从代数、指数、对数函数获得的函数。

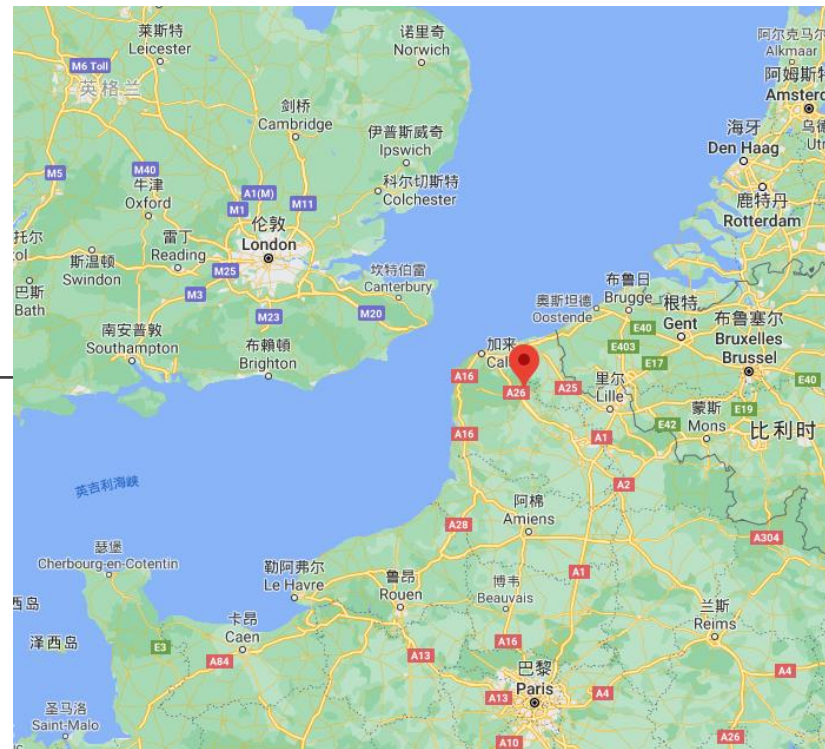
目标是确定哪些初等函数积分也是初等的，以及哪些代数微分方程具有初等函数解。

这些理论在19世纪和20世纪取得了长足的发展（经过Chebyshev切比雪夫，Hardy哈代，Ritt里特，Picard皮卡等人的工作）

复分析中的刘维尔定理

微分代数中的刘维尔定理

月球上的刘维尔火山口



École Polytechnique



Collège de France

三角函数也属于初等函数，它们是通过指数函数和常数有限次有理运算得到

参考链接

<https://math.stackexchange.com/questions/2491445/are-the-trigonometric-functions-really-elementary-functions>

Liouville defined the set of Elementary functions with means of algebra. Ritt wrote in [Ritt 1925]:
"The elementary functions are understood here to be those which are obtained in a finite number of steps by performing algebraic operations and taking exponentials and logarithms."

[Ritt 1925] Ritt, J. F.: [Elementary functions and their inverses. Trans. Amer. Math. Soc. 27 \(1925\) \(1\) 68-90](#)

（这篇文章尝试证明所有初等函数的反函数也是初等函数）所以反三角函数也是初等函数

Considering $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ and $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, the trigonometric functions belong quite obviously to the set of Elementary functions.

类似的，双曲函数和反双曲函数也是初等函数

The constants in the set "Elementary functions" are the real or complex numbers.

论文下载链接

Liouville

https://github.com/kastaineibum/WittyMathematics/blob/main/papers/liouville%20papers/Journal_de_l'%C3%89cole_polytechnique__%5B...%5D%C3%89cole_polytechnique_bpt6k433678n%20124%E2%80%9393193.pdf **124–193**页

Ritt

<https://github.com/kastaineibum/WittyMathematics/blob/main/papers/ritt%20papers/S0002-9947-1925-1501299-9.pdf>

在平面直角坐标系上用图形表示函数

所有的初等函数，在定义域区间内都是[连续](#)的。

所以可以用[取样连线](#)的方法绘制草图（某个区间上近似的函数图像）。

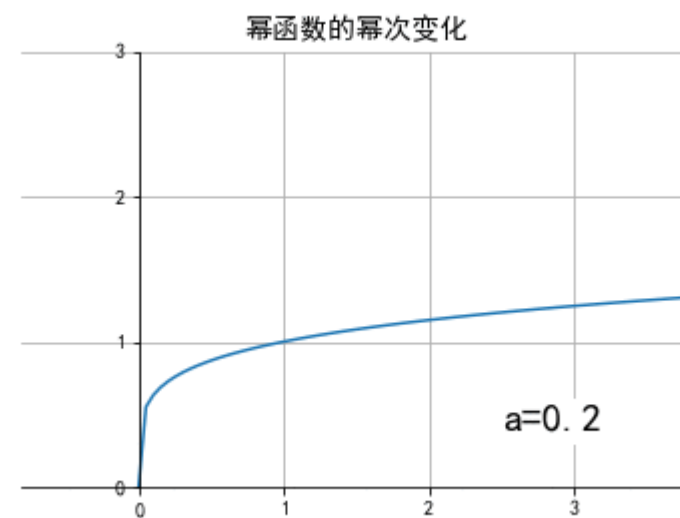
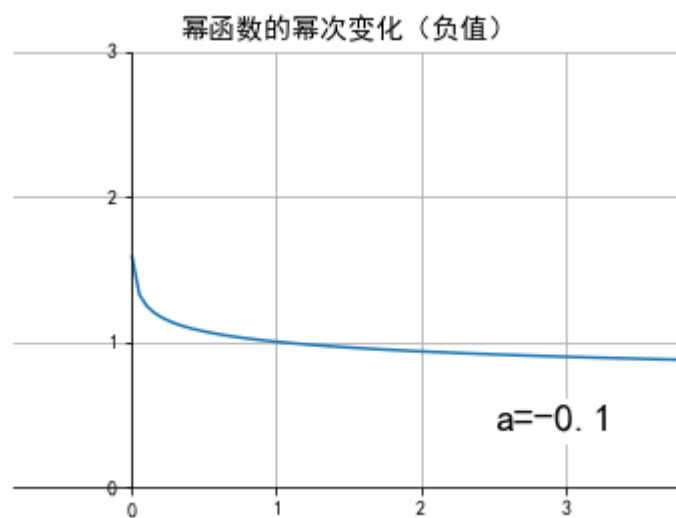
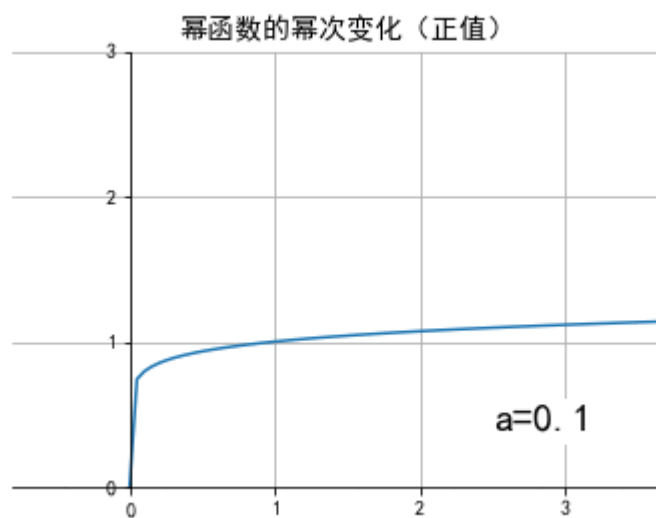
使用 **matplotlib** 可以很轻松的绘制函数图像，并可以制作动画~

我们依次绘制各种初等函数，总结它们的特征。

幂函数 (所有动画源代码参见书籍配套代码的sec1-1.ipynb)

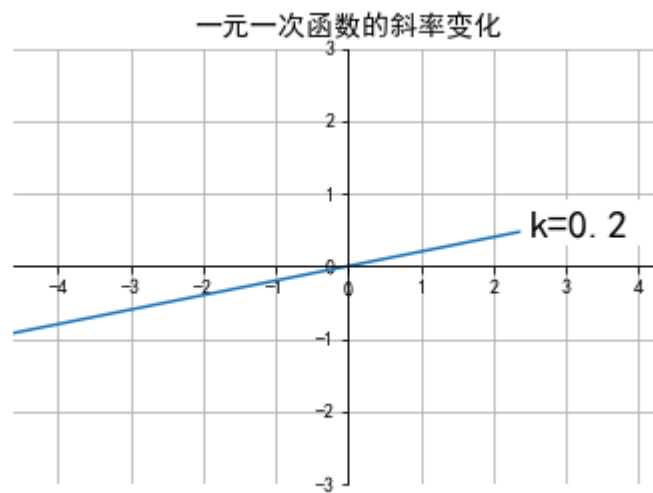
形如 $y = x^a$ 的函数， $a \in R$

随 a 的取不同值变化，可以把幂函数图像的变化做成动画（为了简化问题暂时只看第一象限）



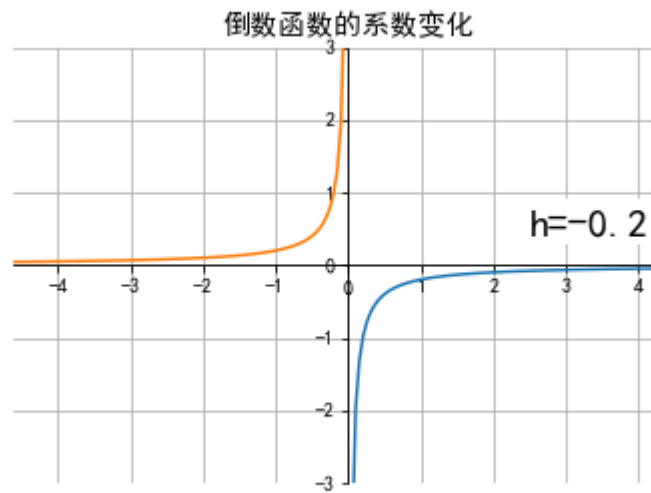
最常用的幂次的幂函数

$a = 1$ 直线



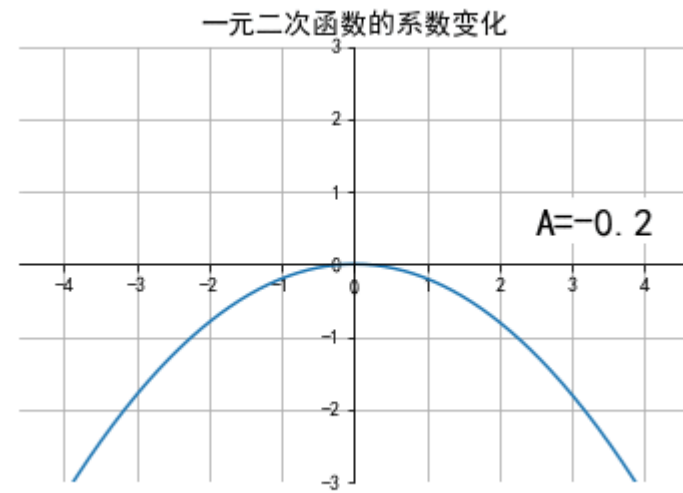
$$y = kx$$

$a = -1$ 双曲线



$$y = \frac{h}{x}$$

$a = 2$ 抛物线

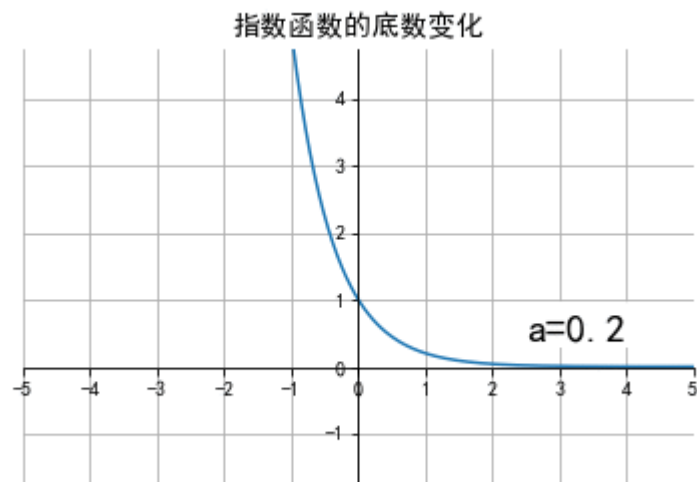


$$y = Ax^2$$

指数函数

形如 $y = a^x$ 的函数， $a > 0$ 且 $a \neq 1$

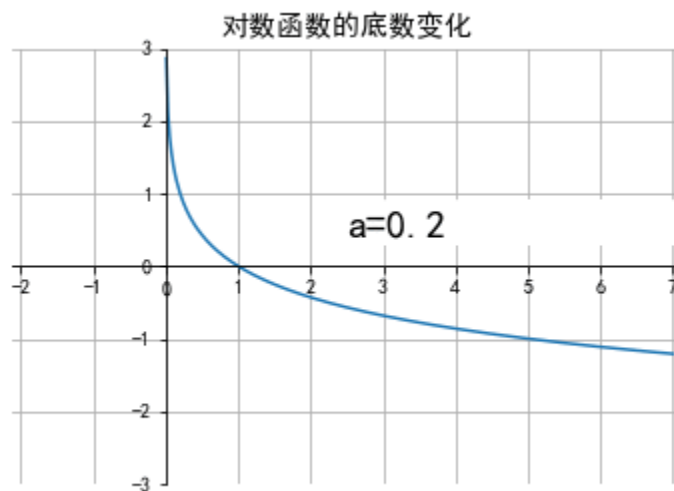
随 a 的取不同值变化，可以把指数函数图像的变化做成动画

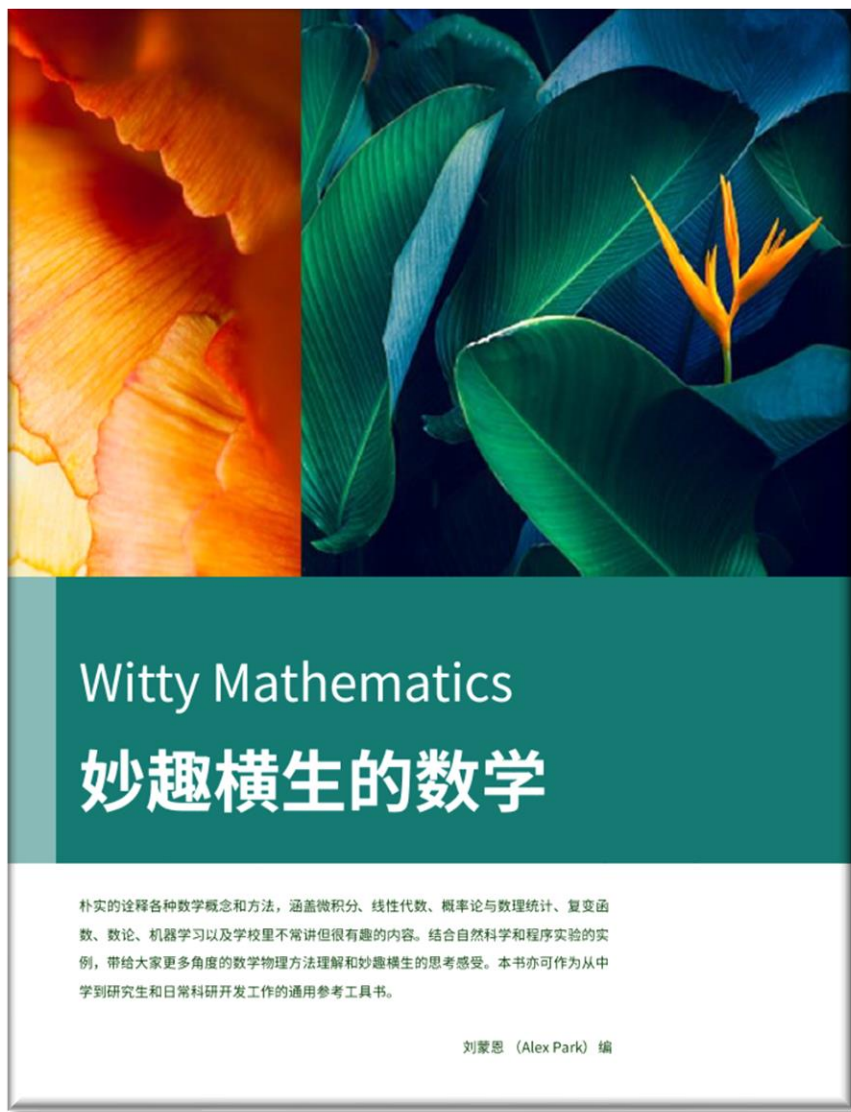


对数函数

形如 $y = \log_a x$ 的函数， $a > 0$ 且 $a \neq 1$

随 a 的取不同值变化，可以把对数函数图像的变化做成动画





更加丰富有趣的内容，请参考本书



<https://github.com/kastaineibum/WittyMathematics>

与本视频不同角度的思路，知识细节更完整

由浅入深顺序介绍各种数学概念，轻松入门上手

大量程序示例源码，强大的计算机辅助分析理解

历史人物、物理和几何意义，来龙去脉

一同感受数学表达背后魅力无穷的方法论

感谢各位的支持 ♥ ♥ ♥

打赏的朋友会一一记录，未来择机回报



PayPal付款链接

paypal.me/alexparkmz



Alex-栗子树科技(**恩)

打开微信扫一扫



豆包柠檬树(**恩)

打开支付宝[扫一扫]