



# Witty Mathematics

# 妙趣横生的数学

朴实的诠释各种数学概念和方法，涵盖微积分、线性代数、概率论与数理统计、复变函数、数论、机器学习以及学校里不常讲但很有趣的内容。结合自然科学和程序实验的实例，带给大家更多角度的数学物理方法理解和妙趣横生的思考感受。本书亦可作为从中学生到研究生和日常科研开发工作的通用参考工具书。

刘蒙恩 (Alex Park) 编



# 第0节 运算、初等函数、函数图形及其变换

我们在日常生活中经常使用四则运算：加减乘除，这可能是很多人学习了多年数学以后唯一在生活里经常用到的部分，而实际上那些数学家和数据科学家用到的看起来高深复杂的方法，也不外乎从这些朴实平凡的基础一点点构建而来。接下来，我们从最简单的常识开始，逐步深入，探寻各种数学物理方法和自然科学原理的本质及其千丝万缕的联系。在我们漫长的旅途中，随着我们不断问为什么的好奇心，揭开一个个故事和方法。那些科学发展历史上尘封的伟人足迹，奠定了我们地球人类今天科技文明的基础。

日常生活中用到的数学，都是为了解决某些实际问题。而解决某些问题，往往是**通过一定的运算获得结果**。例如我们去菜市场买菜，带了一张二十元的纸币，根据当天的口味买了几棵青菜，付给菜贩二十元以后，要找零钱。这时，菜贩要计算一下找多少钱，他用 $(20 - \text{菜的价格})$ 得到找零多少。

输入菜价	运算	输出找零多少
例如买了2元大葱的话	$20 - 2$	找零18元
例如买了3.5元青椒的话	$20 - 3.5$	找零16.5元
例如买了5.8元西红柿的话	$20 - 5.8$	找零14.2元
例如想买21元的西兰花	买不起不用算	没买不存在找零

我们来看什么是**函数**。一般简单直观的理解，函数就是一种运算关系，输入一个或几个值，得到输出的一个确定值（注意，**得到的输出是唯一的确定的**）。

看刚才买菜的例子，假设所购买蔬菜的价格为 $x$ ，在带着一张20元钞票去买菜的情况下，找零多少对于所购买蔬菜价格的函数就是 $20 - x$ 。我们把找零钱多少这个函数记作 $f(x)$ 的话， $f(x) = 20 - x, x \leq 20$ 。这个函数在输入所购买蔬菜价格后，可以唯一确定的给出应该找零多少钱，如下表所示。这是一个一元（一个输入）一次（输入的最高乘方次数是1）函数。

输入	函数关系	输出
$x = 2$	$f(x) = 20 - x, x \leq 20$	$f(x) = 18$
$x = 3.5$	$f(x) = 20 - x, x \leq 20$	$f(x) = 16.5$
$x = 5.8$	$f(x) = 20 - x, x \leq 20$	$f(x) = 14.2$
$x = 21$ (不在定义域内，无法计算)	$f(x) = 20 - x, x \leq 20$	没有输出

我们再多举几个例子：

输入	关系	输出
$t = 1$	$s = 9.8t^2$	$s = 9.8$
$t = 2$	$s = 9.8t^2$	$s = 39.2$
$t = 3$	$s = 9.8t^2$	$s = 88.2$

这里的 $s = 9.8t^2$ 我们可以记作 $s(t) = 9.8t^2$ 。其中 $t$ 输入某个值时，对应的 $s$ 输出某个值， $s(t)$ 是自变量为 $t$ 的函数。这个函数可以表示物体在地球地表附近，从静止开始做自由落体运动时，运动距离 $s$ 和时间 $t$ 的关系。这是一个一元二次函数。

输入	关系	输出
$a = 3 b = 4$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 5$
$a = 5 b = 12$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 13$
$a = 8 b = 15$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = 17$

这里的 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 可以记作 $c(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。其中 $a$ 和 $b$ 输入值时，对应的 $c$ 输出某个值， $c(a, b)$ 是自变量为 $a$ 和 $b$ 的二元函数。这个函数可以表示直角三角形斜边长度 $c$ 和两条直角边长度 $a$ 、 $b$ 的关系。

1748年，欧拉在《无穷分析引论》(Introductio in analysin infinitorum)一书中说：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式”。

到19世纪末，数学家开始尝试利用集合论来进行形式化，他们试图将每一个数学对象都定义为集合。狄利克雷给出了现代的函数定义，也就是我们现在高等数学教材里的定义的雏形。这种定义下，函数被视作数学关系的特例。

中文中使用的“函数”这个词由清朝时期杭州数学家李善兰译出。其《代数学》书中解释：“凡此变量中函彼变量者，则此为彼之函数”。

### 【定义1】函数（此处特指一元函数，后文无特殊说明处同样如此）

**欧拉定义**一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式。

**现代定义**设 $X$ 、 $Y$ 是两个非空数集，如果存在一个对应法则 $f$ ，使得 $X$ 中的每个元素 $x$ ，按对应法则 $f$ ，在 $Y$ 中有唯一确定的元素 $y$ 与之对应，则称 $f$ 为定义在 $X$ 上的**函数**，通常简记为 $y = f(x)$ ， $x \in X$ 。其中 $x$ 称为自变量， $y$ 称为因变量， $X$ 称为**定义域**，记作 $D_f$ 。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 $f$ 的**值域**，记作 $R_f$ 。

### 参考链接

什么是函数？<https://www.mathsisfun.com/sets/function.html>



瑞士数学家 莱昂哈德 · 欧拉 德语名 Leonhard Euler

欧拉本人签名

*Leonh. Euler*

1707年4月15日—1783年9月18日

欧拉出生于瑞士巴塞尔的一个牧师家庭，父亲保罗 · 欧拉（Paul Euler）是基督教加尔文宗的牧师。他引进的许多数学术语和书写格式，例如函数的记法 $f(x)$ ，一直沿用至今。他还在力学、光学和天文学等学科有突出的贡献。他是一位超级多产作者，其学术著作有七八十册，光是读他的书就够读一段时间。

对于多数实际应用的情况，现代定义和欧拉定义的区别基本可以忽略。不难想到，我们平时常用的函数，主要就是由各种运算表达式来定义。接下来，我们回顾一下平时常见的四类**运算**。如果不记得某种代数运算具体怎么进行，可以参阅 <https://www.mathsisfun.com/algebra/index.html>。

## 加减乘除（基本四则运算）

某两个数合并、某个数拆减去某另一个数（减就是加负数）、某个数倍增某次、某个数均分某份（除就是乘以分数）。应用例如：日常生活中买菜，收付款算账等。

## 乘方开方（正幂）

某个数连乘确定次数、某个数连乘确定次数的逆运算（开方就是分数次乘方，计算一个数是由哪个数连乘确定次数得到的）。应用例如：常见几何体已知边长的体积计算，已知体积估计边长等。

## 指数对数

确定数连乘某次、确定数连乘某次的逆运算（计算一个数是由确定数连乘多少次得到的）。应用例如：细胞增殖，香农对信息量的定义等。

## 三角与反三角

直角三角形某个角的角度（角对应的单位圆弧长）对应多大的临边对边比例以及这个的逆运算（计算一个直角三角形临边对边或两临边比例对应多大的夹角角度）。应用例如：制造零件和建筑中各种尺寸和角度的计算等。

这些运算中的任何一个拿出来，都可以作为一个基础的函数表达式，只需按函数的欧拉定义，把前文描述中的“某”换成自变量或常量，计算结果作为函数值即可。而实际应用中各种问题的计算，往往就是这些基础表达式互相叠加组合构成的。

## 加减乘除（基本四则运算）

$y = kx + b$ ， $k$ 和 $b$ 是常数，比如 $k = 2, b = 3$ 时， $y = 2x + 3$ （一元一次函数）

$y = \frac{h}{x-a} + b$ ， $h, a, b$ 是常数且 $h$ 不为0，比如 $h = 1, a = 0, b = 0$ 时， $y = \frac{1}{x}$ （倒数函数）

## 乘方开方（正幂）

$y = x^a$ ， $a$ 是正常数，比如 $a = \frac{1}{2}$ 时， $y = \sqrt{x}$ （一部分幂函数，如最基本的一元二次函数 $y = x^2$ ）

## 指数对数

$y = a^x$ ， $a$ 是不为1的正常数，比如 $a = 2$ 时， $y = 2^x$ （指数函数）

$y = \log_a x$ ， $a$ 是不为1的正常数，比如 $a = e$ 时， $y = \ln x$ （对数函数）

## 三角与反三角

$y = \sin x$ （正弦函数）

$y = \cos x$ （余弦函数）

$y = \tan x$ （正切函数）

$y = \arcsin x$ （反正弦函数）

$y = \arccos x$ （反余弦函数）

$y = \arctan x$ （反正切函数）

这些基础运算规则可以叠加组合，构成一些更为复杂的规则。比如，我们可以把 $y = \sin x$ 和 $y = x^2$ 相加得到 $y = \sin x + x^2$ 。再比如，我们可以把上述函数中的自变量 $x$ 处代入其他函数表达式，例如，把 $y = 2x + 3$ 的 $y$ 代入 $y = x^2$ 的 $x$ 中，得到 $y = (2x + 3)^2$ ，这个代入过程就是**函数复合**（superposition）。

就像搭积木，我们可以把上述的基本初等函数和常数经过各种有理运算或者复合，得到各种各样的运算表达式。通常我们在解决问题的过程中，为了表示清晰，将参与复合的各个函数使用不同的符号。

例如刚才的例子， $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(t) = t^2$ ，按刚才的规则复合就是令 $t = f(x)$ ,  $g[f(x)] = (2x + 3)^2$ 。

我们不难发现，运算规则是对函数自变量的取值范围有影响的。比如分母不能为零，指数对数运算底数不能为1且必须大于零，在实数域求解范围内根号内不能为负等等。这些运算规则给函数自变量范围造成限定，函数的自变量可以取的值被限定在某个范围内（只有这个范围内的值作为自变量输入进行计算才有意义），若无其他说明这个范围就是函数实际的**定义域**，这种自然的运算规则对自变量取值的限定范围也称作函数的**自然定义域**（之前买菜找零例子里的 $x \leq 20$ 是根据实际情况额外说明限定的定义域）。当函数的输入从小到大变化时，如果函数的输出（函数值）也是从小到大变化，那么这个函数就是单调增的；反之，如果输入越来越大，输出却越来越小，那这个函数就是单调减的。**函数的单调性**（monotonicity）也可以叫做函数的增减性。用相对严谨的数学语言描述就是，当函数 $f(x)$ 的自变量在其定义域内的某个区间上增大（或减小）时，函数值 $f(x)$ 也随着增大（或减小），则称该函数在该区间上具有单调性。如果对于属于定义域 $D_f$ 内某个区间上的任意两个自变量的值 $x_1, x_2 \in D_f$ 且 $x_1 > x_2$ ，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，即在这个区间上具有单调性且单调增加，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数。相反地，如果对于属于定义域 $D_f$ 内某个区间上的任意两个自变量的值 $x_1, x_2 \in D_f$ 且 $x_1 > x_2$ ，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即在这个区间上具有单调性且单调减少，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。前文例子列举的常见运算，经过有限次有理运算（加减乘除、有理数次乘方开方）或者有限次函数复合构成的单一表达式函数，都是初等函数。我们日常生活中遇到的大多数函数是初等函数。

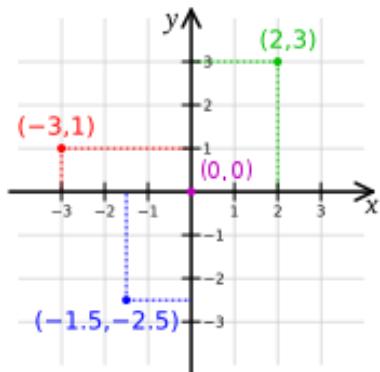
## 【定义 2】初等函数

**初等函数**是由幂函数（power function）、指数函数（exponential function）、对数函数（logarithmic function）、三角函数（trigonometric function）、反三角函数（inverse trigonometric function）、常数经过有限次的有理运算（加、减、乘、除、有理数次乘方、有理数次开方）及有限次函数复合所产生、并且在定义域上能用一个解析式表示的函数。

此处定义中的常数也可写作常函数 $y = c$ ， $c$ 是常数，自变量取任意值函数值都是 $c$ 。幂函数包括指数的各种取值情况，例如 $y = x$ 幂是1， $y = \frac{1}{x}$ 幂是-1，都可以归结为幂函数。一般的，分段函数不能化简成一个解析式的不算是初等函数，因为这些分段函数在定义域上不能用一个解析式表示，比如绝对值函数 $y = |x|$ 不是初等函数，它是一个分段函数。另外再举一个不是初等函数的例子，比如 $y = x^x$ ，它不能用上述函数经过有限次的有理运算及有限次函数复合产生。

实际应用中遇到的函数是多种多样的，如果仅仅从代数的角度进行数学计算，不免显得枯燥乏味且不直观易懂。接下来我们看看如何用**直观图形**的方法表示函数。一旦我们把函数这种运算关系用某种方法转换成图形画出来，就意味着代数和几何产生了紧密的联系。几何图形是更直观易懂的，这样我们就可以直接观察去快速感受理解复杂的运算关系，某些复杂的运算甚至可以一眼看出答案。为了建立几何与代数运算的这种联系，我们先定义图形的坐标系。

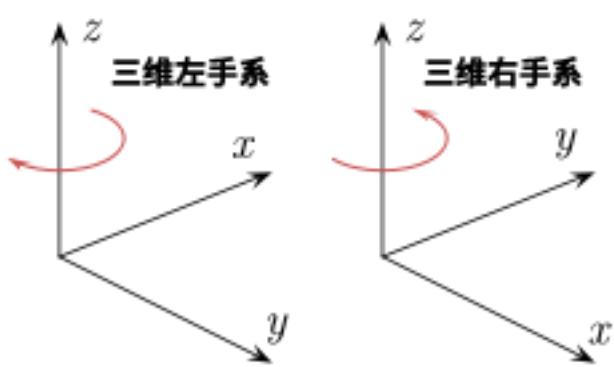
二维直角坐标系通常由两个互相垂直的坐标轴设置，通常分别称为 $x$ 轴和 $y$ 轴。两个坐标轴的相交点，称为原点，通常标记为 $O$ ，既有“零”的意思，又是法语*Origine*的首字母。每一个轴都指向一个特定的方向。这两个不同线的坐标轴，决定了一个平面，称为 $xy$ 平面，又称为笛卡尔平面。



通常两个坐标轴只要互相垂直，其指向何方对于分析问题是没有影响的，但习惯性地， $x$ 轴被水平放置，称为横轴，通常指向右方。 $y$ 轴被竖直摆放而称为纵轴，通常指向上方。两个坐标轴这样的位置关系，称为**二维的右手坐标系**，或右手系。

如果把这个右手系画在一张透明纸片上，则在平面内无论如何旋转它，所得到的都叫做右手系。但如果把纸片翻转，其背面看到的坐标系则称为左手系。这和照镜子时左右对调类似。一般在没有特殊说明的情况下，我们默认使用右手系。

为了知道坐标轴上的任何一点离原点的距离，我们可以刻画数值于坐标轴。那么，从原点开始，往坐标轴所指的方向，每隔一个单位长度，就刻画数值于坐标轴。这数值是刻画的次数，也是离原点的正值整数距离。同样地，背着坐标轴所指的方向，我们也可以刻画出离原点的负值整数距离。称 $x$ 轴刻画的数值为 $x$ 坐标，又称横坐标，称 $y$ 轴刻画的数值为 $y$ 坐标，又称纵坐标。虽然这里这两个坐标都是整数刻画的，但按照比例，我们可以为坐标轴上的任意一个点刻画实数坐标值。任何一点 $P$ 在 $xy$ 平面的位置，可以由直角坐标 $(x, y)$ 来唯一确定的表达。只要从点 $P$ 画一条垂直于 $x$ 轴的直线。从这条直线与 $x$ 轴的相交点，可以找到点 $P$ 的 $x$ 坐标即横坐标。同样地，可以找到点 $P$ 的 $y$ 坐标即纵坐标。这样，我们可以得到点 $P$ 的直角坐标 $P(x, y)$ 。

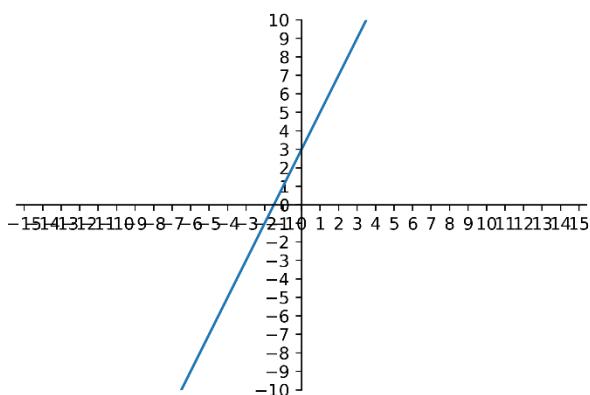


直角坐标系可以推广至三维空间甚至高维空间。若要建立三维直角坐标系，在原本的二维直角坐标系，再添加一个垂直于 $x$ 轴， $y$ 轴的坐标轴，称为 $z$ 轴。若这三个坐标轴满足**右手定则**（所谓满足右手定则，就是右手握拳动作时，除大拇指外的四指指向和转动方向为 $x$ 轴正方向转向 $y$ 轴正方向，大拇指朝向为 $z$ 轴正方向），则可得到我们常用的三维直角坐标系。 $z$ 轴与 $x$ 轴 $y$ 轴相互垂直相交于原点。和二维直角坐标系类似，在三维空间的任何一点 $P$ ，可以用直角坐标 $P(x, y, z)$ 来表达其位置。二维直角坐标系右手系的坐标轴将 $xy$ 平面分为四个部分，我们称右上角的区域为第一象限，逆时针数其他象限，分别定义为第二、三、四象限。类似的，三维直角坐标系右手系分为八个区域，分别定义为第一到第八卦限。象限和卦限的翻译取自《易经》中的“太极生

6

两仪，两仪生四象，四象生八卦”。要在直角坐标系表示函数图形，就是把符合函数表达式 $y = f(x)$ 的点在坐标系里标记出来，即所有符合函数表达式这个等式的 $(x, y)$ 所构成的图形（其中 $x$ 是自变量的值， $y$ 是对应的函数值）。我们的图形表示区域大小是有限的，一般我们针对具体问题只标记函数图形的某个

部分。例如函数 $y = 2x + 3$ 的图形，就是这条蓝色的直线。如果图形不变， $x$ 轴和 $y$ 轴的地位互换（把原来的 $x$ 轴标记为 $y$ 轴，把原来的 $y$ 轴标记为 $x$ 轴），图形表达的仍然是一个函数的话，这个函数就是原来函数的**反函数**。



手工绘制初等函数图形草图的办法，通常就是在给定区间内，取样一些定义域中的值，然后用这些值求出对应函数值，把一堆点 $(x, f(x))$ 在坐标系中标出，然后连起来。比如 $y = 2x + 3$ ，当 $x = -1$ 时， $y = 1$ ，标出

$(-1, 1)$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，标出 $(0, 3)$ ；当 $x = 1$ 时， $y = 5$ ，标出 $(1, 5)$ ；当 $x = 2$ 时， $y = 7$ ，标出 $(2, 7)$ ；……然后把他们顺次连起来，就是函数 $y = 2x + 3$ 的草图。初等函数定义域内是处处**连续**的，所以我们可以这样绘制草图得到近似的函数图像。

对于有一个自变量的函数（一元函数，例如前文自由落体物体加速度为定值的匀加速直线运动时运动距离 $s$ 和时间 $t$ 的关系）来说，我们可以在二维直角坐标系中用曲线图形表示它。对于有两个自变量的函数（二元函数，例如前文直角三角形斜边长度 $c$ 和两条直角边长度 $a$ 、 $b$ 的关系）来说，我们可以在三维直角坐标系中用曲面图形表示它。对于多元函数，我们可以在高维直角坐标系中表示，但显然不再直观易懂，所以我们在平时如果需要观察相应的直观图形，通常使用某些降维的方法，把多元问题拆解成多个一元函数或二元函数进行直观表示。直角坐标系是数学家笛卡尔所提出，所以又称为**笛卡尔坐标系**。



法国数学家 勒内 · 笛卡尔 法语名 René Descartes

笛卡尔本人签名

1596年3月31日—1650年2月11日

重要著作 1637年 La Géométrie 《几何学》

将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。在笛卡尔的年代，拉丁语是学者常用语言，他也如当时人们的习惯，在著作使用他的拉丁语名字 Renatus Cartesius（瑞纳图斯·卡提修斯），所以由他创造的笛卡尔坐标系也被称作卡提修坐标系。

显然我们现今已经不是只有纸笔的古代，这种费时费力的草图绘制已经没有必要。计算机程序可以利用同样的草图绘制方法，帮助我们快速的生成某个函数在指定区域的草图，接下来我们介绍当今最常用的免费工具，并在程序实验的基础上，详细讨论各种初等函数的形态特点和应用实例。

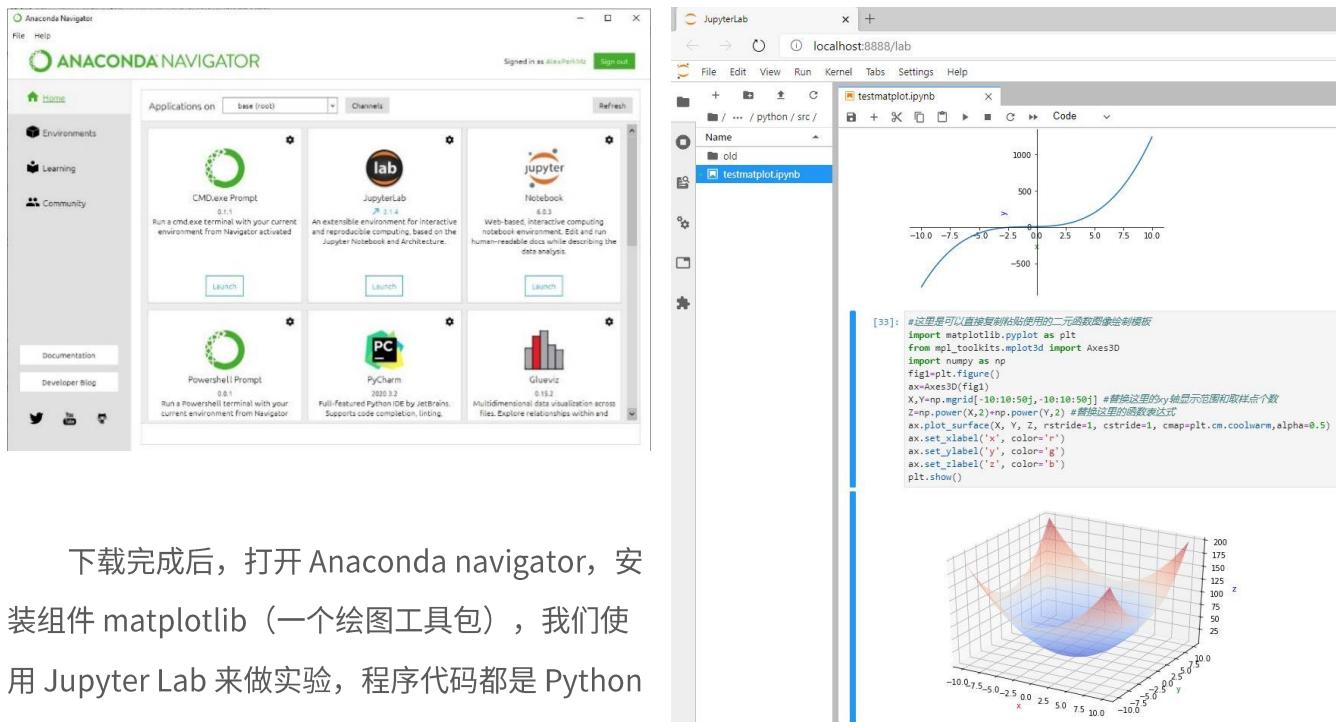
如何用数据科学家的工具玩儿转函数图形？其实很简单，下面我们就来动手操作。首先我们去找一个数据科学家常用的工具集，当下最流行的莫过于 Anaconda，它是一个工具集，把很多开源免费的工具集成在了一起，可以快速安装上手使用。去搜索引擎寻找它，下载安装即可。

## 参考链接

去哪里下载 Anaconda 免费版？( Windows 系统 )

<https://www.anaconda.com/products/individual#windows>

当然也可以使用 Linux 等桌面操作系统，它都支持。



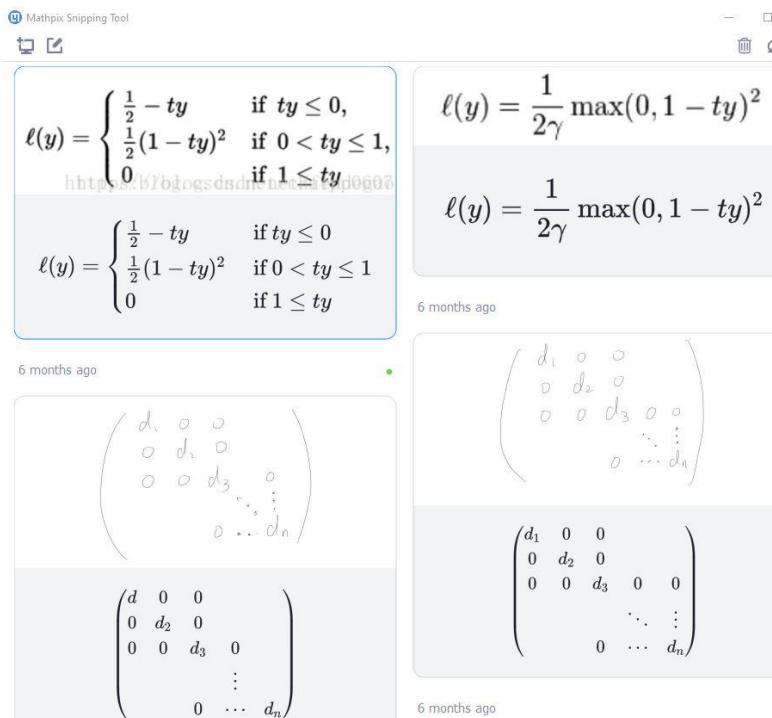
下载完成后，打开 Anaconda navigator，安装组件 matplotlib（一个绘图工具包），我们使用 Jupyter Lab 来做实验，程序代码都是 Python 语言编写的。不了解 Python 程序？不用担心，我提供了所有配套的源代码和笔记，带有详细的逐行注释，即便你完全没有见过 Python，也可以很轻松的上手。在 Jupyter Lab 中打开视频课程中提供的文件 testmatplotlib.ipynb，就可以看到函数图形绘制的入门代码。本书后续的课程将不再复制繁琐的程序源代码到书里，那样会占用巨量的篇幅，我们只在本节详细讲解一次如何使用本书配套的程序代码。

为了介绍方便，我们复制粘贴了整个 testmatplotlib.ipynb 的内容到后文，即便你还没有安装实验环境，也可以直接阅读来了解相应的内容。本书希望帮助大家在最短的时间里获得最多的有效信息和技

巧，就算你完全不想了解计算机程序，也没有关系，可以直接跳到后续绿色的部分，**复制粘贴一下，修改一下函数表达式，就可以绘制出图形了。**

在 Jupyter Lab 里，鼠标左键点击一个代码段，它的左侧会标记为蓝色，你可以随时修改代码的内容，然后按 Ctrl+Enter 就可以立刻运行显示运行结果。并且整个代码和结果可以作为笔记文件保存。

Jupyter Lab 的文件里还可以加入标准 LaTeX 语法的 markdown 文本，你可以很轻松的把数学公式和想法笔记记录在里面。因为支持标准 LaTeX，后续你的笔记也可以方便的编纂成书籍来印刷。我用 Jupyter Lab 写 LaTeX 排版数学公式和证明推理过程的时候，并不会直接编写 LaTeX 源代码，那样比较麻烦，目前有一个免费工具 Mathpix Snipping Tool，可以直接把手写公式或者网页截图、照片之类的里面的公式转换成 LaTeX 公式，复制粘贴即可。



使用 Mathpix Snipping Tool 识别截图和手写公式到 LaTeX 公式格式

另外，我用 Sublime 编辑器加 OmniMarkupPreviewer 插件来进行 Latex 的 markdown 所见即所得编辑，这样可以节省很多时间而且价格低廉。而且，这个所见即所得是用浏览器实现的，所以你可以直接从浏览器里复制粘贴笔记到诸如 Word 等 Office 工具里，不需要任何额外的文件格式转换工具。

本书的配套程序源代码大多是像 testmatplotlib.ipynb 文件一样的 Jupyter 笔记格式，一是方便大家快速运行实验，二是方便随时加入自己的实验感想和读书笔记。课后我们愉快的交流，同样也可以使用 Jupyter 笔记进行。第一个实验代码 testmatplotlib.ipynb 分为以下六小段代码，从最简单的函数图形绘制

程序入手，了解如何快速生成一个一元函数或二元函数表达式的某部分图形。我们绘图主要使用 matplotlib 模块，它是免费的。

## 参考链接

官方详解如何使用 matplotlib 来进行绘图 <https://matplotlib.org/contents.html>

首先，我们用简单的八行代码，绘制一条直线 $y = 2x + 3$ 。正如代码所示，我们使用 numpy 库来快速生成等间隔的横坐标，numpy 是一个非常常用的库，扩充了很多有用的批量数据处理方法，我们后续会频繁使用它。

```
#示例：如何简单显示一条直线

import matplotlib.pyplot as plt #绘图用的模块

import numpy as np

x=np.linspace(-10,10,50) #从-10 到 10 生成 50 个取样坐标

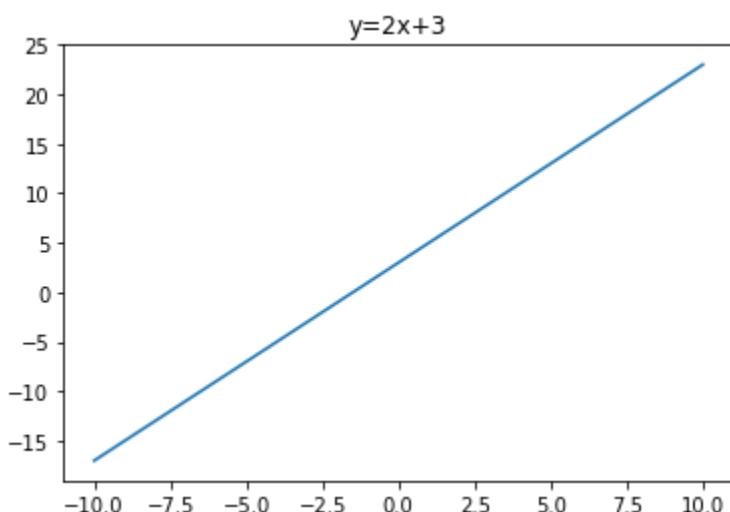
y=2*x+3 #用取样点 x 坐标去求取样点 y 坐标

plt.figure() #创建一个绘图对象

plt.title("y=2x+3")#标题

plt.plot(x, y) #用取样点(x,y)去构建曲线

plt.show() #显示模块中的所有绘图对象
```



把这条直线改成一个二次函数抛物线 $y = x^2 + 3x + 4$ 只需替换一行函数表达式即可。两个星号是多少次幂的意思，和其他语言的小尖帽子 $\wedge$ 或者 pow 类似。

```
#示例：如何简单显示一条抛物线

import matplotlib.pyplot as plt #绘图用的模块

import numpy as np

x=np.linspace(-10,10,50) #从-10 到 10 生成 50 个取样坐标

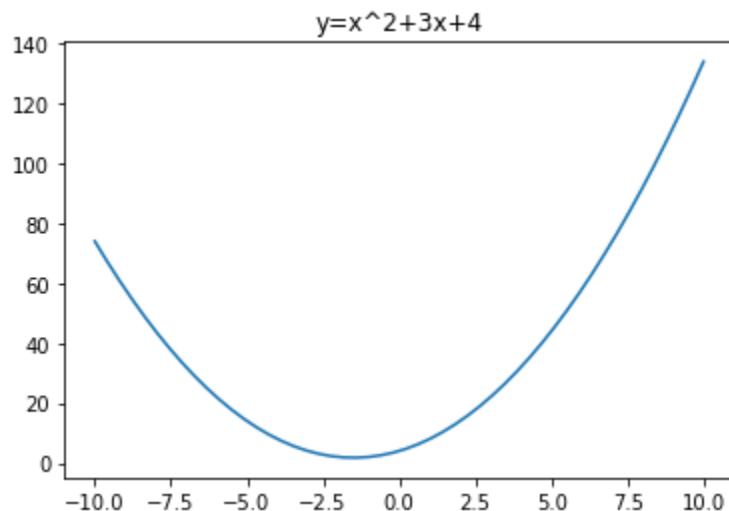
y=x**2+3*x+4 #用取样点 x 坐标去求取样点 y 坐标

plt.figure() #创建一个绘图对象

plt.title("y=x^2+3x+4")#标题

plt.plot(x,y) #用取样点(x,y)去构建曲线

plt.show() #显示模块中的所有绘图对象
```



我们发现这个函数图形的坐标轴和数学书里常见的不太一样，看着会有点怪怪的，因为一般统计的直方图喜欢用这种形态，所以它默认就是这样的。接下来，我们可以加入一些代码，把坐标轴调成数学书里的样子，就是 x 轴和 y 轴在原点相交。

```
#示例：如何简单显示一条抛物线，并把坐标轴调整到习惯位置

import matplotlib.pyplot as plt #绘图用的模块

import numpy as np
```

```

x=np.linspace(-10,10,50) #从-10 到 10 生成 50 个取样坐标

y=x**2+3*x+4 #用取样点 x 坐标去求取样点 y 坐标

plt.figure() #创建一个绘图对象

plt.title("y=x^2+3x+4") #标题

plt.plot(x, y) #用取样点(x,y)去构建曲线

ax=plt.gca()

ax.spines['right'].set_color('none')

ax.spines['top'].set_color('none')

ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))

ax.yaxis.set_ticks_position('left')

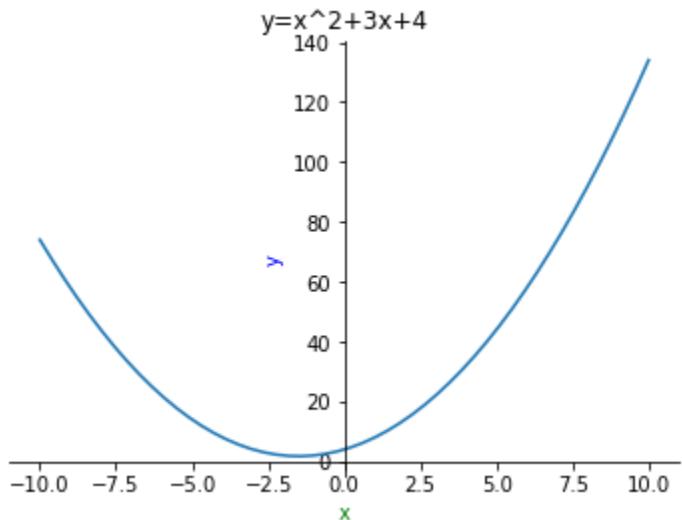
ax.spines['left'].set_position(('data',0))

ax.set_xlabel('x', color='g')

ax.set_ylabel('y', color='b')

plt.show() #显示模块中的所有绘图对象

```



这样就和数学书里的函数图形差不多了，我们接着看看如何生成好看的二元函数三维曲面图形，这个比我上学时的数学书里的更好看一点。

```
#示例：如何简单显示一个曲面(二元函数)

import matplotlib.pyplot as plt #绘图用的模块

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D #绘制 3D 坐标的函数

import numpy as np

fig1=plt.figure() #创建一个绘图对象

ax=Axes3D(fig1) #用这个绘图对象创建一个 Axes 对象(有 3D 坐标)

X,Y=np.mgrid[-2:2:40j,-2:2:40j] #从 -2 到 2 分别生成 40 个取样坐标，并作满射联合

Z=np.power(X,2)+np.power(Y,2) #用取样点横纵坐标去求取样点 Z 坐标

plt.title("z=x^2+y^2") #标题

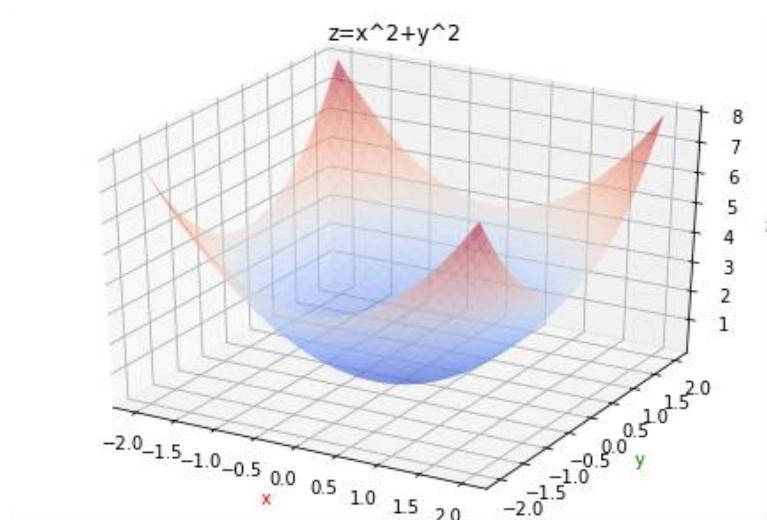
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=plt.cm.coolwarm,alpha=0.5) #用取样点(x,y,z)去构建曲面

ax.set_xlabel('x', color='r')

ax.set_ylabel('y', color='g')

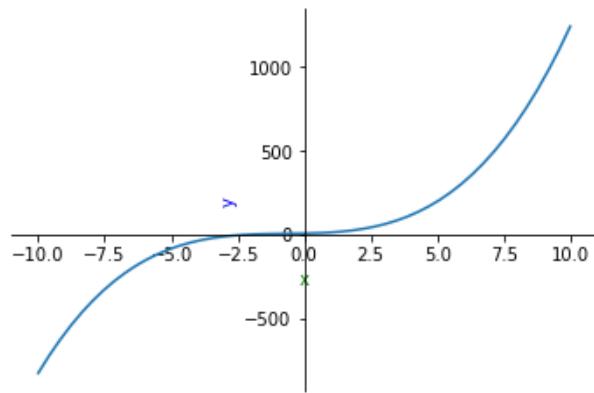
ax.set_zlabel('z', color='b') #给三个坐标轴注明

plt.show() #显示模块中的所有绘图对象
```



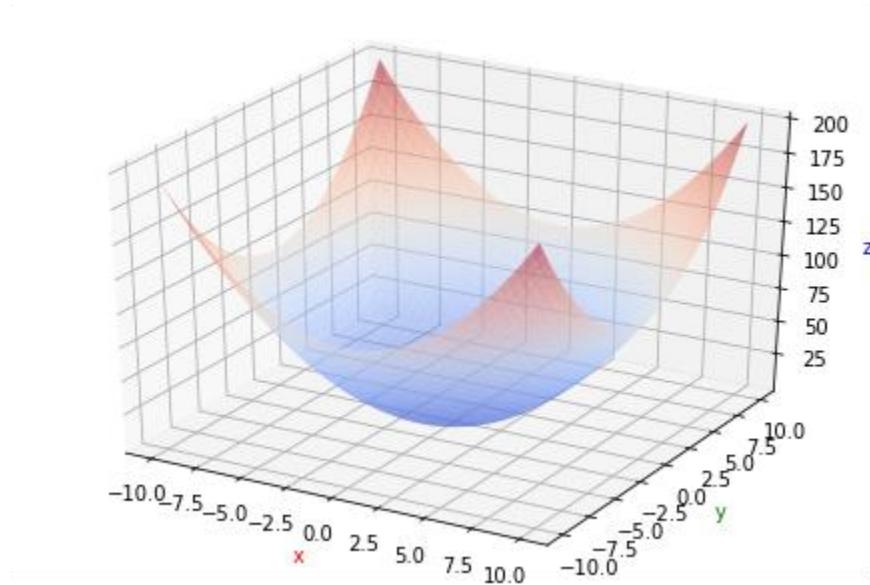
```
#这里是直接复制粘贴使用的一元函数图像绘制模板
```

```
import matplotlib.pyplot as plt  
  
import numpy as np  
  
x=np.linspace(-10,10,50) #替换这里的横轴显示范围和取样点个数  
  
y=x**3+2*(x**2)+3*x+4 #替换这里的函数表达式  
  
plt.figure()  
  
plt.plot(x,y)  
  
ax=plt.gca()  
  
ax.spines['right'].set_color('none')  
  
ax.spines['top'].set_color('none')  
  
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')  
  
ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))  
  
ax.yaxis.set_ticks_position('left')  
  
ax.spines['left'].set_position(('data',0))  
  
ax.set_xlabel('x', color='g')  
  
ax.set_ylabel('y', color='b')  
  
plt.show()
```



```
#这里是可以直接复制粘贴使用的二元函数图像绘制模板
```

```
import matplotlib.pyplot as plt  
  
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  
  
import numpy as np  
  
fig1=plt.figure()  
  
ax=Axes3D(fig1)  
  
X,Y=np.mgrid[-10:10:50j,-10:10:50j] #替换这里的xy轴显示范围和取样点个数  
  
Z=np.power(X,2)+np.power(Y,2) #替换这里的函数表达式  
  
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=plt.cm.coolwarm, alpha=0.5)  
  
ax.set_xlabel('x', color='r')  
  
ax.set_ylabel('y', color='g')  
  
ax.set_zlabel('z', color='b')  
  
plt.show()
```



至此，我们获得了快速数形结合的直观展现能力，接下来，我们就逐一分析各种初等函数，获得一些可以快速解题的必要知识。这部分的配套代码是 `sec1-1.ipynb`。通常数学模型是为了解决具体的实际问题，所以许多常见的数学表达都有他们的**物理意义**，就是这一堆表达在自然物理世界代表什么意思。一个数学模型可能表达多种物理问题，我们在后续的每种函数图像的研究时，引入一种易懂的物理意义，和现实的物理情况结合起来，这样我们的表达和计算就更容易直观的理解。类似的，我们也可以考虑数学表达的**几何意义**，就是把数学表达和直观的几何图形规律联系起来。

下面我们开始逐一研究初等函数及其函数图像特征。首先我们来画直线。**一元一次函数**的图形都是直线，我们可以随便瞎编一些表达式，用上面现成的程序画出来看看什么样子。比如我们在图 1-1 绘制  $y = x$ （蓝色）,  $y = x + 3$ （橙色）,  $y = 2x + 3$ （绿色）三条直线。

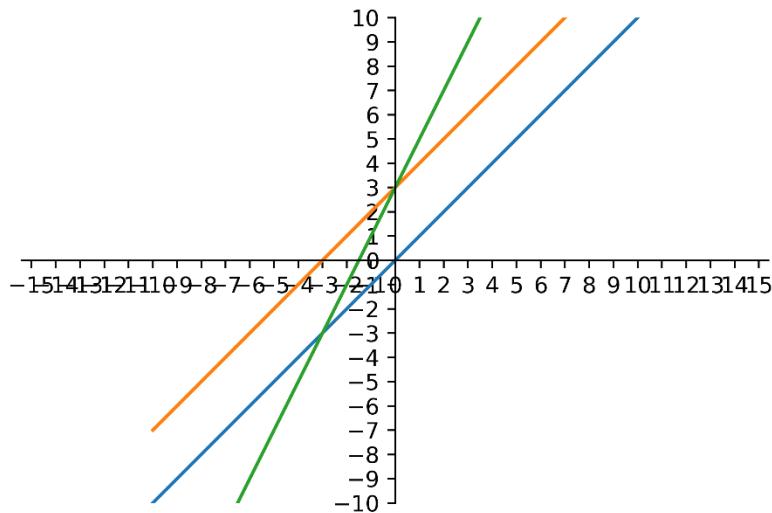


图 1-1 不同斜率和截距的直线

我们在对一个函数表达式修修补补尝试改变的时候，函数的图像就按我们的修补进行了相应的改变。首先绘制了蓝色的 $y = x$ ，之后绘制 $y = x + 3$ 的时候，实际就是对函数表达式整个加了3，这时函数的图像在 $y = x$ 的基础上整个向上平移了3。之后我们在 $y = x + 3$ 的基础上，在 $x$ 前面乘了2，这时函数的图像整个在 $y = x + 3$ 的基础上向 $y$ 轴这个中心收缩了2倍。不仅仅是对于直线，下列变换规则对于任何形式的单变量函数 $y = f(x)$ 都适用。

### 【规则 1】一元函数图形的变换

对于函数 $y = f(x)$ ,  $f(x)$ 可以是任意函数表达式,

在所有 $x$ 前面加负号：相当于图像整个按 $y$ 轴为对称轴翻转；

对所有 $x$ 取绝对值：相当于图像 $y$ 轴左边部分抹掉，再按 $y$ 轴为对称轴把 $y$ 轴的右边部分复制到左边；

对 $f(x)$ 取绝对值：相当于图像 $x$ 轴下方部分按 $x$ 轴为对称轴翻转到 $x$ 轴上方；

在 $f(x)$ 或者 $y$ 前面加负号：相当于图像整个按 $x$ 轴为对称轴翻转；

给所有 $x$ 加（减）一个值：加就是函数整个图像向左平移这个值，减则向右平移这个值， $x$ 左加右减；

给 $f(x)$ 加（减）一个值：加就是函数整个图像向上平移这个值，减则向下平移这个值， $f(x)$ 上加下减；

给 $y$ 加（减）一个值：加就是函数整个图像向下平移这个值，减则向上平移这个值， $y$ 上减下加；

给所有 $x$ 乘以一个值：相当于整个函数图像以 $y$ 轴为中心向中心收缩形变，收缩这个值这么多倍；

给 $f(x)$ 乘以一个值：相当于整个图像以 $x$ 轴为中心向中心伸展形变，伸展这个值这么多倍；

给 $y$ 乘以一个值：相当于整个图像以 $x$ 轴为中心向中心收缩形变，收缩这个值这么多倍；

将两个函数加起来：就是逐一将这两个函数横坐标相同的两点处的函数值相加（纵坐标相加）得到的新图像，形状融合。其他诸如两个函数相减、相乘、相除也是类似的，注意相除时除数不能为零。

$x$ 、 $y$ 地位互换：反函数的图像与原函数的图像关于直线 $y = x$ 对称。

二元函数亦可推广得到类似的规则，但表达较为复杂，其平移有前后左右，其缩放中心为平面。

一元一次函数的图像是直线，说白了就是自变量增加某个步长的值，函数值也相应的增加或减少某个步长的值，他们总是按固定比例变化的。就是自变量和函数值成正比例相关。在现实世界中有很多类似的例子，为了便于理解，我们给直线找一个直观的示例。

### 【物理意义示例】一元一次函数

物体匀加速运动（例如地表附近不计空气阻力的自由落体运动）时，某时刻速度与所加速时间的关系。

$$v = at + v_0$$

某时刻速度 = 加速度  $\times$  时间 + 初始速度

$v$ 是自变量为 $t$ 的一次函数。

例如我们可以这样进行物理实验。找一个高架，从高处自由落体一个小球，用高速摄像机拍摄其运动过程。这样我们就可以容易的知道在每个时刻，小球的运动速度如何变化（例如观察某一小段时间内小球的下落距离，即可算出这一小段时间的平均速度，近似作为这一小段时间中点时刻的瞬时速度）。经过实验不难发现，随着时间的推移，小球的下落速度越来越快，速度和经过落体的时间成正比，其比例就是重力加速度。若小球从静止开始下落时开始计时实验，则上面函数式中的 $v_0 = 0$ ，如果我们截取某一段下落的过程，可以将 $v_0$ 设置成计时开始时的速度，这个初始速度就是这个直线函数的截距（自变

量 $t$ 为0时函数值 $v$ 的取值），而重力加速度就是这个直线函数的斜率（自变量 $t$ 前面乘的常数 $a$ ，代表自变量变化时函数值的变化速度， $a$ 越大变得越剧烈，直线就越陡峭，也就是直线斜的程度）。

我们可以在 sec1-1.ipynb 程序中多次改变直线函数表达式，运行观察后，我们不难总结直线一元一次函数的图像特征。

### 【规则 2】一元一次函数的图像特征

一元一次函数  $y = kx + b$  的图像是一条直线。

$k$ 的值是斜率，代表直线的倾斜陡峭程度，其绝对值越大越陡峭。

$k > 0$ 时， $y = kx + b$ 是定义域上的增函数，必过一三象限； $k < 0$ 时， $y = kx + b$ 是定义域上的减函数，必过二四象限。

$k = \tan \theta$  其中 $\theta$ 是直线上方向和 $x$ 轴正方向的夹角。

$b$ 的值是截距，代表直线和 $y$ 轴交点的纵坐标。

再回到小球下落的物理实验，不难发现，有了对函数图像特征的分析，我们可以在得知重力加速度和初始速度的情况下，迅速画出函数图像，并从函数图像中迅速得知实验中任意时刻的速度值。这也就是数学分析对于现实中物理问题认知的重要意义之所在。一旦你掌握了一个现实物理问题的数学模型，即便你不再进行重复实验，你也可以单从数学角度进行分析，迅速得知这个模型所涵盖范围内你需要得知的数据。

接下来，我们重复同样的工作，研究其他初等函数。首先总结**一元二次函数**的图像特征。一元二次函数就是最高次数为2的一元函数，其写成 $y = ax^2 + bx + c$ 或是 $y = a(x + l)^2 + m$ 是无所谓的，因为后者就是由前者通过配方得到的等价形式 ( $l = \frac{b}{2a}$ ,  $m = c - \frac{b^2}{4a}$ )，可见所有一元二次函数都可以通过标准的 $y = x^2$ 经过规则 1 中的缩放平移变换得到。其他 $n$ 元 $n$ 次函数类似，不论展开写成不同次数项构成的多项

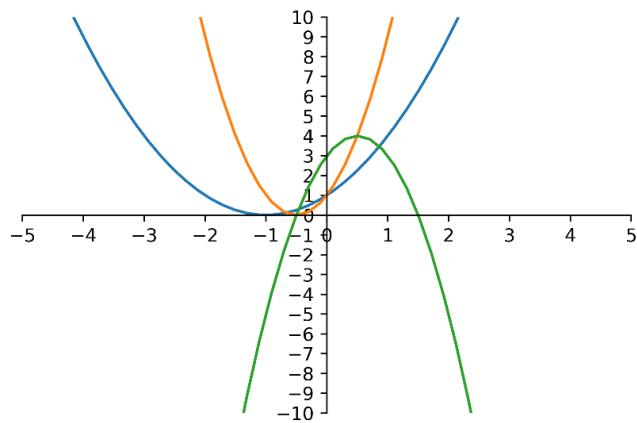


图 1-2 不同  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的一元二次函数抛物线

式（按二项式定理展开），还是配方成由标准基础函数的平移缩放，都是无妨的，我们根据实际问题求解的需要使用不同的表达形式。下面和之前一样，随便画几个一元二次函数的图像，他们分别是蓝色的 $y = x^2 + 2x + 1$ ，橙色的 $y = 4x^2 + 4x + 1$ ，绿色的 $y = -4x^2 + 4x + 3$ ，如图 1-2 所示。

这次我们更详细的实践一下函数图形变换规则（前文所述的规则 1）。

$y = x^2$  这是一条顶点在原点的抛物线，图 1-2 里没有画出，但我们不难想象。

把刚才顶点在原点的抛物线左移 1： $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 。

把上面的抛物线向 y 轴收缩 2 倍： $y = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ ，

把上面的抛物线右移 1： $y = [2(x - 1) + 1]^2 = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ 。

把上面的抛物线按 x 轴翻转： $y = -(2x - 1)^2 = -4x^2 + 4x - 1$

把上面的抛物线上移 4： $y = -(2x - 1)^2 + 4 = -4x^2 + 4x + 3$

我们可以在 sec1-1.ipynb 程序中多次改变一元二次函数表达式，运行观察后，我们不难总结直线一元二次函数的图像特征。

### 【规则 3】一元二次函数的图像特征

一元二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像是一条抛物线。

$a$  的值具有开口情况的信息，正值开口向上，负值开口向下， $a$  的绝对值越大抛物线在同样坐标尺度下显得越尖越陡峭。

$b$  的值具有对称轴情况的信息，抛物线的对称轴是  $x = -\frac{b}{2a}$ 。对称轴两侧单调性相反。

$c$  的值具有上下位置情况的信息， $c$  是抛物线与  $y$  轴交点的纵坐标。

函数图像与  $x$  轴的交点横坐标是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的实数解，是  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

函数图像的顶点坐标是  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 。

从上述特征不难发现，我们可以通过函数图像迅速确定一元二次方程的解（有没有实数解，有几个，分别是多少），并且它快速的呼应了韦达定理。因为抛物线的对称轴是  $x = -\frac{b}{2a}$ ，所以两根  $(ax^2 + bx + c = 0)$  的两个实数解的均值是  $-\frac{b}{2a}$ ，所以两根之和为  $-\frac{b}{a}$ 。

### 参考链接

韦达定理 <https://zh.wikipedia.org/wiki/韦达定理>

一元二次函数的图像是抛物线，是自变量增加某个步长的值，函数值相应的增加或减少比上个函数值变化步长更大某个值的值，它不像直线那样函数值随自变量按固定比例变化，而是变化的步长本身也在变，增减步长的变化是直线那样均匀变化的。比如 $y = x^2$ ，当 $x$ 分别取1, 2, 3, 4时，函数值是1, 4, 9, 16，自变量的变化步长是1，而函数值的变化步长是3, 5, 7。

在现实世界中有很多抛物线的例子，为了便于理解，我们给抛物线找一个直观的示例。这个示例接应之前的直线函数图像，为同一个力学问题。

### 【物理意义示例】一元二次函数

物体匀加速运动（例如地表附近不计空气阻力的自由落体运动）时，位移与所加速时间的关系。

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

位移 =  $\frac{1}{2}$  加速度  $\times$  时间<sup>2</sup> + 初始速度  $\times$  时间

$s$  是自变量为 $t$ 的二次函数。

我们还是沿用高架小球自由落体实验，只不过这一次我们观察记录运动总距离和运动经历的时间。通过实验得到的数据，不难总结出上面的公式。我们将在下一节深入的思考这个公式通过理论推导的获得过程。

接着我们总结**倒数函数**及其相关常见函数的图像特征。我们和之前一样，随便画几个倒数函数 $y = \frac{k}{x-a} + b$  的图像，他们分别是**橙色蓝色**的 $y = \frac{1}{x}$ ，**红色绿色**的 $y = \frac{1}{x-2} - 2$ 。

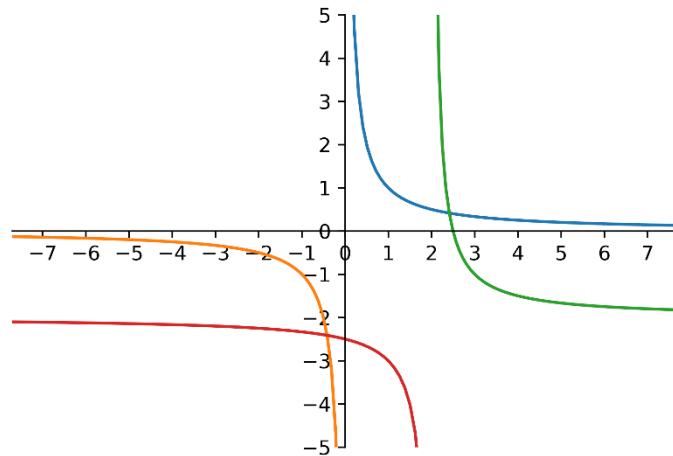


图 1-3 不同 k、a、b 的倒数函数双曲线

对于倒数（除运算）计算，分母是不可以为0的。所以倒数函数的自然定义域是除去分母为零处的所有实数。当函数图像很靠近分母为零位置时，倒数的绝对值会变得很大。分母为0处无法取值的竖线( $x =$

$a$ 和分式值为0处的横线( $y = b$ )被称作倒数函数的渐近线，就是可以逐渐接近但却无法达到的直线。我们可以在 sec1-1.ipynb 程序中多次改变倒数函数表达式（注意同时把程序里分母为零处的强制连续去掉），运行观察后，我们不难总结倒数函数的图像特征。

#### 【规则 4】倒数函数的图像特征

倒数函数  $y = \frac{h}{x-a} + b$  的图像是双曲线。

$a$ 和 $b$ 的值表明渐近线的位置， $x = a$ 和 $y = b$ 是 $y = \frac{h}{x-a} + b$ 的渐近线。

$h$ 具有陡峭程度（靠近渐近线的速度）的信息， $h$ 的绝对值越小越陡峭弯折越剧烈，越大弯折越平缓。

$h$ 为正时双曲线的两支在左下方和右上方（两支单调减）， $h$ 为负时双曲线的两支在左上方和右下方（两支单调增）。

函数图像不仅关于原点对称，还分别关于直线 $y = x + b - a$ 和 $y = -x + b + a$ 对称。

函数图像上到渐近线交点最近的点的坐标为 $(-\sqrt{|h|} + a, -\sqrt{|h|} + b), (\sqrt{|h|} + a, \sqrt{|h|} + b)$ 。

倒数函数是自变量增加某个步长的值，函数值相应的反比例减少某个值。例如最简单的 $y = \frac{1}{x}$ ，实际就是 $xy = 1$ 去掉 $x = 0$ 。也就是自变量和函数值成反比例相关。在现实世界中有很多类似的例子，为了便于理解，我们给它找一个直观的示例。

#### 【物理意义示例】倒数函数

恒温恒量时，理想气体的压强与体积的关系。

$$p = \frac{nRT}{v}$$

$$\text{气体压强} = \frac{\text{气体量} \times \text{通用气体常量} \times \text{气体温度}}{\text{气体体积}}$$

$p$ 是自变量为 $v$ 的倒数函数。

我们可以这样做实验，在恒温环境，缓慢的压缩和释放封闭活塞，用气压传感器在封闭活塞内测量气体压强，记录活塞内空间体积和对应的压强数据。通过实验数据，不难总结出气体体积和压强的反比关系。当然，这里的体积并不能取负值，所以实验数据拟合的函数图形仅仅是双曲线的一支。

#### 参考链接

理想气体定律 <https://baike.baidu.com/item/气体压强>

为了更好的体验一下函数图形变换，我们接着前文描述的内容，把一次函数和倒数函数加起来，例如随意构造一个函数 $y = 0.4x + \frac{5}{x-2} + 3$ 。在 sec1-1.ipynb 中，已经画出了它的图像，如图 1-4 所示。

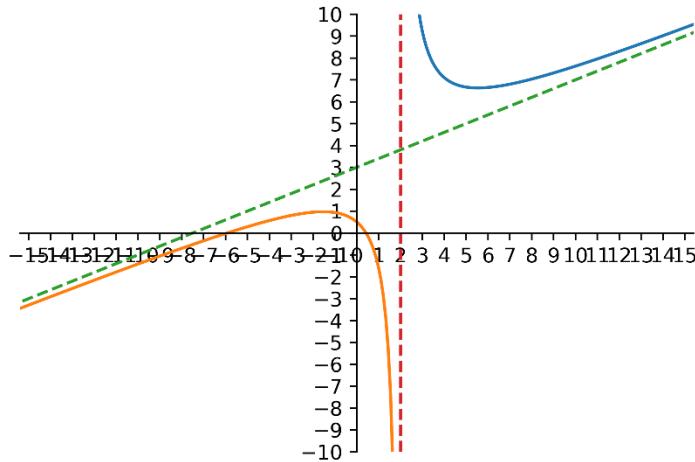


图 1-4 倒数函数加一次函数的图像

这个函数的渐近线是 $x = 2$ ,  $y = 0.4x + 3$ 。它的右支离 $x$ 轴最近的点在 $x = \frac{5\sqrt{2}+4}{2}$ 处（考虑第一象限的分支，倒数函数单调减，直线单调增，加起来增还是减，其平衡的点出现在其相等处，令 $t = x - 2$ ，令单调增加部分和单调减少部分相等，常数甩到一边不管， $0.4t = \frac{5}{t}$ 解出 $t$ 后再平移2得到倒数与直线平衡处的 $x$ ，就是离 $x$ 轴最近的点）。改变常数项参数多次绘制，总结其图像特征。

### 【规则 5】一元一次函数加倒数函数的图像特征

一元一次函数加倒数函数 $y = kx + \frac{h}{x-a} + b$  的图像是双曲线。

$a$ 和 $b$ 的值表明渐近线的位置， $x = a$ 和 $y = kx + b$ 是 $y = kx + \frac{h}{x-a} + b$  的渐近线。

$h$ 具有陡峭程度（靠近渐近线的速度）的信息， $h$ 的绝对值越小越陡峭弯折越剧烈，越大弯折越平缓。

$h$ 为正时曲线的两支在左下方和右上方， $h$ 为负时曲线的两支在左上方和右下方。

$k$ 的值代表斜渐近线的斜率， $k$ 同为正或同为负时， $k$ 的绝对值越大两条渐近线靠得越近，越小离得越远， $k$ 异号时， $k$ 的绝对值越大两条渐近线离得越远，越小靠得越近。

当 $x = \pm\sqrt{\frac{h}{k}} + a$ 时，曲线两支分别处在离 $y = b$ 最近的点。

这个函数由两个基本初等函数叠加获得，所以相比之前介绍的函数略显复杂，它将成正比与成反比融合在了一起，当成反比相对占优时，成正比的部分减缓了函数值的衰减速度，当成正比相对占优时，成反比的部分减缓了函数值的增加速度。成正比的部分和成反比的部分互相平衡时，也就是函数图像处

在离 $y = b$ 最近的点（极值点）。在现实世界中有很多类似的例子，为了便于理解，我们给它找一个直观的示例。不同与前面几个函数用力学和热学的例子，这次我们举一个几何学应用的例子。

### 【几何意义示例】一元一次函数加倒数函数

恒定面积以矩形圈地时（改变矩形的长宽比例，但保持矩形面积一定），矩形总周长（篱笆用料）和矩形某一边边长的关系。

$$y = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

$$\text{矩形周长} = 2 \times \left( \text{矩形某一边的长度} + \frac{\text{矩形面积}}{\text{矩形某一边的长度}} \right)$$

$y$ 是自变量为 $x$ 的函数。

根据规则 5 给出的最后一条性质，或者直观理解，都不难得出，当 $x = \sqrt{S}$ 时，篱笆用料最省，也就是面积恒定时，正方形的周长是所有矩形中最短的。

至此为止，我们已经分析总结了数个基本初等函数。不论是一次函数、二次函数、倒数函数，他们本质都是自变量的确定次方的运算。一次函数是自变量的一次方，二次函数是自变量的二次方，倒数函数是自变量的负一次方，如果再加上开方运算（自变量的分数次方），我们可以总结这一大类函数的特征。这一大类函数称作幂函数。

在具体介绍幂函数之前，我们先来了解函数的**奇偶性**。

### 【定义 3】偶函数 奇函数

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫**偶函数**。

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$ ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫**奇函数**。

注意定义里加粗了“任意一个”。判断函数奇偶性时首先要看其定义域是否关于原点对称。一个函数是奇函数或偶函数，其定义域必须关于原点对称，定义域不对称，必定非奇非偶。例如 $y = x^3$ 是一个奇函数，因为 $(-x)^3 = -x^3$ ，而 $y = x^2$ 是偶函数，因为 $(-x)^2 = x^2$ 。

### 【规则 6】奇函数和偶函数的特征

奇函数满足图形关于原点对称，并且可写出

$$f(x) + f(-x) = 0$$

$$f(x) \times f(-x) = -[f(x)]^2$$

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$$

偶函数满足图形关于y轴对称，并且可写出

$$f(x) - f(-x) = 0$$

$$f(x) \times f(-x) = [f(x)]^2$$

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = 1$$

- 1、两个奇偶性相同的函数相加所得的函数奇偶性不变。
- 2、两个奇偶性相同的函数相乘所得的积为偶函数。
- 3、两个奇偶性不同的函数相乘所得的积为奇函数。
- 4、几个奇函数或偶函数复合，只要有一个是偶函数，结果是偶函数；若无偶函数则是奇函数。
- 5、偶函数的和差积商是偶函数。
- 6、奇函数的和差是奇函数。
- 7、奇函数的偶数个积商是偶函数，奇函数的奇数个积商是奇函数。
- 8、奇函数或偶函数的绝对值为偶函数。

结合规则 1 和规则 6，不难得出函数图像关于某点对称、关于某垂直或水平直线对称的代数表达。

### 【规则 7】函数图像关于某点、某垂线、某水平线对称

如果对于定义域内任意一个 $x$ ，有 $f(a+x) + f(b-x) = c$ ，那么函数图像关于 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 中心对称；

如果对于定义域内任意一个 $x$ ，有 $f(a+x) = f(a-x)$ ，那么函数图像关于 $x = a$ 轴对称。

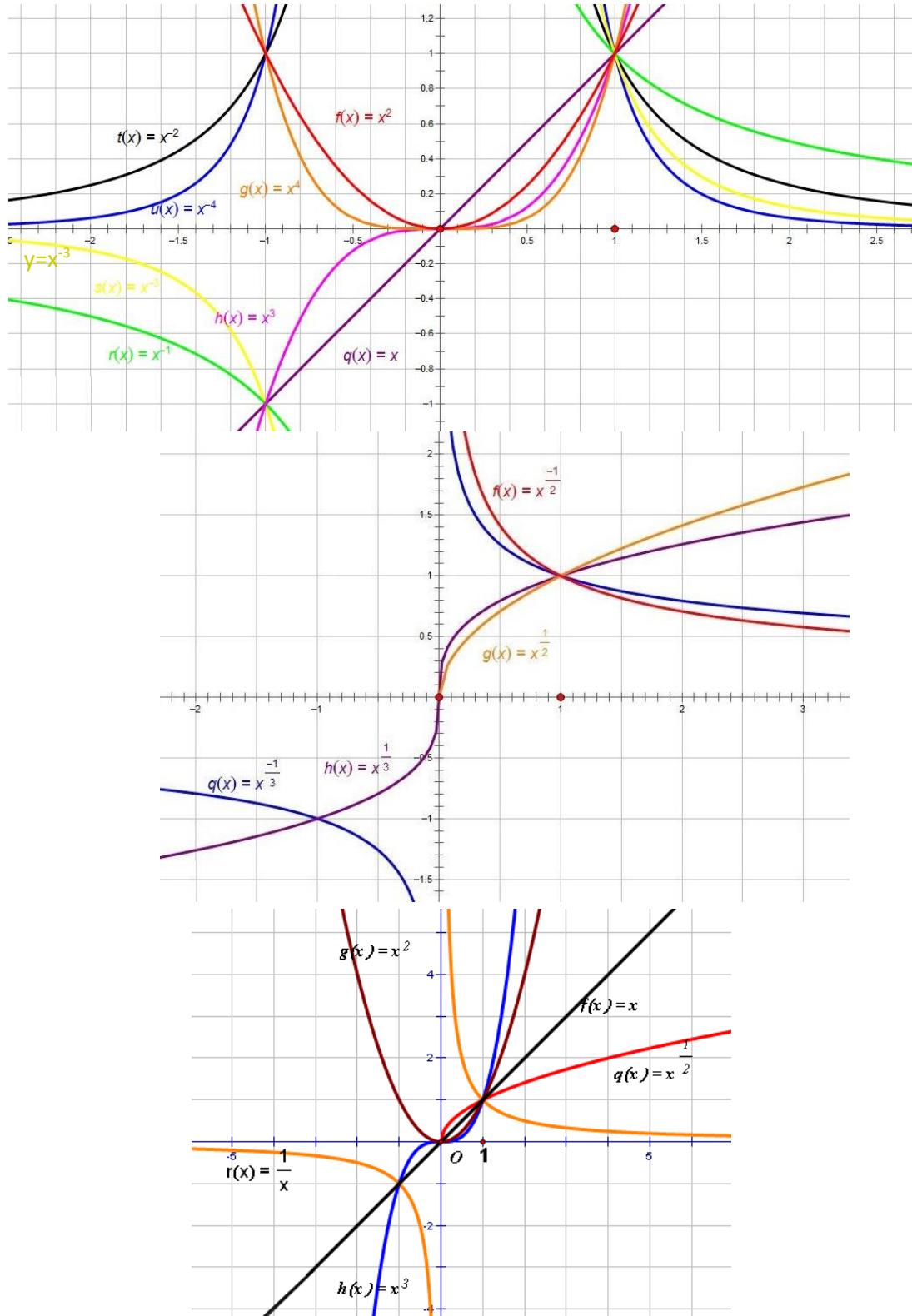
如果对于定义域内任意一个 $x$ ，有 $f(x) + g(x) = c$ ，那么函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像关于 $y = \frac{c}{2}$ 轴对称。

通过规则 1 直接画图可以分析得出这些代数表示。或者更直观得说，通过把奇函数和偶函数按规则 1 平移，即可得到规则 7 的前两条，第三条是第二条规则对换 $x$ 轴 $y$ 轴后的表示。研究函数的奇偶性（函数图像的对称性）主要是为了减少某些问题求解的复杂程度。例如知道了一个具有对称性的某函数一部分的图像特征，其关于对称中心或者对称轴的另一半就可以直接根据对称性克隆出来。在了解奇偶性之后，我们继续回来讨论幂函数，在某些情况下，幂函数是奇函数或者偶函数。这样一来，我们只要研究明白幂函数的奇偶性分布和正半部分的图像，另一半很多时候就可以直接复制出来。为了简化讨论，我们暂且只研究幂次为有理数的幂函数。

下面以不同颜色给出了十余个幂函数的图像，供直观参考观察。

## 参考链接

幂函数 <https://baike.baidu.com/item/幂函数>



我们可以用程序绘制没有经过平移和缩放的各次幂函数进行观察比较（幂函数的主要特征在参考链接里已经描述，我们主要是进一步观察幂次变化带来的图形变化规律）。比如，我们将幂函数的幂次分为四个区间，分别是负值小于 $-1$ 、负值大于 $-1$ 、正值小于 $1$ 、正值大于 $1$ ，在每个区间里取四五个从小到大的示例，顺次绘制观察。

绘制的时候可能会遇到 invalid value encountered in power 的错误，可以根据参考链接里描述的规律确定奇偶性（下一页也给出了幂函数奇偶性的快速判定表格），然后按 <https://stackoverflow.com/questions/45384602/numpy-runtimewarning-invalid-value-encountered-in-power> 的方法进行绘制。

经过观察，不难发现最直观显然的规律，幂函数的幂次越大，函数值在大于 $1$ 之后变化越剧烈越陡峭。对于第一象限的正值区间来说，幂函数的图形变化可以随着幂次变化做成连续平滑的动画。动画见本节配套代码 sec1-1.ipynb。

所有的幂函数都过点 $(1,1)$ ，因为 $1$ 的任何次方都等于 $1$ 。

如果是传统考试或者特殊情况，需要**手工绘制幂函数图像**的话，进行如下两步即可完成：

第一步，根据幂次所属的区间（前文所述的四个区间）确定函数图像在**第一象限**的基本形状；

首先，如果**幂次是正的**，第一象限的图像一定是**单调增**的，如果**幂次小于 $1$** ，那第一象限的图像就是**横趴的**，且**幂次越小趴的越平**，如果**幂次大于 $1$** ，那第一象限的图像就是**竖起来的**，且**幂次越大竖的越陡**；

如果**幂次是负的**，第一象限的图像一定是**单调减**的，以沿直线 $y = x$ 对称的双曲线 $y = x^{-1}$ 为参照，幂次越小（负的更多的）在 $x > 1$ 时越在下方，在 $x < 1$ 时越在上方。

第二步，根据幂函数的奇偶性判定表（后文提供）确定函数在**第二或第三象限**的图像。

首先，**幂次分母为偶数**时不用对称复制了，因为**一定是非奇非偶函数**，开偶数次方根号决定了没有负值定义域；

如果**幂次分母是奇数**，则**分子是奇数**就是**奇函数**，对称复制到第三象限，如果**分子是偶数**就是**偶函数**，对称复制到第二象限。

另外，如果是**无理数幂次的幂函数**，不存在负的定义域（正无理数幂次定义域包括 $0$ ，负无理数幂次定义域只有大于 $0$ 的正值），则它**一定是非奇非偶函数**，例如 $y = x^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}$ ，我们一般选取离它较近的有理数幂次的图像来近似，只画出第一象限图像即可。

幂函数  $f(x) = x^{k\frac{m}{n}}$ ,  $k \in \{-1, 1\}$ ,  $m, n \in N^+$  的定义域、值域和奇偶性

	$m, n$ 均为奇数		$m$ 为奇数 $n$ 为偶数		$m$ 为偶数 $n$ 为奇数	
	$k = 1$	$k = -1$	$k = 1$	$k = -1$	$k = 1$	$k = -1$
定义域	$R$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$R$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	$R$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	奇函数	非奇非偶	非奇非偶	偶函数	偶函数

在实际应用中，我们根据幂函数的幂次变化规律，只识记第一象限的函数图像，然后根据上表的奇偶性规律，即可得到幂函数的整个定义域上的图像。对于无理数幂次的幂函数，其定义域不包含负值部分，所以一定是非奇非偶函数，在使用计算机程序绘制其函数图像时，可以取临近的两个有理数幂次的图像，夹逼得到近似的无理数幂次的幂函数图像。在一般的日常工程应用中，我们遇到的大多是有理数幂次的幂函数，例如前文所列举的一元一次函数、一元二次函数、倒数函数，再例如常见规则几何体已知边长计算体积常用的一元三次函数、已知体积或面积计算边长的开三次或开二次方等等，都是有理数幂次的幂函数。

接下来我们来看**指数函数**。和之前一样，我们随意编造几个指数函数，用之前的程序模板绘制它们的图像。例如我们绘制蓝色的  $y = 2^x$ , 橙色的  $y = 5^x$ , 绿色的  $y = (\frac{1}{2})^x$ , 红色的  $y = (\frac{1}{5})^x$ , 如图 1-5 所示。在之前初等函数的分析，我们把平移和缩放的常量融合到了函数表达式里（例如一元一次函数的  $k$  和  $b$ , 一元二次函数的  $a$ 、 $b$ 、 $c$  等等），是为了能够更直接的快速分析解题同时更熟练的使用规则 1。但从分析指数函数开始，我们并没有这样做，并不是因为不可以这样，所有一元函数的图形变换都可以使用规则 1，而是为了更简单直观的说明其他关键的问题。改变常数项参数多次绘制，总结其图像特征。

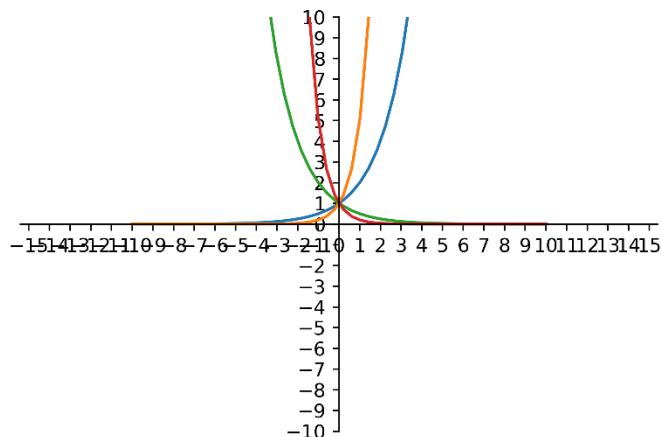


图 1-5 不同底数的指数函数图像

### 【规则 8】指数函数的图像特征

$y = a^x, a > 0$  且  $a \neq 1$  的图像是一条各点陡峭程度正比于那一点处函数值的曲线。其定义域是  $(-\infty, +\infty)$ ，其值域为  $(0, +\infty)$ 。

$a > 1$  时， $y = a^x$  是定义域上的增函数； $a < 1$  时， $y = a^x$  是定义域上的减函数。

底数  $a$  具有陡峭程度的信息， $a$  的值越远离 1 越陡峭，越靠近 1 越平缓。（函数值大于 1 时）

$y = a^x$  和  $y = (\frac{1}{a})^x$  的图像关于  $y$  轴对称。

指数函数的图像是一条各点陡峭程度正比于那一点处函数值的曲线，简单直观的说，指数函数就是随着自变量的增长，函数值按恒定速率翻倍的函数。例如理想情况下细胞的二分裂，每隔一段时间，总量就会翻倍，两个变四个，四个变八个，八个变十六个。指数函数之所以限定  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，是因为当  $a = 0$  或  $a = 1$  的时候，它会退化成去掉一点的常函数或常函数，而  $a < 0$  时图像并不连续，比如  $(-2)^{\frac{1}{2}}$  不存在，不能作为初等函数研究。

### 【物理意义示例】指数函数

理想状态下细胞二分裂，某时刻细胞总数量和分裂总时间的关系。

$$y = 2^x$$

$$\text{细胞总数量} = 2^{\text{分裂经历的时间}}$$

$y$  是自变量为  $x$  的指数函数。

在日常生活中，特别是复利的计算（例如信用卡贷款利息）和指数函数有关。历史上就是因为复利的拆分计算问题，雅各布·伯努利在 1683 年引入了重要的自然对数函数的底数  $e$ 。思路是这样的：

### 【物理意义示例】自然对数函数的底数 $e$

设一份贷款的年利率为  $x$ ，为增加贷款收益逐月计算复利（每个月清算一次本息，没有还就本息合计在一起再计算利息），则每个月本息合计为上个月的  $(1 + \frac{x}{12})$ ，也就是每个月计算本息合计都要乘以  $(1 + \frac{x}{12})$ ，一年就是第一个月贷款额的  $(1 + \frac{x}{12})^{12}$ 。同理，如果拆分成逐日计算复利，一年就是第一天贷款额的  $(1 + \frac{x}{365})^{365}$ 。更细的拆分就可以带来更高的贷款收益，我们考虑无穷细的拆分，最多能把获利增加到原来的多少倍，这个极限倍数就是自然对数的底数  $e$ 。

具体来说，假定年利率为 100%，借期 1 年本息合为 200%，按年清算收取本息就是  $(1 + \frac{100\%}{1})^1$ ，利息平均每月约 8.3%。按复利可以只借 1 个月，1 个月未能还款，本息合计为借款，如此 1 年下来本息合计约为 261.3%。如果借贷者能在 1 个月内归还，则不需要付 1 整年的利息，放贷者快速收回资金可以借给他人；拖到 1 年归还，放贷者得到比正常放贷 1 年要高的利息；1 年后按复利计算本息快速增长，借贷者可

能就还不起了，而放贷者获得抵押品。甚至可以逐日借款，这样1年的收益高于261.3%，但增大不多，而借贷者可以更快还清少付利息， $e$ 就是设立更小还款时限增加获利，能达到的1年极限收益，即约为271.8%。

根据以上思路，记  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ 。这里的  $\exp(x)$  就是  $e^x$ 。其中  $e$  是一个无理数， $e = 2.718281828459045 \dots$  某些现代工程书籍中，指数函数（exponential function）有时特指  $y = e^x$ 。由于  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，不难感受到， $e$  这个常数或许与倒数函数有某些联系。我们可以尝试绘制  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  的函数图像来观察  $x \rightarrow +\infty$  时函数值的走向，但这样并不严谨，因为它不是一个初等函数，按我们之前的讨论，目前我们还并不知道它是否能够这样绘制草图（虽然经过研究后发现可以）。

前文写雅各布·伯努利之所以用全名，而不是像介绍欧拉和笛卡尔那样只写姓氏，是因为有很多个“伯努利”。比如，雅各布·伯努利的弟弟约翰·伯努利是莱昂哈德·欧拉的博士导师。伯努利（Bernoulli）家族是一个商人和学者家族，来自瑞士巴塞尔。伯努利家族的建立人，莱昂·伯努利，于16世纪从比利时安特卫普移民到巴塞尔。很多艺术家和科学家出自伯努利家族，特别是18世纪。

## 参考链接

伯努利家族 <https://zh.wikipedia.org/wiki/伯努利家族>



瑞士数学家 雅各布·伯努利 德语名 Jakob I. Bernoulli

1654年12月27日—1705年8月16日

当他读了勒内·笛卡尔、沃利斯的书后，顿受启发，兴趣转向数学。1676年到荷兰、英国等处，结识当地学者。从1687年起任巴塞尔大学教授，直到1705年8月16日于巴塞尔去世。

雅各布·伯努利主要贡献有：伯努利数、伯努利多项式、伯努利试验、伯努利过程、伯努利分布、伯努利不等式、伯努利双纽线、伯努利微分方程等。

指数函数的反函数是**对数函数**。显然在底数相同时，他们的图像关于直线  $y = x$  对称。我们用上面指数函数例子的底数，绘制对数函数，如图1-6所示，他们分别是**蓝色的** $y = \log_2 x$ ，**橙色的** $y = \log_5 x$ ，**绿色的** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，**红色的** $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 。显然，对数函数的图像特征可以根据指数函数的特征快速总结。

绘制对数函数的时候，我们发现 numpy 中的  $\log$  默认以为  $e$  为底取对数，我们可以使用**换底公式**来写出任意其他底数的函数表达式。

## 参考链接

对数函数的换底公式

<https://www.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:change-of-base/a/logarithm-change-of-base-rule-intro>

就像以 $e$ 为底的指数函数记作 $\exp$ ，以 $e$ 为底的对数函数也有特别的符号，记为 $\ln$ 。因为有换底公式这样的规律存在，所以我们只要能计算 $\ln$ ，就能用换底公式  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  计算以其他数字为底的对数。另外

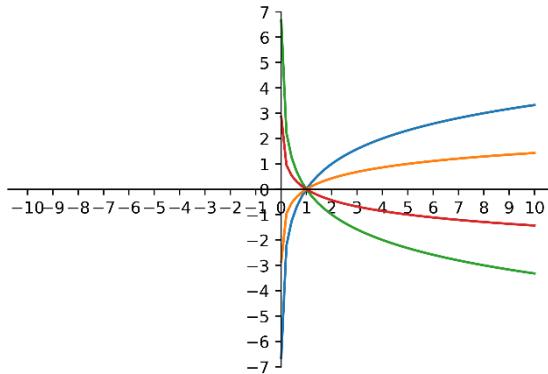


图 1-6 不同底数的对数函数图像

更进一步的，从这个表达式结合规则 1 可见，任意底数的对数函数都可以看成是  $\ln x$  向  $x$  轴收缩  $\ln a$  倍得到的。同理，指数函数  $y = a^x$  也可以写成  $y = e^{x \ln a}$ ，即任意底数的指数函数都可以看成是  $e^x$  向  $y$  轴收缩  $\ln a$  倍得到的。指数函数 (exponential function) 有时特指  $y = e^x$ ，因为底数不同也仅是简单缩放。

### 【规则 9】指数函数和对数函数的换底收缩特征

$y = a^x = e^{x \ln a}$  即  $y = e^x$  向  $y$  轴收缩  $\ln a$  倍得到  $y = a^x$ 。

$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  即  $y = \ln x$  向  $x$  轴收缩  $\ln a$  倍得到  $y = \log_a x$ 。

### 【规则 10】对数函数的图像特征

$y = \log_a x, a > 0$  且  $a \neq 1$  的图像是一条各点陡峭程度反比于那一点处自变量值的曲线。其定义域是  $(0, +\infty)$ ，其值域为  $(-\infty, +\infty)$ 。

$a > 1$  时， $y = \log_a x$  是定义域上的增函数； $a < 1$  时， $y = \log_a x$  是定义域上的减函数。

底数  $a$  具有陡峭程度的信息， $a$  的值越靠近 1 越陡峭，越远离 1 越平缓。（自变量大于 1 时）

$y = \log_a x$  和  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  的图像关于  $x$  轴对称。

既然对数函数是指数函数的反函数，所以其物理意义我们自然可以考虑到和前面相同的细胞二分裂的例子，无非是互换  $x$ 、 $y$  的位置，对数函数可以表达理想细胞二分裂时，分裂总时间和某时刻细胞总数

量的关系。为了更深入的理解对数函数在实际工程中的作用，我们引入另一个当代常见的使用对数函数的示例：信息量的定义。

### 【物理意义示例】对数函数

一件事件发生的概率 $p$ 越大，携带的信息越小，比如太阳会从东边出来，一年之中冬天比夏天冷，这样的事情发生了，我们几乎没有得到什么信息；反之，概率越小，携带的信息越大，比如股市崩盘了，某国家陷入战争，这样的事情发生了，则意味着大量的信息。

用一个函数  $f(p)$  描述**信息量**，这个函数是以事情发生概率 $p$ 为自变量的函数，它应该满足：

1.  $f(p)$  大于等于 0，
2.  $f(p)$  是一个减函数，
3.  $f(1) = 0$ ，
4. 对于两件相互独立的事情，他们同时发生了，获得的信息量是他们分别信息量之和。

满足上述条件的函数是对数函数，我们通常使用如下形式表达信息量：

$$f(p) = -\log_a p$$

$a = 2$  时，信息量单位为 bit； $a = e$  时，信息量单位为 nat； $a = 10$  时，信息量单位为 hart。

我们在后文介绍概率和统计方面的内容时，会很频繁的使用对数函数。

### 参考链接

信息量为什么定义为对数的形式 <https://blog.csdn.net/dog250/article/details/79081043>

接下来我们研究**三角函数**。三角函数和我们之前接触的函数所做的运算有所不同，它是一个**一元运算**，即只有一个输入，在没有和其他参数进行运算的情况下，即得到输出。我们之前介绍的函数，涉及的运算大多是**二元运算**，虽然他们也只有一个输入，是一元函数，但涉及的代数运算都是和其他参数或者常量交互产生结果（加减乘除乘方对数），比如直线有斜率截距、倒数函数自变量头顶上有分子、幂函数有指数、指数和对数函数有底数，只不过我们把这些作为常数参数固定了，而三角函数在没有平移缩放的基础定义时，并没有这样的常量参与运算，换句话说，它是真正的一元运算。

首先我们用一张图和一张表格纵览常见三角函数的定义，我们定义如图 1-7 所示的直角三角形，

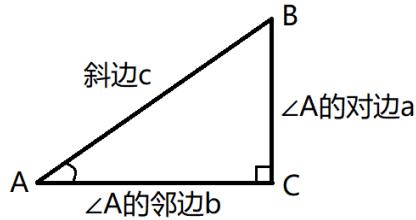


图 1-7 说明三角函数的直角三角形

$\angle ACB$  为直角。对  $\angle BAC$  而言， $\angle BAC = \theta$ ，对边 (opposite)  $a = BC$ 、斜边 (hypotenuse)  $c = AB$ 、邻边 (adjacent)  $b = AC$ ，用这个三角形结合下表说明各三角函数的定义。

各常见三角函数的定义（自变量输入为  $\angle A$  的弧度，即  $\theta$ ）

函数名称	英文名称	数学缩写	函数值运算 (输出)	函数值运算的描述
正弦	sine	$\sin$	$a/c$	$\angle A$ 的对边比斜边
余弦	cosine	$\cos$	$b/c$	$\angle A$ 的邻边比斜边
正切	tangent	$\tan$ 或 $tg$ 或 $tang$	$a/b$	$\angle A$ 的对边比邻边
余切	cotangent	$\cot$ 或 $ctg$	$b/a$	$\angle A$ 的邻边比对边
正割	secant	$\sec$	$c/b$	$\angle A$ 的斜边比邻边
余割	cosecant	$\csc$ 或 $cosec$	$c/a$	$\angle A$ 的斜边比对边

根据上述定义，显然各三角函数之间有关联，例如  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ， $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ ，  
 $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ， $\sin \alpha \csc \alpha = 1$ 。三角函数之间的快速转换计算可以参阅下表：

函数	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	$\sec$	$\csc$
$\sin \theta$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\csc \theta}$
$\cos \theta$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}{\csc \theta}$
$\tan \theta$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$
$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\csc^2 \theta - 1}$
$\sec \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$	$\sec \theta$	$\frac{\csc \theta}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$
$\csc \theta$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\csc \theta$

另外还有一些不常见的三角函数，比如正矢、余矢等等，在此不再赘述。1631 年徐光启与邓玉函、汤若望合撰《大测》首次将三角函数引入中国并确立了正弦、余弦等译名。欧拉的《无穷分析引论》中最早使用了接近现代三角函数的简写  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 。

## 参考链接

平面三角公式之几何渊源 <https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLArticle18.jsp?mID=31306>

三角函数的常用公式与某些速记方法 <https://baike.baidu.com/item/三角函数/1652457>

为了更直观清晰的给出三角函数的几何意义，我们在单位圆（半径为 1 的圆）上构造三角函数值长度的线段，如图 1-8 所示。所以某些地方又把三角函数叫做**圆函数**。

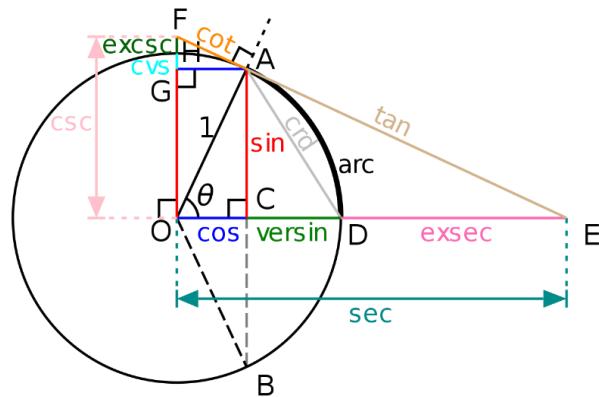


图 1-8 所有三角函数在单位圆上的函数值表示

可见，当 A 点在单位圆上旋转，而其他点的连带几何关系不变时，各三角函数的函数值（不同颜色所标出的线段长度）随  $\theta$  的变化而变化，当我们用  $\theta$  所对的单位圆弧长来表示  $\theta$  时，可以用平移匀速圆周运动立面投影的方式构造出三角函数在笛卡尔坐标系的函数图像：

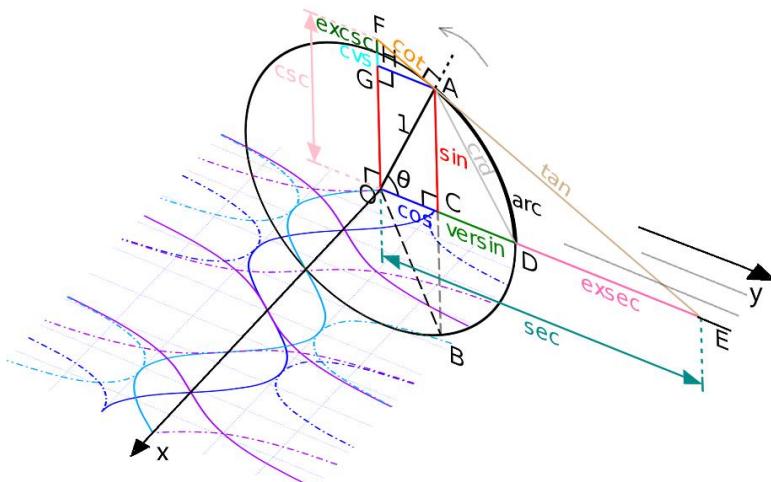


图 1-9 三角函数图像的物理几何构造方法

以构造  $y = \cos \theta$  为例, 如图 1-9 所示, 把图 1-8 所示的单位圆立起来, 过 O 点作垂直于单位圆平面的垂线, 并沿其定义为 x 轴正方向, 定义 OD<sub>x</sub> 平面上与射线 OD 平行的方向为 y 轴正方向, 将 A 点在单位圆做匀速圆周运动, 其他点的几何关系保持不变, 在 A 点匀速圆周运动的同时, 将单位圆沿 x 轴方向做同样速度的匀速直线运动, C 点在 xOy 平面划过的曲线就是函数  $y = \cos \theta$  的图像。

### 【几何意义示例】正弦余弦函数图像

沿垂直于圆面的中轴线匀速直线运动的单位圆, 单位圆上某一点沿单位圆做匀速圆周运动, 这一点在与单位圆平面垂直的平面上的投影轨迹, 即为正弦/余弦函数图像。

和之前考察其他的初等函数类似, 我们可以用程序随意绘制几个三角函数, 比如最具代表性的蓝色的  $y = \sin x$ , 橙色的  $y = \cos x$ , 绿色的  $y = \tan x$ , 如图 1-10 所示。这几个函数的图像有不断重复的特征, 我们再绘制其他三角函数, 不难发现也如此, 这种周而复始循环重复的特征, 称为函数的周期性。

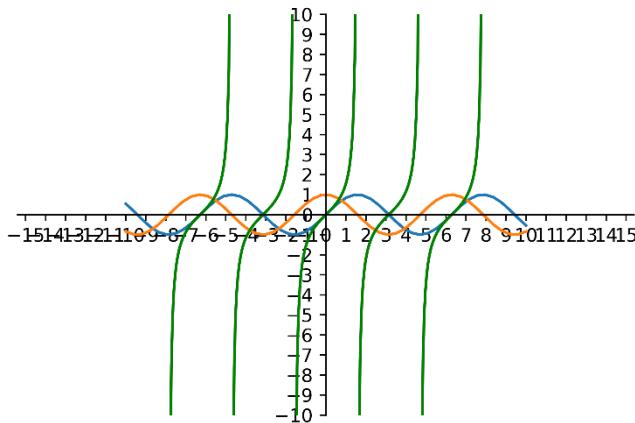


图 1-10 正弦余弦正切函数图像

### 【定义 4】周期函数

对于函数  $y = f(x)$ , 如果存在一个不为零的常数  $T$ , 使得当  $x$  取定义域内的每一个值时,  $f(x + T) = f(x)$  都成立, 那么就把函数  $y = f(x)$  叫做周期函数。不为零的常数  $T$  叫做这个函数的周期。最小的正值  $T$  称为这个函数的最小正周期。

事实上, 任何一个常数  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 且  $k \neq 0$  都是它的周期。并且周期函数  $f(x)$  的周期  $T$  是与  $x$  无关的非零常数, 且周期函数不一定有最小正周期, 比如狄利克雷函数 (自变量为无理数时函数值为 0, 有理数时函数值为 1)。另外, 我们把最小正周期  $T$  的倒数称为频率, 即  $f = \frac{1}{T}$ 。由上下文的图不难发现, 正弦函数和余弦函数的最小正周期是  $2\pi$ , 正切函数和余切函数的最小正周期是  $\pi$ 。所以基本的正弦函数和余弦函数的频率是  $\frac{1}{2\pi}$ 。如果我们按规则 1 把  $\sin x$  收缩  $\omega$  倍, 得到的  $\sin \omega x$  的周期为  $\frac{T}{|\omega|}$ , 频率为  $\frac{|\omega|}{2\pi}$ ,  $\omega$  这个缩放的系数就是前文几何意义里所描述的转动的角速度。特斯拉发明的交流发电机, 产生的交流电压就是正

弦波，可以表达成一个正弦函数。我们今天使用的交流电亦是如此，比如中国地区室电（220 伏 50 赫兹）电压  $V = 220 \sin 314t$ 。

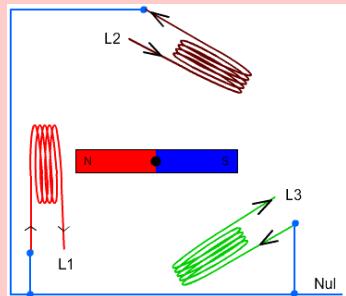
### 【物理意义示例】正弦函数/余弦函数

理想匀速交流发电机产生的某一路上的电压  $V$  与时间  $t$  的关系。

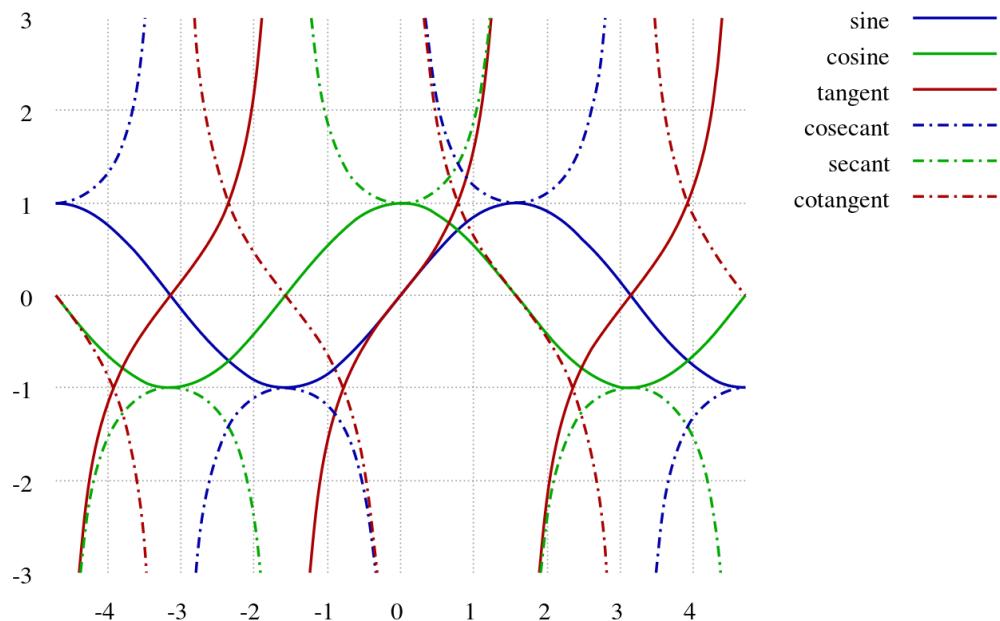
$$V = A \sin \omega t$$

其中一路某时刻的电压 = 最大电压  $\times \sin(\text{系数} \times \text{时间})$

$V$  是自变量为  $t$  的正弦函数。



由图 1-8 和图 1-9 也不难发现，所有三角函数都是改变自变量  $\theta$ ，在单位圆里周而复始循环往复的获得确定几何位置所决定的值，所以他们都是周期函数。比如  $\frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ) 和  $\frac{9\pi}{4}$  ( $405^\circ$ ) 所表示的位置是相同的，二者各个三角函数的值也都相同。只要得知它们至少一个周期内的函数图像，就可以重复得到其他部分，我们可以在  $(-\pi, \pi)$  区间内绘制六个常见三角函数  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$  的图像如下：



在观察他们的图像并计算验证后，不难总结出一系列常见三角函数的图像特征。

### 【规则 11】常见三角函数的图像特征

$y = \sin x$  (正弦函数) 对称中心  $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ , 对称轴  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , 它是奇函数。

$y = \cos x$  (余弦函数) 对称中心  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ , 对称轴  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 它是偶函数。

$y = \tan x$  (正切函数) 和  $y = \cot x$  (余切函数) 对称中心  $(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ , 没有对称轴, 它们是奇函数。

以上四个函数在函数图像经过 $x$ 轴时，其陡峭程度与 $y = x$ 或 $y = -x$ 相同。

$y = \sec x$  (正割函数) 对称中心 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$ , 对称轴 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 它是偶函数。

$y = \csc x$  (余割函数) 对称中心 $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ , 对称轴 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , 它是奇函数。

为了进行后续的计算讨论，我们先根据三角函数最基本的描述和特征，介绍**余弦定理**和它的特殊情况**毕达哥拉斯定理**，这两个定理的描述和拼图简单直观理解证明，如图 1-11 和图 1-12 所示。

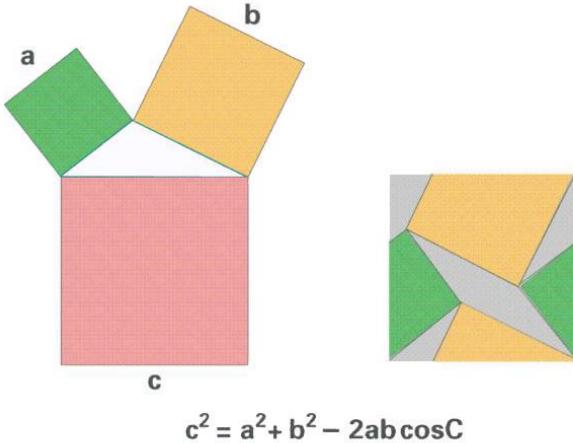


图 1-11 余弦定理及其图形证明

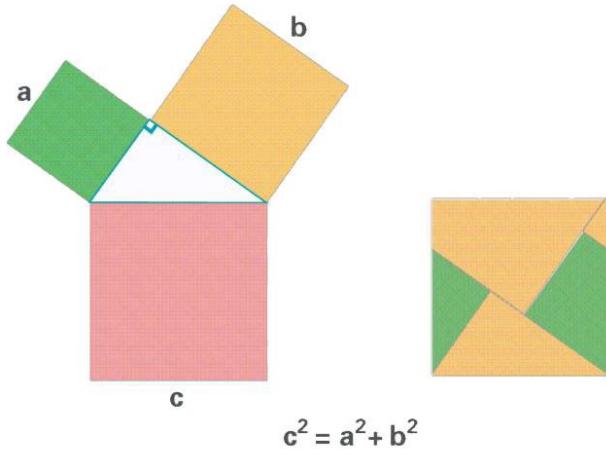


图 1-12 毕达哥拉斯定理及其图形说明

这两个定理证明的动画展示可以参见本节源代码笔记文件 sec1-1.ipynb 中的相应部分。

除了余弦定理，还有正切定理、余切定理，它们和我们后续的讨论关系不大，都可以由相关三角函数定义和图 1-8 得出，此处不做赘述，具体可参考 <https://zh.wikipedia.org/wiki/三角函数#正切定理>。另外，还有很常用的正弦定理，它用于一个三角形的两个角和一个边已知时，直接计算未知边的长度。（实际上不用正弦定理，直接在三角形内作一条三角形的高，也是可以计算的，也就是正弦定理的

证明过程) 正弦定理是说, 对于边长为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 对角为 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的三角形, 有  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , 其中 $R$ 是这个三角形的外接圆半径。其证明可见 <https://zh.wikipedia.org/wiki/正弦定理>。

根据前文对三角函数的描述, 通过毕达哥拉斯定理 (**勾股定理**), 我们可以通过计算, 得到一些特殊角度值的三角函数值, 如下表所示:

函数名	$0 (0^\circ)$	$\frac{\pi}{12} (15^\circ)$	$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3} (60^\circ)$	$\frac{5\pi}{12} (75^\circ)$	$\frac{\pi}{2} (90^\circ)$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0
sec	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\pm\infty$
csc	$\pm\infty$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	1

在实际应用中, 遇到的角度不可能仅仅是表格中所列出的特殊值。首先, 我们经常遇到需要将某个三角函数的自变量值增加或减少直角倍的情况。根据规则 1, 可以直接平移函数图像来获得新的函数解决问题, 而如果需要进行快速的代数求解的话, 就需要这样一类公式, 它能快速求解三角函数自变量变化直角 (也就是 $\frac{\pi}{2}$ ) 的整数倍。这些公式都可以由三角函数的定义和具体的函数图形推导得出或验证。

### 【规则 12】常见三角函数的诱导变换法则 (诱导公式)

$$\text{trigfunc1}\left(\pm\theta + \frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^m \text{trigfunc2}(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \{0, 1\}$$

$\text{trigfunc1}$ 和 $\text{trigfunc2}$ 为三角函数 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 等。

当 $k$ 为偶数时,  $\text{trigfunc1}$ 和 $\text{trigfunc2}$ 相同; 当 $k$ 为奇数时,  $\text{trigfunc1}$ 和 $\text{trigfunc2}$ 不同且为同族的三角函数, 例如 $\sin$ 和 $\cos$ ,  $\tan$ 和 $\cot$ ,  $\sec$ 和 $\csc$ 等。

$m$ 取0还是1, 也就是 $\text{trigfunc2}$ 前面的符号正负, 取决于将 $\theta$ 看作锐角时 $\text{trigfunc1}\left(\pm\theta + \frac{k\pi}{2}\right)$ 的正负, 当 $\text{trigfunc1}\left(\pm\text{锐角}\theta + \frac{k\pi}{2}\right)$ 为正时, 取正号 $m = 0$ , 当 $\text{trigfunc1}\left(\pm\text{锐角}\theta + \frac{k\pi}{2}\right)$ 为负时, 取负号 $m = 1$ 。

$\text{trigfunc2}$ 前面的符号正负可简记为:  $\sin$ 的正值都在 $x$ 轴上方,  $\cos$ 的正值都在 $y$ 轴右方,  $\tan/\cot$ 的正值斜着一三象限。诱导公式可以举例如  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ ,  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ ,  $\cos(-\theta) = \cos\theta$ 等等。在 $k \in (-4, 4]$ 这个范围内, 可以根据上述规则写出 90 个

常见三角函数的诱导公式。不常见三角函数例如正矢余矢也有诱导公式，例如  $\text{versin}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \text{cvs } \theta$ ，它们可以经由不常见三角函数与常见三角函数的关系简单的导出，例如  $\text{versin } \theta = 1 - \cos \theta$ ， $\text{cvs } \theta = 1 - \sin \theta$ 。

除了自变量增减直角倍（平移 $\frac{k\pi}{2}$ ）以外，自然就考虑到能否将自变量增减任意的数值。例如我们把 $\alpha$ 看作自变量，将三角函数平移任意角度 $\beta$ ，计算平移后的函数值，结果写成 $\alpha$ 、 $\beta$ 的三角函数组合而成的表达式，就是规则 13。对于正弦函数 $y = \sin x$ ，我们又称其图像为标准的正弦波，对于平移后的函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ，其图像自然也是正弦波，我们称 $\varphi$ 为 $y = \sin(x + \varphi)$ 这个函数图像的**相位**。

### 【规则 13】常见三角函数的两角和差公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

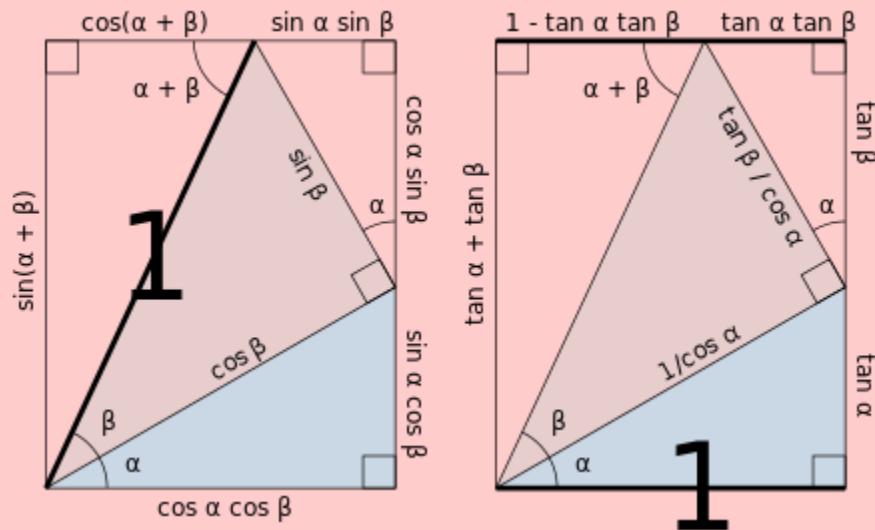
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

通过图 1-8 和三角函数的定义可以证明这些公式。规则 12 的诱导公式是两角和差公式在其中一角是 $\frac{k\pi}{2}$ 时的特例。两角和差公式也可以通过下图的几何意义快速直观理解。

### 【几何意义示例】常见三角函数的两角和差公式

设图中加粗的部分长度为 1，角 $\alpha$ 、 $\beta$ 如图标注所示，则两角和公式可由矩形边长如图表达。



针对上面的几何意义示例里的左图，当角 $\beta$ 是某个特殊值时， $\cos \beta$ 和 $\sin \beta$ 可以看成系数，由毕达哥拉斯定理，令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \beta$ ,  $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \beta$ ,  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 可以变成

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{b}{a},$$

这个式子又叫三角函数的线性组合**辅助角公式**，它说明了：相同周期但是相位不同的正弦波，它们的线性组合（乘以常数并互相加减）有相同的周期但是相位不同。

有了规则 13，我们就有了将一个常见三角函数平移任意角度的代数运算方法。为了覆盖更多角度的三角函数计算，我们自然可以想到，除了平移之外，还要缩放。根据三角函数的单位圆定义和两角和公式，我们可以进一步得到二倍角公式（令 $\beta = \alpha$ ，按两角和公式求和）和三倍角公式（二倍角公式的 $2\alpha$ 再加 $\alpha$ ），将二倍角公式和三角函数之间的关系式联立反过来求解，可以得到半倍角公式，将常用倍角公式列出如下：

#### 【规则 14】常见三角函数的二倍角、半倍角、三倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\sec 2\alpha = \frac{\sec^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\csc 2\alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sec \alpha \csc \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \csc \alpha - \cot \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 4 \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} = \tan \alpha \tan(\frac{\pi}{3} + \alpha) \tan(\frac{\pi}{3} - \alpha)$$

观察上述公式不难发现，对于正弦函数或者余弦函数，角的乘系数越高，其按两角和展开后的三角函数的最高幂次越高。可以从两方面考虑，一是从代数角度，按规则 13 的两角和公式展开，对基础三角函数幂次升高了，所以角度越累加（角的倍数越高）展开后三角函数的幂次就越高；二是从函数图像考察，对正弦函数或者余弦函数，自变量前乘以一个倍数系数，这个系数越大，函数图像就收缩得越紧，频率就越高，它单调的局部就越陡峭，也就是对基础三角函数的运算幂次越高（和幂函数一样，幂次越高靠近(1,1)的局部越陡峭，可以看成三角函数的局部复合幂函数）。

有了对基础三角函数的平移和缩放对应的快速代数运算，从数值计算的角度，我们可以使用前文中表格给出的特殊角度的三角函数值结合这些快速计算的公式，覆盖很多角度的三角函数值，自然也可以近似的快速得到某个角度的三角函数值。但平移和缩放的意义远不止数值计算，把上述三角函数公式按规则 1 从函数规律的角度考察，可以感受到这一类函数独特的变换特征。例如图 1-13，我们可以感受一下正弦函数幂次的提高带来的图形变化，我们绘制了蓝色的 $y = \sin^3 x$ ，橙色的 $y = \sin^{18} x$ ，绿色的 $y = \sin^{33} x$ ，红色的 $y = \sin^{48} x$ ，淡紫色的 $y = \sin^{63} x$ 。

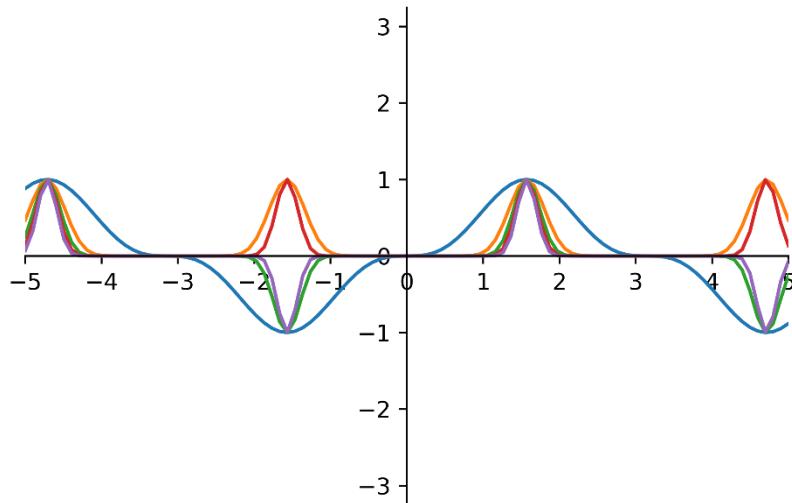


图 1-13 正弦函数不同幂次的图像

为了更明显的体验前两段的描述，我们在同一坐标系上绘制绿色的 $y = \sin x$ ，橙色的 $y = \sin 5x$ ，蓝色的 $y = \sin^{23} x$ ，红色的 $y = \sin^5 x$ ，如图 1-14 所示。从绘制的图形可以看出， $y = \sin^{23} x$  在接近极大值处比 $y = \sin^5 x$ 要更接近 $y = \sin 5x$ ，按倍角公式展开时，最高次数的项如果不带系数看，对应的图像在单调局部的陡峭程度远不如原来带系数的项，只有带上纵向拉伸的系数和其他的项参与运算，它们合起来才是多倍角展开前的图形。为了更确切的体验，我们在同一坐标系上绘制正弦三倍角公式左边和右边的两项，如图 1-15 所示。

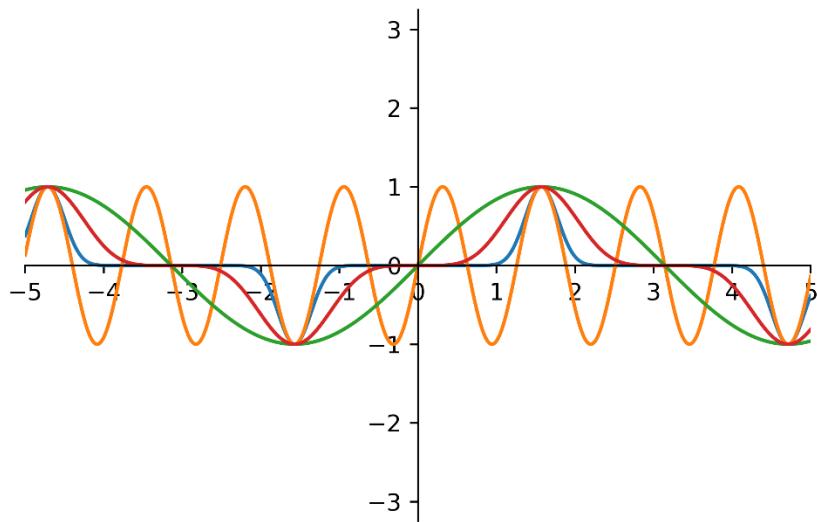


图 1-14 正弦函数不同幂次和不同角速度的图像

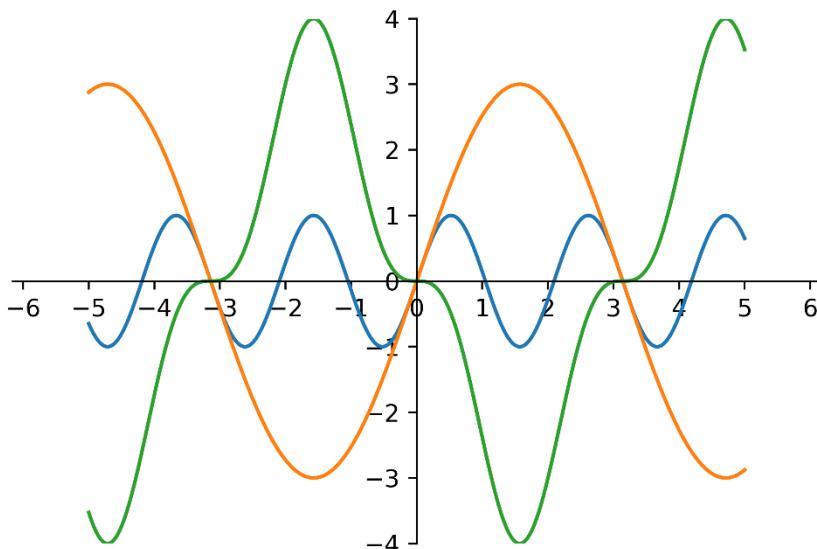


图 1-15 正弦三倍角公式的各项图像

正弦三倍角公式在前文的规则 14 中，是  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ 。在图 1-15 中，**三条图线分别是蓝色的** $y = \sin 3x$ ，**橙色的** $y = 3\sin x$ ，**绿色的** $y = -4\sin^3 x$ ，用规则 1 的函数值相加融合，**橙色的图线加绿色的图线等于蓝色的图线**。前文所有的三角公式，除了前文描述时提到的基础代数几何证明方法，也可以像此处一样，利用规则 1，从函数图形变换的角度理解。

前文描述的三角函数两角和差公式、倍角公式，大多都是**升幂公式**，就是将公式左侧看作基础三角函数的图像变换（自变量加上什么东西或者乘以某个系数），其函数表达式的代数展开形式（公式右侧）的基础三角函数的最高幂次上升。有升幂公式自然就有降幂公式，不难发现，半倍角公式就是降幂的，它将自变量乘以  $\frac{1}{2}$ ，右侧的展开形式出现了根号（ $\frac{1}{2}$  次幂）。将半倍角公式左右两边同时平方，得到的等式组，就是那些三角函数的常见**降幂公式**（幂简约公式）。概括的说，这些升幂降幂的公式，是为

了在不同频率（不同角速度）的三角函数和不同幂次的基础三角函数之间建立联系。更广义的说，是将周期函数自变量的缩放（频率变化）和原频率基础函数的幂次建立了联系。

常见的降幂公式主要有下表列出的这些：

$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}$
$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}$	$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$	$\sin^3 \theta \cos^3 \theta = \frac{3 \sin 2\theta - \sin 6\theta}{32}$
$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$	$\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$	$\sin^4 \theta \cos^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 4\theta + \cos 8\theta}{128}$
$\sin^5 \theta = \frac{10 \sin \theta - 5 \sin 3\theta + \sin 5\theta}{16}$	$\cos^5 \theta = \frac{10 \cos \theta + 5 \cos 3\theta + \cos 5\theta}{16}$	$\sin^5 \theta \cos^5 \theta = \frac{10 \sin 2\theta - 5 \sin 6\theta + \sin 10\theta}{512}$

从上表不难看出，随着幂次的提高，展开式呈现出了一定的规律，实际上，降幂公式是有规律可循的，反过来说，升幂公式也是一样，典型的就是**n倍角公式**，规则 14 是  $n = 2$  和  $n = 3$  时的部分特例。

## 参考链接

任意正整数次幂的**幂简约公式**

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%81%92%E7%AD%89%E5%BC%8F#%E5%B9%82%E7%AE%80%E7%BA%A6%E5%85%AC%E5%BC%8F>

## n倍角公式

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%81%92%E7%AD%89%E5%BC%8F#%7F%22%60UNIQ--postMath-000000C5-QINU%60%22%7F%E5%80%8D%E8%A7%92%E5%85%AC%E5%BC%8F>

三角函数有如此多的公式，以至于前文提到的几十个公式也只是冰山一角，熟悉它们有意义吗？这是一个数学学习中经常遇到的问题，这一切仅仅是表面表达的形式变化吗？它们有意义吗？我们先看一个和降幂公式有关的建筑学中的物理意义示例。

### 【物理意义示例】利用正弦二倍角降幂观察函数极值

一间新房建成时即将要封顶，考虑到下雨时落下的雨滴能尽快流离房顶，

要设计好房顶的坡度，近似的，设雨滴沿房顶滚下时做理想的无初速度无摩擦运动。

那么示意图中锐角  $\alpha$  的角度应该是多少？可见雨滴做理想的匀加速直线运动，

根据前文所述的一元二次函数物理意义示例中的公式， $s = \frac{1}{2}at^2$ ，

$\frac{L}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$ ，解得  $t = \sqrt{\frac{gL}{\sin \alpha \cos \alpha}}$ ，根据正弦二倍角公式  $t = \sqrt{\frac{2gL}{\sin 2\alpha}}$ ，

显然当  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  时， $\sin 2\alpha$  取得极大值 1， $t$  取得极小值  $\sqrt{2gL}$ 。



对于这个问题上文中的求解，二倍角公式的降幂操作所具有的意义是，让我们能够将函数表达化成便于分析解决问题的形式。当然，这并不是说此处必须要使用二倍角公式，求自变量为 $\alpha$ 的函数 $t = \sqrt{\frac{gL}{\sin \alpha \cos \alpha}}$ 在 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的极小值，这个问题也可以用直接给出函数图形等方法解决，正所谓条条大路通罗马。不仅仅是这个问题，大多数的下游任务具体问题，都可以用多种方法渠道解决，我们掌握的工具越多越丰富，解决问题就越快速便利。这就好比，如果你完全不懂三角学和力学，不知道二倍角公式也不知道匀加速直线运动的位移公式，甚至不知道函数是什么，上文这个雨滴流淌的问题你也未必解决不了，但是无疑你解决需要花费更多的精力和时间（或者之前有了其他方面的有助于解决这个问题的经验知识积累或者工具积累）。历史和知识存在的意义，就是让你在求解下游任务的时候起点更高一些，可能原本需要思考、实验、计算几天才能解决的问题，有了**先验知识的积累**，也许你只用 10 秒就得到了答案，这就是知识的力量。本书尽力提供给读者尽可能强大的这种力量和工具，但对读者来说更有价值的是汲取这种力量的速度和自身的思考力，如果本书能在这两方面同样给予读者某些提高，实乃作者万幸之至。哪些东西有意义，哪些东西更重要，要看你的目标是什么。如果目标是为了实用的下游任务，要看要完成的下游任务是什么，具体是要做什么；如果目标是为了求知和理解本身，恭喜你，我也是，我们是同路人。从求知和理解本身的角度出发，前文阐述的一堆公式和主线的思路是有意义的，因为这一切是后面的章节讨论积分变换（例如傅里叶变换）等内容的基础；从实用的角度出发，要看具体要解决什么问题，如果遇到的是诸如上述示例房顶雨滴流淌这样的问题，这些讨论也许有那么一丁点但非必要的作用。

常见三角函数的降幂升幂公式除了前文所描述的，还有韦达的**积化和差、和差化积**，如下表所示：

积化和差	和差化积
$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

这些公式可以由两角和差公式直接证明。这里的韦达就是前文一元二次方程韦达定理那个韦达。他在其 1579 年出版的三角学著作《应用于三角形的数学定律》（*Canon mathematicus seu ad triangula*）一书中给出了积化和差、和差化积公式和前文所述的很多公式。韦达最早明确给出有关圆周率的无穷表达式，之后韦达用代数方法解决几何问题的思想由笛卡儿、费马继承，笛卡尔发展出了前文

所介绍的直角坐标系解析几何。历史上，法国在 17 世纪第二个三分之一的时间里是无可争辩的数学中心，最重要的人物大概就是笛卡尔和皮埃尔·德·费马（就是费马大定理那个费马）。



法国数学家 弗朗索瓦·韦达 法语名 François Viète

*François Viète*

韦达本人签名

1540 年生日不详—1603 年 12 月 13 日

他是有意识地、系统地使用符号的人。他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂，而且用来表示一般的系数。在他的著作《应用于三角形的数学定律》中，有解直角三角形、斜三角形等的详述，并且还有平面三角形的正切定理、球面钝角三角形的余弦定理、许多三角恒等式等。他发展了利用六种三角函数求解各种平面与球面三角形的方法。

另外，还有一些比较常用的三角公式，他们并非升降幂变化的。这些公式中，比较有代表性的是**托勒密定理**和**正切半角公式**（又叫“万能公式”）。

### 参考链接

托勒密定理的三角函数表达 <https://zh.wikipedia.org/wiki/托勒密定理#和差化积证明>

万能公式可以将各种三角函数都化成正切半角来统一表达。这样可以把具有不同三角函数的问题里的所有三角函数都化成一种函数进行统一运算或者统一换元（比如后续章节介绍的某些含有三角函数的积分求解），是一种无脑万能的解决方法。将规则 14 中的正切半倍角公式直接代入规则 15 的表达式中，即可证明这些公式。

### 【规则 15】正切半角公式（万能公式）

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

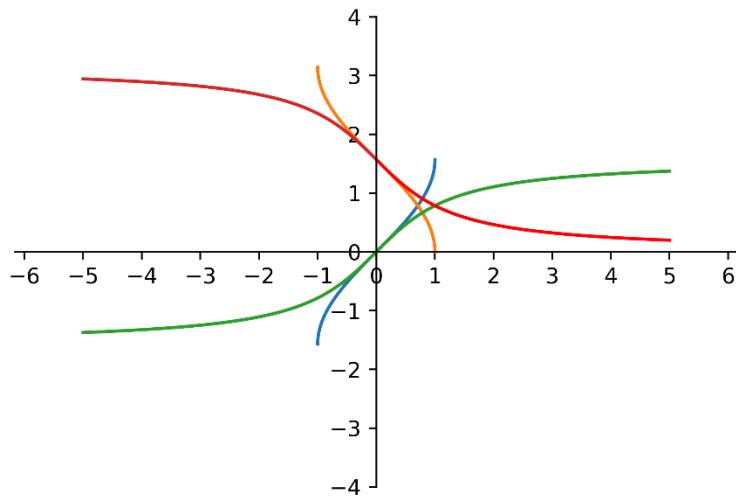


图 1-16 常见的反三角函数图像

由于三角函数都是周期函数，它们在定义域上是没有反函数的，因为反过来不是函数（自变量取一个值，对应的计算结果有多个而不唯一）。所以，反三角函数，是在三角函数的主值区间（主值区间就是描述一个函数所有值的区间，比如对于 $\sin x$ ，其主值区间就是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ；而 $\cos x$ 就是 $[0, \pi]$ ）求得的反函数。我们绘制常见的**反三角函数**如图 1-16 所示，分别是蓝色的 $y = \arcsin x$ ，橙色的 $y = \arccos x$ ，绿色的 $y = \arctan x$ ，红色的 $y = \operatorname{arccot} x$ 。反正割和反余割函数之所以暂且不做讨论，是因为不同教科书定义的值域有可能不同，为了避免歧义和误解，遇到实际问题可以具体问题具体分析，反正割和反余割函数也是取一段正割或一段余割函数求反函数。另外，不常见的三角函数也都有对应的反三角函数，同样的道理，都是取三角函数的某一段，求其反函数获得。本书反三角函数使用 $arc$ 开头的记号，是为了避免使用诸如 $\sin^{-1} x$ 这样的表示会和 $\frac{1}{\sin x}$ 产生混淆。

根据三角函数和反三角函数的定义、图 1-16、规则 7、规则 11，不难总结常见反三角函数的图像特征如下：

#### 【规则 16】常见反三角函数的图像特征

$y = \arcsin x$  (**反正弦函数**) 对称中心  $(0,0)$ ，它是奇函数，定义域上的增函数。

$y = \arccos x$  (**反余弦函数**) 对称中心  $(0, \frac{\pi}{2})$ ，定义域上的减函数。

$y = \arctan x$  (**反正切函数**) 对称中心  $(0,0)$ ，定义域上的增函数。

$y = \operatorname{arccot} x$  (**反余切函数**) 对称中心  $(0, \frac{\pi}{2})$ ，定义域上的减函数。

反正弦函数和反余弦函数的图像关于 $y = \frac{\pi}{4}$ 对称。

反正切函数和反余切函数的图像关于 $y = \frac{\pi}{4}$ 对称。

再根据规则 12 给出的诱导公式，我们很容易得到反三角函数之间的关系。比如，根据诱导公式  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ，令  $y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ，可以得到  $\arccos y = \frac{\pi}{2} - x$ ，而原等式左右两侧相等， $y = \sin x$ ，可以得到  $\arcsin y = x$ ，所以  $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$ 。同样的道理，我们可以这样根据几十个常用的诱导公式，得到几十个反三角函数之间的关系。

更进一步的，其他的公式关系也是一样，所有的三角函数关系式，都可以用上述换元方法，写出对应的反三角函数关系式。其中在解决实际问题中，比较常用的是**反三角函数的加减法公式**。

## 参考链接

反三角函数的加法公式和减法公式 <https://zh.wikipedia.org/wiki/反三角函数#加法公式和减法公式>

反三角函数和三角函数复合的计算，可以参考下表进行，他们都是可以由定义直接导出的。

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	图示
$\arcsin x$	$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$	$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	
$\arccos x$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$	$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	
$\arctan x$	$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\tan(\arctan x) = x$	
$\text{arccot } x$	$\sin(\text{arccot } x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\text{arccot } x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\tan(\text{arccot } x) = \frac{1}{x}$	
$\text{arcsec } x$	$\sin(\text{arcsec } x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\cos(\text{arcsec } x) = \frac{1}{x}$	$\tan(\text{arcsec } x) = \sqrt{x^2 - 1}$	
$\text{arccsc } x$	$\sin(\text{arccsc } x) = \frac{1}{x}$	$\cos(\text{arccsc } x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\tan(\text{arccsc } x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	

至此为止，我们介绍了本节最开始时提及的构成初等函数的全部几类基础函数。将这些函数彼此进行有限次的加减乘除、有理数次数的乘方开方，互相进行有限次的函数复合，可以得到千变万化的函数表达式，这些表达式每一个都是初等函数。

本节的最开始，我们定义函数的时候强调过，函数输入一个值，其输出是唯一的确定的。如果一个运算规则，输入一个值，输出的值不止一个，则不是一个函数。所以很显然，在笛卡尔坐标表达的很多常见的曲线图形，都不是函数（只要过曲线上所有的点对 x 轴作垂线，如果所作的垂线和曲线有不止一个交点，就说明这个曲线并不是一个函数的图像）。

下面我们介绍常用的非函数的图像：圆和椭圆。

根据毕达哥拉斯定理，我们很容易想到以原点为圆心，半径为1的圆，他的表达式应该是 $x^2 + y^2 = 1$ ，也就是一个这样的点的轨迹，这个点到原点的距离始终为1（它的横纵坐标的平方和是 $1^2$ ），如图 1-17 所示。

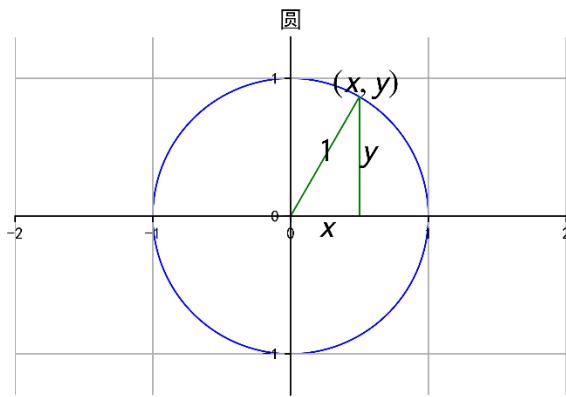


图 1-17 圆心在原点的单位圆图形

很容易想到，半径为  $r$  的圆心在原点的圆，其表达式是 $x^2 + y^2 = r^2$ 。

对于这个圆围成的实心圆形区域，可以用不等式表达 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 。

那么圆心不在原点呢？比如圆心在 $(x_0, y_0)$ 的圆，其表达式为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 。

对于这个圆围成的实心圆形区域，可以用不等式表达 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ 。

为了更清晰的说明任意表达式的图像平移、缩放、旋转变换的代数表达，我们在前文规则 1 的基础上，拓展在二维直角坐标系任意图形的表达式的平移缩放旋转变换规则。

### 【规则 17】二维直角坐标系上的图形变换

一个含有动点坐标（含变量 $x$ 、 $y$ ）信息的等式或不等式，其在二维直角坐标系上表达的图形，变换规则和对变量 $x$ 、 $y$ 的操作的对应关系如下：

向右平移 $x_0$ 距离（向左平移相当于向右平移 $-x_0$ ）：在所有 $x$ 减去平移量， $x - x_0$

向上平移 $y_0$ 距离（向下平移相当于向上平移 $-y_0$ ）：在所有 $y$ 减去平移量， $y - y_0$

以y轴为中心收缩 $a$ 倍（伸展相当于收缩 $\frac{1}{a}$ ）：给所有 $x$ 乘以收缩倍数， $ax$

以x轴为中心收缩 $b$ 倍（伸展相当于收缩 $\frac{1}{b}$ ）：给所有 $y$ 乘以收缩倍数， $by$

以原点为中心逆时针旋转角度 $\theta$ （顺时针旋转相当于逆时针旋转 $-\theta$ ）：

所有的 $x$ 变成： $x \cos \theta - y \sin \theta$

所有的 $y$ 变成： $x \sin \theta + y \cos \theta$

规则 17 的平移和缩放规则，和前文的规则 1 是完全类似的，这里多出了旋转变换的规则。这个旋转规则可以证明如下。如图 1-18 所示，假设 $v$ 的顶点是 $(x, y)$ ， $v$ 与 $x$ 轴正方向的夹角为 $\varphi$ ， $(x, y)$ 到原点的距离是 $r$ ，将 $v$ 逆时针旋转角度 $\theta$ 得到 $v'$ ， $v'$ 的顶点是 $(x', y')$ 。

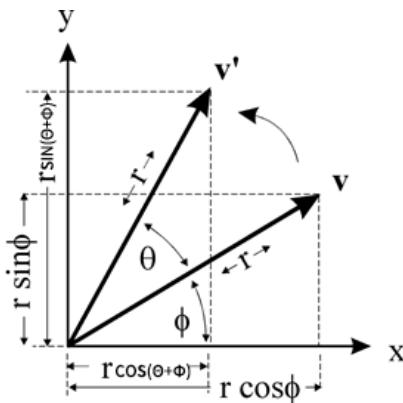


图 1-18 二维直角坐标系中旋转一定角度的坐标变化

根据图 1-18 所示，显然 $x = r \cos \varphi$ ， $y = r \sin \varphi$ ， $x' = r \cos(\theta + \varphi)$ ， $y' = r \sin(\theta + \varphi)$ 。将 $x'$ 和 $y'$ 的表达式按规则 13 的两角和公式展开，可得：

$$x' = r \cos(\theta + \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\theta + \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi = y \cos \theta + x \sin \theta$$

至此，我们就可以对二维直角坐标系内的任意图形，根据规则 17 进行平移、缩放、旋转。根据规则 17，我们对刚才单位圆的表达式进行变换，把它拉伸成椭圆，以y轴为中心沿x轴伸展 $a$ 倍，以x轴为中心沿y轴伸展 $b$ 倍，给 $x$ 和 $y$ 分别乘以 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$ （此处假设 $a > b > 0$ ），得到椭圆的表达式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，如图 1-19 所示（此处假设 $a = 1.8$   $b = 1.2$ ）。

根据图 1-19 画出的椭圆，我们标记两个点， $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 和 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 。如图，椭圆上任意一点 $(x, y)$ 到这两点的距离 $d_1$ 、 $d_2$ 可以按毕达哥拉斯定理（或更直接的“**两点间距离公式**”，即 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$ 两点间的距离 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ）写成 $\sqrt{(x^2 + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}$ 和 $\sqrt{(x^2 - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}$ 。根据之前得到的椭圆表达式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，可得 $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ 。将其代入距离 $d_1$

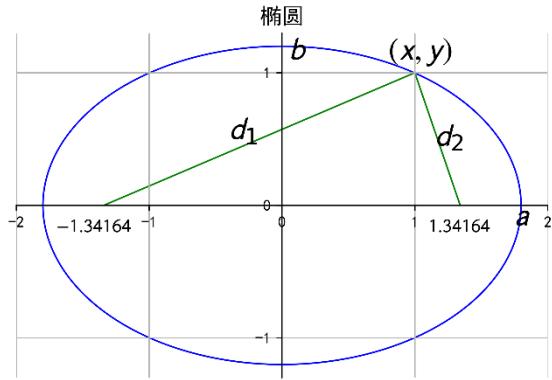


图 1-19 由单位圆拉伸得到的椭圆图形

的表达式，可得  $d_1 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 + 2\sqrt{a^2-b^2}x + a^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x + a)^2} = a + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$ 。同理可得： $d_2 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2\sqrt{a^2-b^2}x + a^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x - a)^2} = a - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$ 。所以  $d_1 + d_2 = 2a$ 。

由此可知，我们通过单位圆缩放得到的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ （此处假设  $a > b > 0$ ），可以在其长轴上找到关于椭圆中心对称的两点  $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$  和  $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ ，使椭圆上任意一点到这两点的距离之和为定值  $2a$ 。这也是椭圆的一种定义方法，即曲线上任意一点到两定点距离之和为定值的曲线。

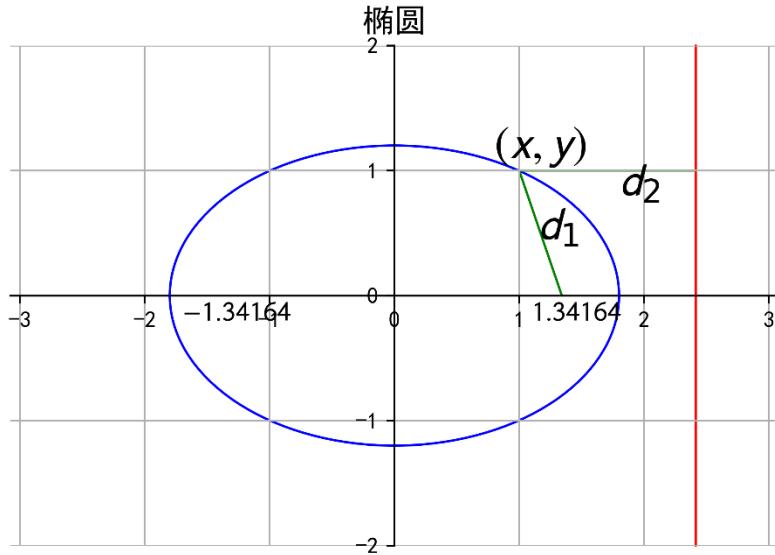


图 1-20 椭圆及其准线

我们再在同样的椭圆旁边寻找一条垂线  $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ，和前文的分析相同，我们容易得到此处  $d_1 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2\sqrt{a^2-b^2}x + a^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x - a)^2} = a - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$ ，而  $d_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} - x$ ，将  $d_1$ 、 $d_2$  相除并通分可得  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b^2}x}{a}}{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b^2}x}{\sqrt{a^2-b^2}}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 。如果遇到这条直线不是垂直与坐标轴的情况，计算距离可按“[点到直线的距离公式](#)”进行，即  $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ，其中直线是  $Ax + By + C = 0$ ，点是  $(x_0, y_0)$ ，它和之前介绍的两点间距离公式一样，可以由毕达哥拉斯定理证明。

由  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  可知，椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (此处假设  $a > b > 0$ )，可以找到一条与长轴垂直的直线  $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ，使椭圆上任意一点到点  $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  的距离比这椭圆上任意一点到这条垂线的距离为定值  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 。这也是椭圆的一种定义方法，即曲线上任意一点到一个定点与这任意一点到一条定直线的距离之比是一个小于1的正常数的曲线。基于这种曲线上任意一点到定点和定直线距离比值是定值的描述，我们可以定义一类曲线，不仅仅是椭圆。平面上，到定点的距离与到定直线的距离的比  $e$  是常数的点的轨迹我们称作**圆锥曲线** (conic section)。当  $0 < e < 1$  时为椭圆；当  $e = 1$  时为抛物线；当  $e > 1$  时为双曲线。这里的常数  $e$  称为圆锥曲线的**离心率**，定点称为**焦点**，定直线称为**准线**。焦点到曲线上一点的线段称为**焦半径**。之所以叫圆锥曲线，是因为这一类曲线是不同角度的平面与圆锥的锥面相交的交线，如图 1-21 所示，第一个图交线为抛物线，第二个图交线为圆和椭圆，第三个图交线为双曲线，可见与圆锥相交的平

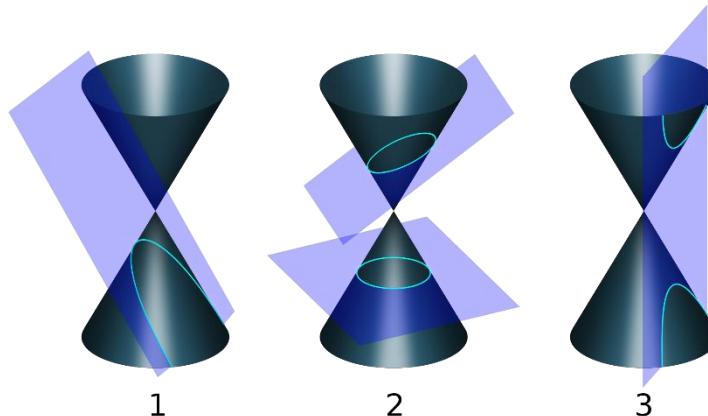


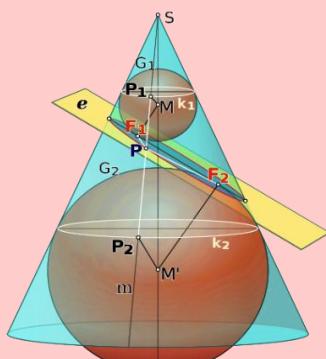
图 1-21 圆锥曲线

面和圆锥母线的角度比也和离心率有关。出生在法国的丹德林 (Germinal Pierre Dandelin) 证明了我们之前描述的确实是圆锥曲线。

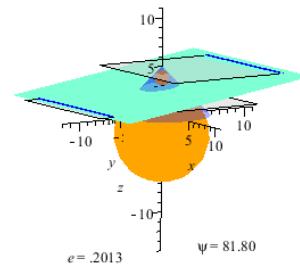
### 【几何意义示例】圆锥曲线的丹德林球 (冰淇淋筒定理)

平面上到定点的距离与到定直线的距离的比  $e$  是常数的点的轨迹就是平面与圆锥锥面相交的交线。

证明过程见 [https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin\\_spheres](https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres)



动画见本节示例代码



实际上，在笛卡尔坐标系里，一个有关 $x$ 、 $y$ 的二元二次方程总是能表示圆锥曲线。各圆锥曲线的方程、离心率、焦点准线距离等常用速算数据可以见下表总结：（**半焦距**指两焦点间距的一半，**半正焦弦**是过焦点最短的弦长度的一半，过焦点、平行于准线的直线与圆锥曲线相交于两点，此两点间的线段称为圆锥曲线的**通径**，物理学中又称为**正焦弦**。）

圆锥曲线	方程	离心率 ( $e$ )	半焦距 ( $c$ )	半正焦弦 ( $\ell$ )	焦点准线距离 ( $p$ )
圆	$x^2 + y^2 = a^2$	0	0	$a$	$\infty$
椭圆	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$
抛物线	$y^2 = 4ax$	1	—	$2a$	$2a$
双曲线	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

我们对照这个表格，重新看本节前面描述的抛物线和双曲线。当时描述的是函数图像，所以局限在图像用垂线相交只能有一个交点（自变量输入任何值，函数值都是唯一确定的）。实际上当初描述的一元二次函数和倒数函数，就是上表中抛物线和双曲线方程的标准形式旋转了一定角度，从而使它们是函数图像。可以通过规则 17 描述的旋转变换，将  $y^2 = 4ax$  旋转  $\frac{\pi}{2}$  成  $y = qx^2$ 、将  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  旋转  $\frac{\pi}{4}$  成  $y = \frac{q}{x}$ 。

### 【规则 18】圆锥曲线的常用特征

离心率相同的圆锥曲线都是相似图形。一个圆锥曲线，只要确定了离心率，形状就确定了。特别的，因为抛物线的离心率都等于1，所以所有的抛物线都是相似图形。函数图像分析时描述的开口大小和陡峭程度，都是针对某个固定的坐标尺度而言的。

Pappus 定理：圆锥曲线上一点的焦半径长度等于该点到相应准线的距离乘以离心率。（定义变形即得）

Pascal 定理：圆锥曲线的内接六边形，若对边两两不平行，则该六边形对边延长线的交点共线。

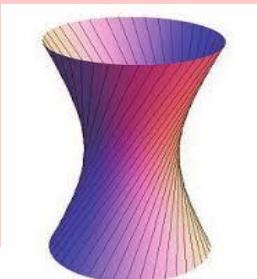
Brianchon 定理：圆锥曲线的外切六边形，其三条对角线共点。

### 【物理意义示例】抛物线和双曲线的应用

由抛物线绕其对称轴旋转，可得到一个叫做旋转抛物面的曲面。在这个轴上有一个具有奇妙性质的焦点，任何一条过焦点的直线由抛物面反射出来以后，都成为平行于轴的直线。这就是我们为什么要把探照灯反光镜做成旋转抛物面的道理。

由双曲线绕其虚轴旋转，可以得到单叶双曲面，它又是一种直纹曲面，

由两组母直线族组成，各组内母直线互不相交，而与另一组母直线却相交。



人们在设计高大的立塔（如冷却塔）时，就采取单叶双曲面的体形，既轻巧又坚固。

### 【物理意义示例】不同速度的天体被星球捕获成的运动轨迹（不同离心率的圆锥曲线）

假设某天体在距离星球一定距离时有垂直于引力方向的速度。

这个速度较慢时，会坠落到星球上；

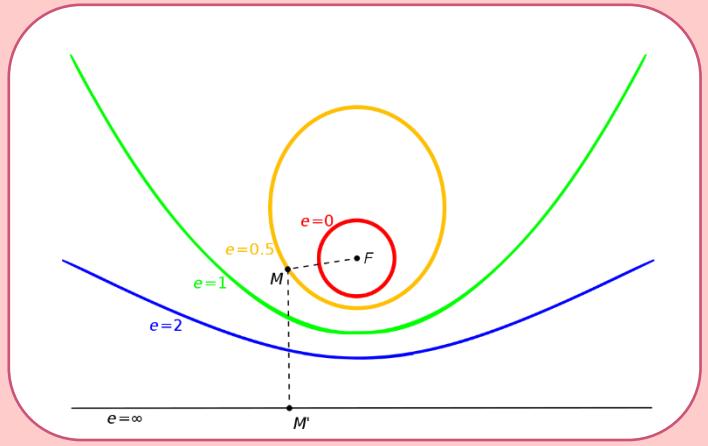
速度稍快些，会进行圆周运动；

速度再快些，轨道椭圆；

速度再快些，抛物线；

速度再快些，双曲线；

速度再快些，接近直线。



我们可以像前文定义椭圆那样，给双曲线也赋予多种定义。除了圆锥曲线的惯用形式比值离心率的定义，双曲线还可以描述为：曲线上任意一点到两定点距离之差为定值的曲线。基于其标准形式  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  和比值离心率定义，可以进行相关演算验证这种定义，具体计算方法和前文叙述椭圆部分的类似。

下面我们介绍**双曲函数**。我们可以将单位圆和三角函数的图 1-8 加入双曲线  $x^2 - y^2 = 1$ ，构造**双曲正弦** $y = \sinh x$ 、**双曲余弦** $y = \cosh x$ 、**双曲正切** $y = \tanh x$  等函数，如图 1-22 所示。

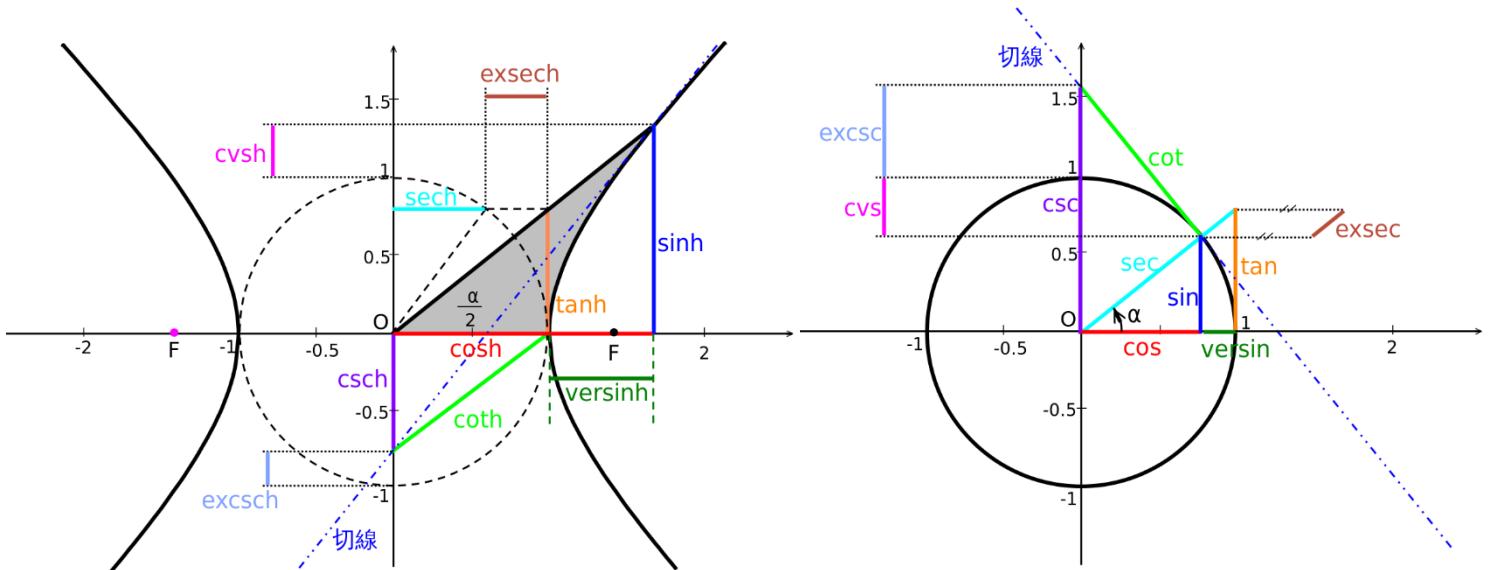


图 1-22 左图双曲函数在单位双曲线上表示，灰色部分面积为  $y = \frac{1}{x}$  双曲角的一半；右图三角函数在单位圆上表示

图中双曲函数的自变量是双曲角 $\alpha$ ，函数值为图中所示线段长度，类似图 1-8。值得注意的是，双曲角不是夹角角度，而是正比于图中灰色面积。

### 【物理意义示例】双曲余弦函数与悬链线

**悬链线** (Catenary) 是一种常用曲线，物理上用于描绘悬在水平两点间的因均匀引力作用向下弯的均匀软绳的形状，因此得名。表达式为： $y = \frac{a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})}{2}$  记为  $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ，其中  $x$  是自变量， $a$  是常量。

其也为初等函数。 $y = \cosh x$  称为**双曲余弦函数**。

奥古斯都·德·摩根（就是集合运算里摩根律那个摩根）在其 1849 年出版的教科书《Trigonometry and Double Algebra》中将三角学扩展到了双曲线。为了说明双曲函数的定义由来，我们回顾最简单的双曲线  $y = \frac{1}{x}$  的右上支图像，如前文图 1-3 所示的**蓝色部分**。 $y = \frac{1}{x}$  的渐近线是两个坐标轴，它们互相垂直，这个  $y = \frac{1}{x}$  被称为**直角双曲线**。根据规则 4 中的描述，我们可知  $y = \frac{1}{x}$  离原点最近的点为  $y = x$  上的  $(1, 1)$ ，它到原点的距离是  $\sqrt{2}$ ，我们按规则 17 中的旋转变换将其顺时针旋转  $\frac{\pi}{4}$ ，即可将其原来的对称轴  $y = x$  摆平到  $x$  轴上。然后再按规则 17 中的缩放变换，以  $y$  轴为中心沿  $x$  轴收缩  $\sqrt{2}$  倍，即可得到图 1-22 中所示的双曲线，它的表达式是  $x^2 - y^2 = 1$ ，我们称其为**单位双曲线**。

早期的研究不少是在倒数函数的图像上完成的，我们只要将其按上面的描述旋转并按需进行必要的缩放，就可以得到摆正的焦点在  $x$  轴上并且与单位圆相切的单位双曲线。反过来也是一样的，我们把图 1-22 中的双曲线旋转缩放回  $y = \frac{1}{x}$  的话，图中所示的双曲正弦和双曲余弦的长度就要伸展成原来的  $\sqrt{2}$  倍，如图 1-23 中所示。单位双曲线中双曲线扇形的面积（图 1-22 中的灰色部分）是对应双曲线  $y = \frac{1}{x}$  下**双曲角**的  $\frac{1}{2}\alpha$ 。

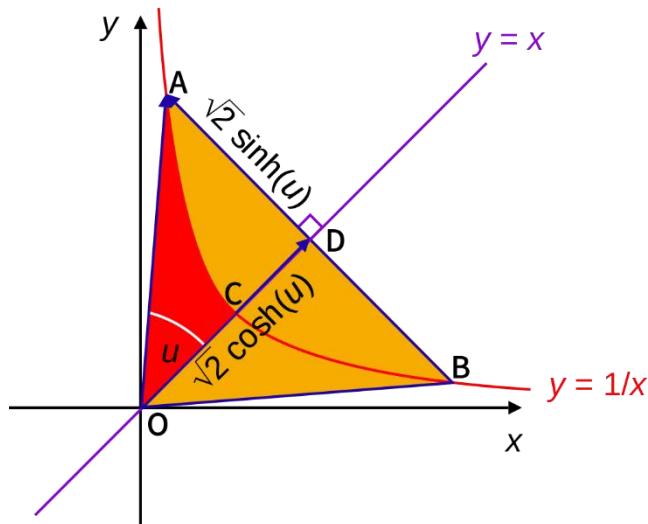


图 1-23 在  $y = \frac{1}{x}$  研究双曲函数

**双曲角**是指在笛卡尔坐标平面上，由原点(0,0)出发的两条射线与双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 相交处 $(x, \frac{1}{x})$ 及 $(1,1)$ 之间的角，标称这个双曲角的量级并不是圆弧度，而是围成的这个双曲线扇形的面积，这个量级就是 $\ln x$ 。

## 参考链接

1647 年格里高利将对数联系于双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的弓形面积，而牛顿给出自然对数的无穷级数大约在 1665 年  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A9goire\\_de\\_Saint-Vincent](https://en.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent)

在图 1-23 中， $u$ 就是双曲角，标称它的就是红色部分的双曲线扇形 $ACO$ 的面积，比如 $A$ 的坐标是 $(x_A, \frac{1}{x_A})$ ，那么 $u = \ln x_A$ ，反之 $x_A = e^u$ 。这个双曲角是有正负的，比如如果我们定义图中红色部分的双曲角 $CBA$ 是负的，那在 $y = x$ 另一侧对称的那个角 $COB$ 就是正的。因为 $B$ 的坐标是 $(\frac{1}{x_A}, x_A)$ ，双曲角 $COB$ 就是 $\ln \frac{1}{x_A} = -u$ ， $B$ 的横坐标就是 $e^{-u}$ 。根据图 1-23 中的几何关系，直线 $y = x$ 与 $x$ 轴正方向的夹角是 $\frac{\pi}{4}$ ，直线 $ADB$ 与其垂直， $A$ 、 $B$ 两点的横坐标分别为 $e^u$ 、 $e^{-u}$ ，可知 $AD = \frac{\sqrt{2}(e^u - e^{-u})}{2}$ 。再根据之前的分析与图 1-22 联系，可知 $\sqrt{2} \sinh u = AD = \frac{\sqrt{2}(e^u - e^{-u})}{2}$ ，故 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 。同理可得 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，再根据相似三角形的比例关系，可解得 $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 。所以，这些双曲函数也都是初等函数。

双曲函数定义式的另一种几何角度的具体推导，也可以参考如下链接，第一个链接提供了在没有积分知识也不知道 $\ln x$ 的情况下，用纯几何图形和双曲线的特征（同样用到了格里高利的书籍 Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni (Geometric work of squaring the circle and conic sections)中的结论）推导出双曲正弦和双曲余弦函数的含有自然对数函数底数 $e$ 的表达式，其思路具有较强的借鉴性，可以类比参考前文对“信息量”的定义。

## 参考链接

1891 年期刊 Messenger of Mathematics 中双曲正弦和双曲余弦定义式的几何导出 [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599484047\\_0020?tify=%22pages%22:\[150\],%22view%22:%22info%22}](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN599484047_0020?tify=%22pages%22:[150],%22view%22:%22info%22)

1647 年书籍 Geometric work of squaring the circle and conic sections 原版扫描  
<https://books.google.com/books?id=xMBhhRtpQsC&pg=PT35#v=onepage&q&f=false>

双曲函数的最初来源 悬链线研究 <https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>

<https://zh.wikipedia.org/wiki/悬链线>

有人自然会问，为什么要定义双曲角作为双曲函数的自变量，为什么不直接用图 1-23 里的 $x$ 作为自变量呢？为什么不直接用图 1-22 里的弧度角度作为自变量呢？我们观察到，二者主要的区别是计数的量级不同。针对这一点，我们介绍**坐标轴的函数变换**。

例如这里的双曲角，实际上就是一种对 $x$ 坐标的对数变换。如图 1-24，我们将原来的 $x$ 轴转换成 $m$ 轴， $m = \ln x$ ，原来在 $xy$ 平面上的直线 $y = x$ 变成了指数函数的样子。当我们使用原来的等距坐标，某些问题不便于观察和解决的时候，可以考虑坐标轴的函数变换。这里的坐标轴对数变换相当于将坐标刻度变成不等距的标称，坐标值越大，间隔越密集（例如图 1-24 的右图，如果在 $m$ 轴对应标出 $x$ 坐标，会发现它们是不等距的，越远离原点越密集）；相反的，如果进行坐标轴的指数变换，则坐标值越大，间隔越松散。

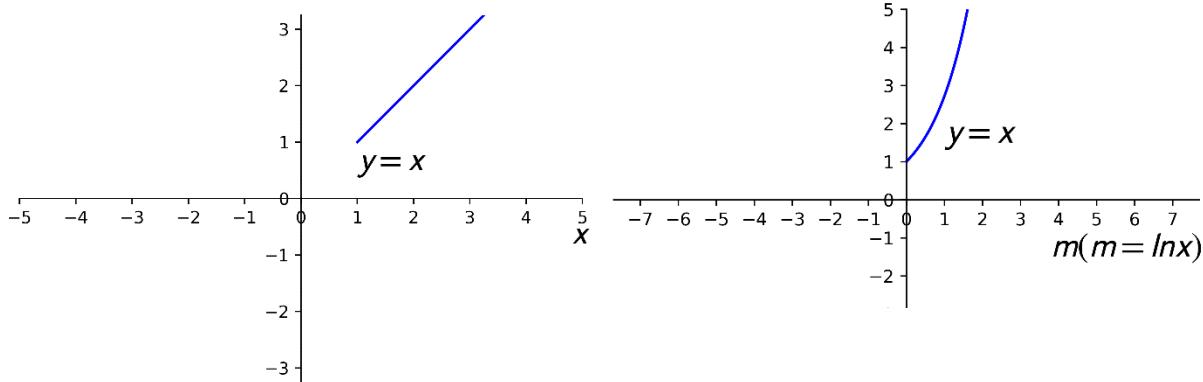


图 1-24 坐标轴的对数变换 函数 $y = x$ 在不等距坐标下的表达

实际上，在前文对图 1-23 进行讨论时，本质就是计数量级的变换，将 $x$ 坐标进行对数变换变成了 $u$ 坐标，和图 1-24 中 $x$ 轴变成 $m$ 轴是一样的。坐标轴的函数变换，代数运算本质上是一种函数复合。我们最常用的是 $x$ 轴或 $y$ 轴的对数变换，主要用于表达某些在等距坐标下不容易直观观察的图形。图 1-23 的讨论，双曲余弦的函数值如果输入 $x$ 进行计算，将 $x$ 直接作为自变量，函数形态是类似图 1-4 的一元一次加倒数函数，这种形态不便于说明解决当时的问题。双曲余弦这种表达最初是悬链线形态的研究中得到的，它的图像本身就是悬链线（悬在水平两点间的均匀引力作用下的软绳的形状）的形态。



如果不使用微积分方法，把悬链线近似的拆成平均间隔的有限个理想质点进行几何力学分析，然后寻找规律，用归纳法推广到无穷多个质点，就是悬链线。在有限个理想质点做几何力学分析时，不难发

现，这些质点沿重力方向垂直投影到水平线上，分布是越靠近两端越密集的，而如果得到了每个质点所处高度关于质点计数的函数表达，显然是无法直接说明悬链线本身形态的，必须设法在质点水平位置和其所处高度之间建立联系，坐标轴的函数变换（或类似的图形分析方法）是微积分还不流行的时代解决问题的重要方法之一。处在不同的历史时期，解决同样的问题可能会有截然不同的思路。在成熟的计算机工具广泛应用的今天，从一个几何图形拟合出一个函数表达已经是易如反掌的事情，但我们强大的工具和算法都是以前人积累的分析结果为基础进行构建的。凡事求鱼不如求渔，理解历史并把握方法创造的本质，很多时候比获得单纯的问题结果更重要。

如同当 $\alpha$ 遍历实数集 $\mathbb{R}$ 时，点 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的轨迹是一个圆 $x^2 + y^2 = 1$ 一样，当 $\alpha$ 遍历实数集 $\mathbb{R}$ 时，点 $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ 的轨迹是单位双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右半边。这是因为有以下的恒等式： $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ ，参数 $\alpha$ 不是圆角而是双曲角，它表示 $x$ 轴、连接原点与双曲线上点 $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ 的直线、单位双曲线三者所围成面积的两倍。这种用一个参数 $\alpha$ 来遍历出曲线的方式，分别写出的 $x$ 、 $y$ 关于 $\alpha$ 的表达式，称作曲线的**参数方程**。

我们可以用老套路，绘制**双曲正弦** $y = \sinh x$ 、**双曲余弦** $y = \cosh x$ 、**双曲正切** $y = \tanh x$ 的函数图像，如图 1-25 所示，进而结合图像和前文所述，总结它们的图像特征。

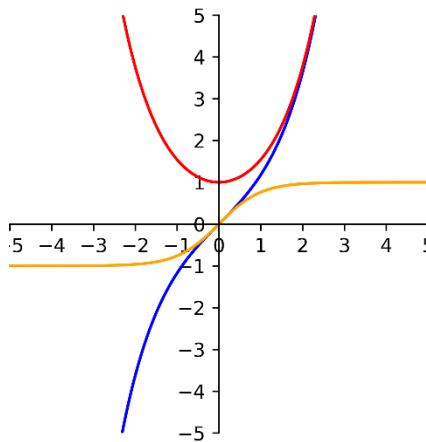


图 1-25 常见的双曲函数图像

### 【规则 19】常见双曲函数的图像特征

$y = \sinh x$ （双曲正弦函数）对称中心 $(0,0)$ ，它是奇函数。

第一象限接近 $y = \frac{1}{2}e^x$ ，第三象限接近 $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ 。

$y = \cosh x$ （双曲余弦函数）对称轴 $x = 0$ ，它是偶函数。

第一象限接近 $y = \frac{1}{2}e^x$ ，第二象限接近 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 。

$y = \tanh x$ （双曲正切函数）对称中心 $(0,0)$ ，它是奇函数。

第一象限接近 $y = 1$ ，第三象限接近 $y = -1$ 。

双曲正弦函数和双曲正切函数在经过 $x$ 轴时，其陡峭程度与 $y = x$ 相同。

### 【规则 20】常见双曲函数的升降幂公式

由于双曲函数和三角函数之间的对应关系，双曲函数的恒等式和三角函数的恒等式之间也是一一对应的。对于一个已知的三角函数恒等式（诱导公式等相位变换除外），只需要将其中的三角函数转成相应的双曲函数，并将含有有两个 $\sinh$ 的积的项（包括 $\coth^2 x$ 、 $\tanh^2 x$ 、 $\sinh^2 x$ 、 $\cosh^2 x$ 、 $\sinh x \sinh y$ ）转换正负号，就可得到相应的双曲函数恒等式。

双曲函数和三角函数是有很多对应的，不仅仅表现在规则 20 所述的代数形式对应。

如图 1-22 的左右两部分所示，左右给定相同的 $\alpha$ （就像前文描述参数方程时那样），在单位圆和单位双曲线上，双曲函数与三角函数有如下的对应关系：

**正弦**同样是从 $x$ 轴到曲线的半弦。

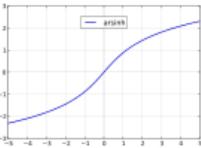
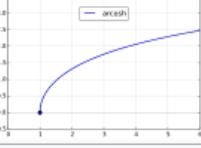
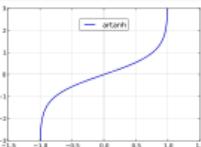
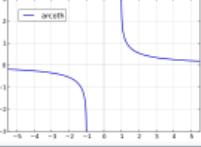
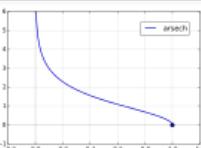
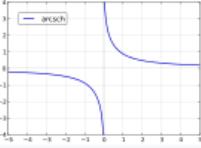
**余弦**同样是从 $y$ 轴到曲线的半弦。

**正切**同样是过(1,0)在曲线上的切线到终边的长度。

**余割**同样是 $y$ 轴与过终边和曲线交点的切线与 $y$ 轴的交点和原点之距离。

三角函数角的量值可以任意实数，但 $\alpha$ 实际位置上只会介于 0 到 $2\pi$ 之间，其余是 $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 中其他和 $\alpha$ 位置相同的角度，循环保着圆旋转，故三角函数可以有周期；双曲角的量值可以任意实数，且位置各不相同，故无法如三角函数一样有周期性。

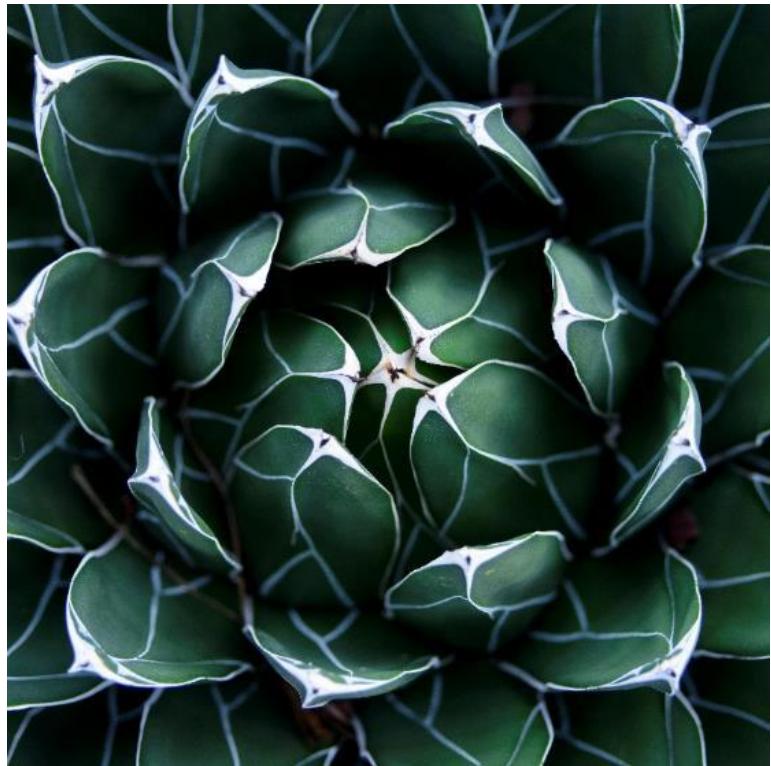
常见的双曲函数，除了双曲余弦函数这种以外，其他可以直接在定义域上取反函数。双曲余弦函数是偶函数，定义域上取反不是函数，所以提到反双曲余弦函数，我们通常只在双曲余弦函数的正值区间求反。双曲函数的反函数（**反双曲函数**）可以参考下表：

名称	常用符号	定义	定义域	值域	图像
反双曲正弦	$y = \text{arsinh}x$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
反双曲余弦	$y = \text{arcosh}x$	$\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
反双曲正切	$y = \text{artanh}x$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	
反双曲余切	$y = \text{arcoth}x$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	
反双曲正割	$y = \text{arsech}x$	$\ln\left(\frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$	$(0, 1]$	$[0, +\infty)$	
反双曲余割	$y = \text{arcsch}x$	$\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{ x }\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	

至此，我们描述完了常见的初等函数及其特征。回顾本节：函数、常见运算、函数复合、函数的单调性、初等函数、笛卡尔坐标系、右手定则、在 JupyterLab 快速绘制一元二元函数图形、函数的图形变换、一元一次函数、一元二次函数、倒数函数、一元一次加倒数函数、函数的奇偶性及其运算特征、函数图像对称性的代数表达、幂函数、手工绘制幂函数草图、指数函数、自然对数的底数 e、对数函数、指数对数函数的换底收缩、三角函数、函数的周期性、余弦定理和勾股定理、常用的三角函数公式、反三角函数、常用的反三角函数公式、二维直角坐标系上任意图形的平移缩放旋转、圆和椭圆、圆锥曲线及其常用概念、双曲函数及其定义式推导、参数方程、常用的双曲函数公式、反双曲函数，以及路过的物理和几何意义示例。

# 第1节 累加、积分、无穷、极限、导数、差分

待续。



## 我们的世界是虚拟的

活得有趣一点吧，难得来一趟。

庄生晓梦迷蝴蝶

望帝春心托杜鹃