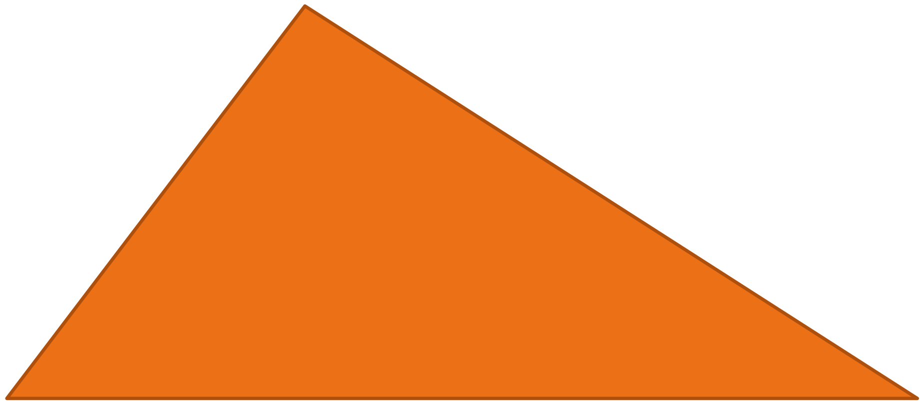
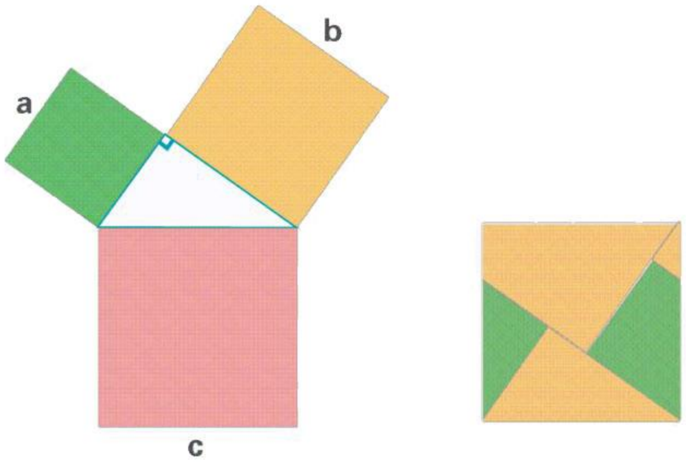
三角

变化的三角形蕴含着丰富的基本原理



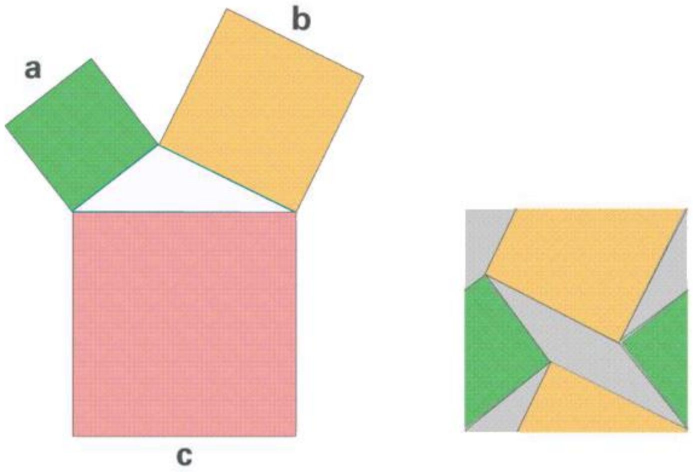
毕达哥拉斯定理和余弦定理 （公元前3世纪左右的几何原本 确切时间不详 有争议）

$c^2 = a^2 + b^2$



$c^2 = a^2 + b^2$

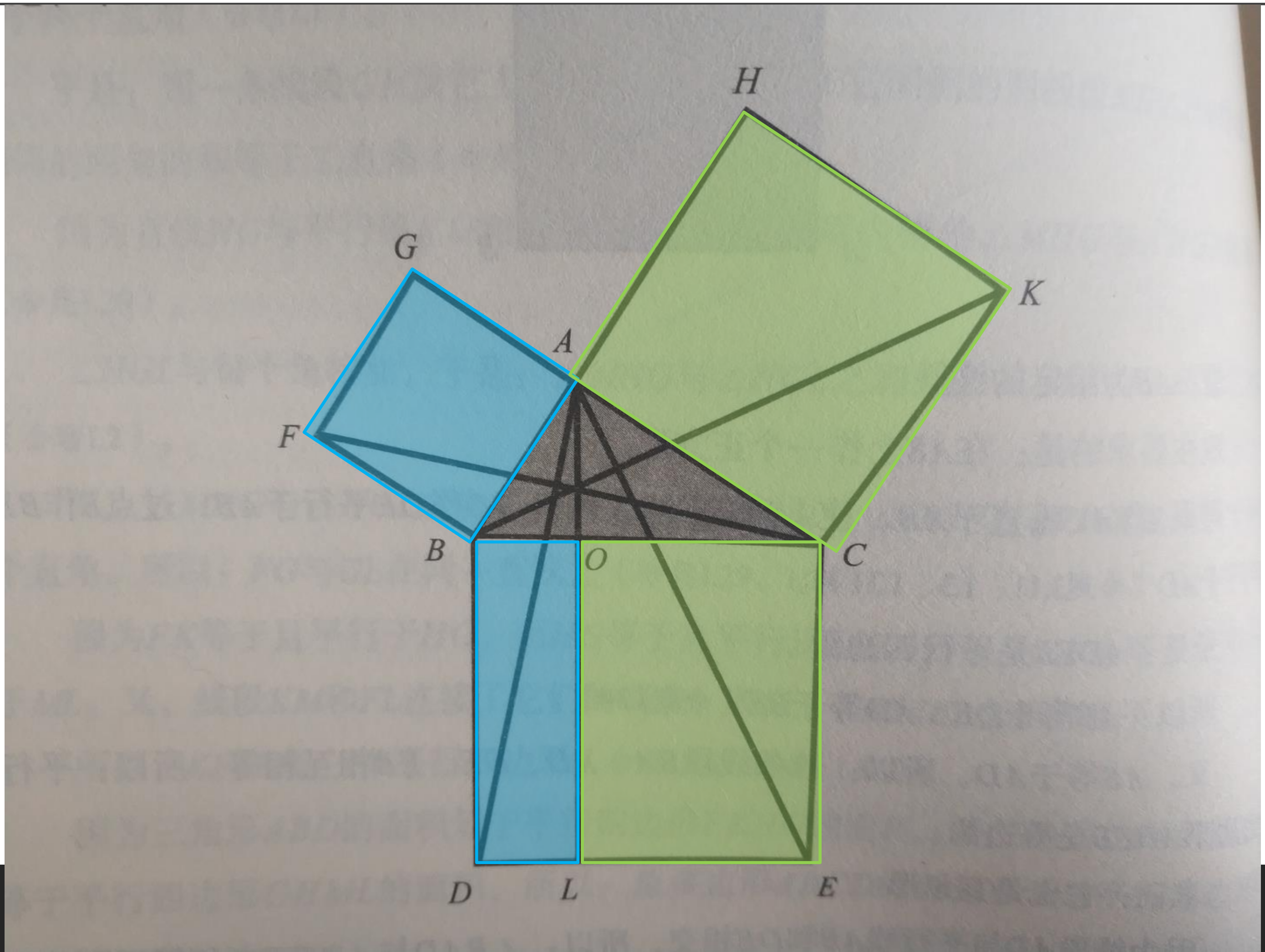
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

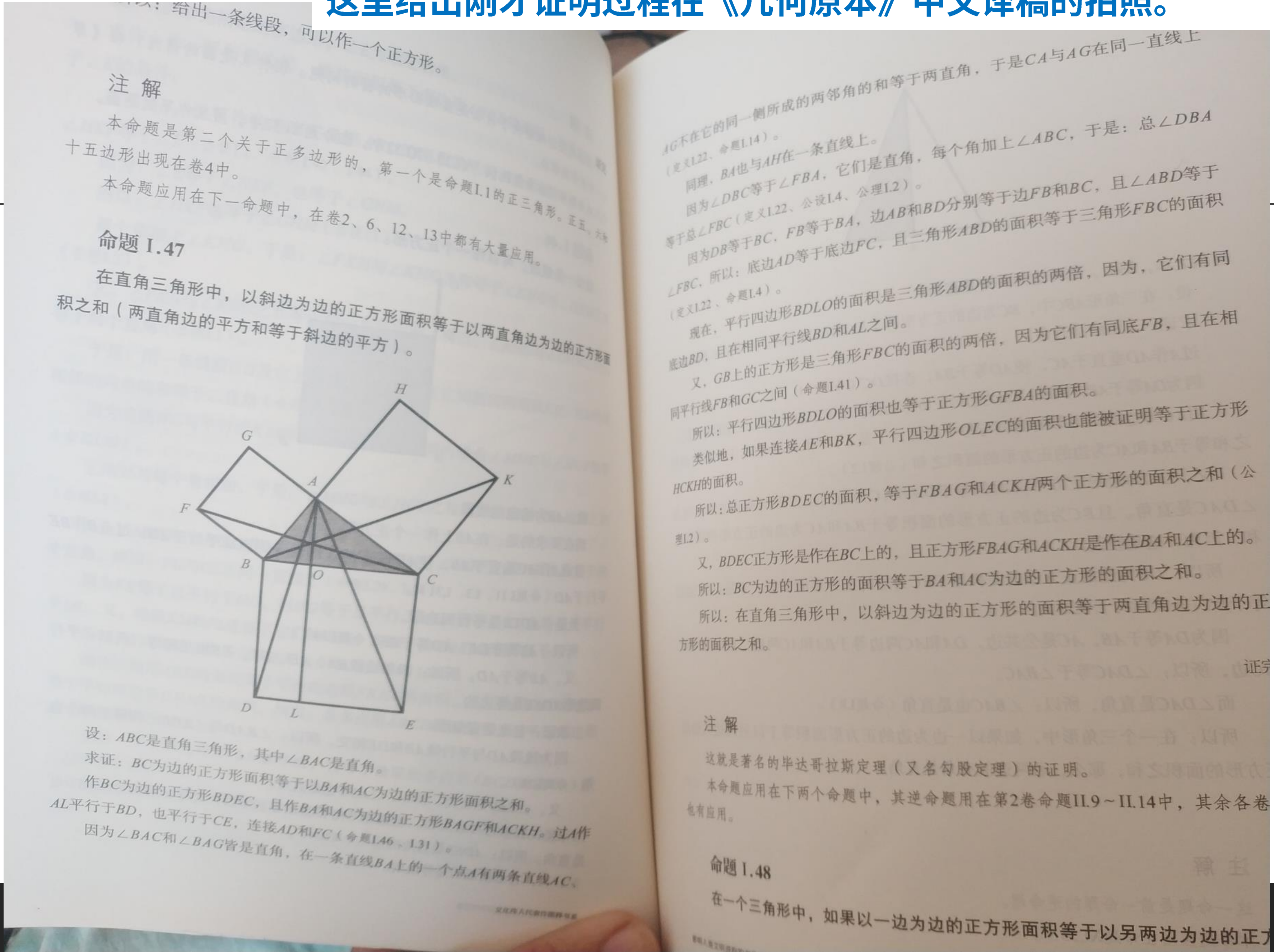
Vat. gr. 190

几何原本中的毕达哥拉斯定理证明



中文译稿拍照

为了方便大家在拿到课件的时候容易阅读，
这里给出刚才证明过程在《几何原本》中文译稿的拍照。



以：给出一条线段，可以作一个正方形。

注 解

本命题是第二个关于正多边形的，第一个是命题I.1的正三角形。正五、六
十五边形出现在卷4中。

本命题应用在下一命题中，在卷2、6、12、13中都有大量应用。

命题 I.47

在直角三角形中，以斜边为边的正方形面积等于以两直角边为边的正方形面积之和（两直角边的平方和等于斜边的平方）。

设：ABC是直角三角形，其中$\angle BAC$是直角。

求证：BC为边的正方形面积等于以BA和AC为边的正方形面积之和。

作BC为边的正方形BDEC，且作BA和AC为边的正方形BAGF和ACKH。过A作AL平行于BD，也平行于CE，连接AD和FC（命题I.46、I.31）。

因为$\angle BAC$和$\angle BAG$皆是直角，在一条直线BA上的一个点A有两条直线AC、AG不在它的同一侧所成的两邻角的和等于两直角，于是CA与AG在同一直线上（定义I.22、命题I.14）。

同理，BA也与AH在一条直线上。

因为$\angle DBC$等于$\angle FBA$，它们是直角，每个角加上$\angle ABC$，于是：总$\angle DBA$等于总$\angle FBC$（定义I.22、公设I.4、公理I.2）。

因为DB等于BC，FB等于BA，边AB和BD分别等于边FB和BC，且$\angle ABD$等于$\angle FBC$，所以：底边AD等于底边FC，且三角形ABD的面积等于三角形FBC的面积（定义I.22、命题I.4）。

现在，平行四边形BDLO的面积是三角形ABD的面积的两倍，因为，它们有同底边BD，且在相同平行线BD和AL之间。

又，GB上的正方形是三角形FBC的面积的两倍，因为它们有同底FB，且在相同平行线FB和GC之间（命题I.41）。

所以：平行四边形BDLO的面积也等于正方形GFBA的面积。

类似地，如果连接AE和BK，平行四边形OLEC的面积也能被证明等于正方形HCKH的面积。

所以：总正方形BDEC的面积，等于FBAG和ACKH两个正方形的面积之和（公理I.2）。

又，BDEC正方形是作在BC上的，且正方形FBAG和ACKH是作在BA和AC上的。

所以：BC为边的正方形的面积等于BA和AC为边的正方形的面积之和。

所以：在直角三角形中，以斜边为边的正方形的面积等于两直角边为边的正方形的面积之和。

证完

注 解

这就是著名的毕达哥拉斯定理（又名勾股定理）的证明。

本命题应用在下两个命题中，其逆命题用在第2卷命题II.9～II.14中，其余各卷也有应用。

命题 I.48

在一个三角形中，如果以一边为边的正方形面积等于以另两边为边的正

作为一元运算的三角关系/三角函数 (表格中的六种三角关系最早出现在10世纪波斯)

各常见三角函数的定义（自变量输入为∠A的弧度，即θ） **本书中截图**

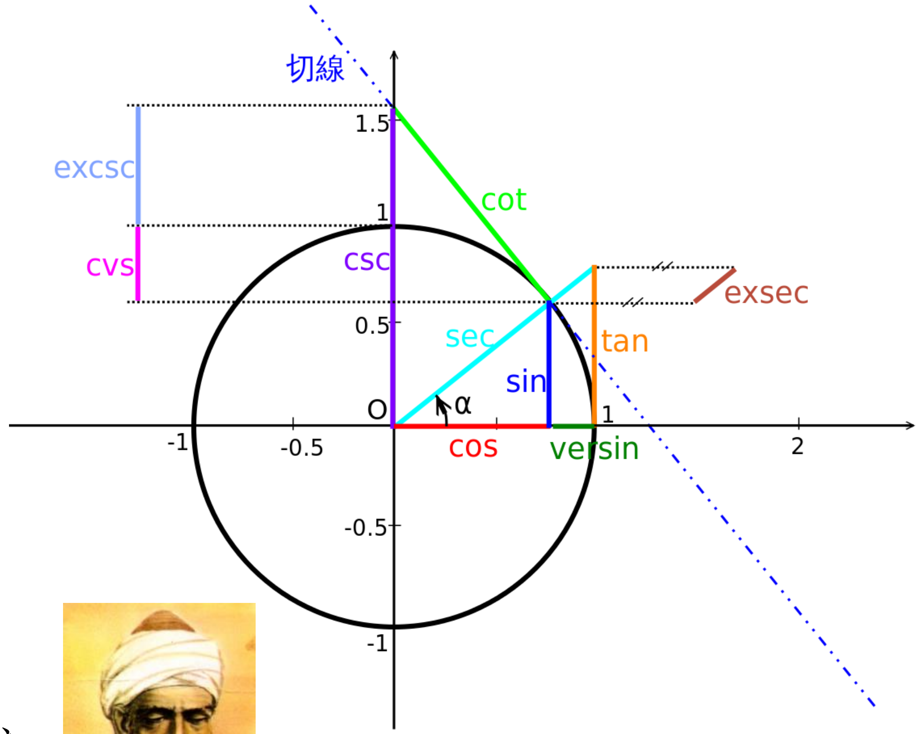
函数名称	英文名称	数学缩写	函数值运算（输出）	函数值运算的描述
正弦	sine	*sin*	*a/c*	∠A的对边比斜边
余弦	cosine	*cos*	*b/c*	∠A的邻边比斜边
正切	tangent	*tan*或*tg*或*tang*	*a/b*	∠A的对边比邻边
余切	cotangent	*cot*或*ctg*	*b/a*	∠A的邻边比对边
正割	secant	*sec*	*c/b*	∠A的斜边比邻边
余割	cosecant	*csc*或*cosec*	*c/a*	∠A的斜边比对边

$\tan\alpha : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha\,;$

$\cot\alpha : 1 = \cos\alpha : \sin\alpha\,;$

$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha\,;$

$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha.$

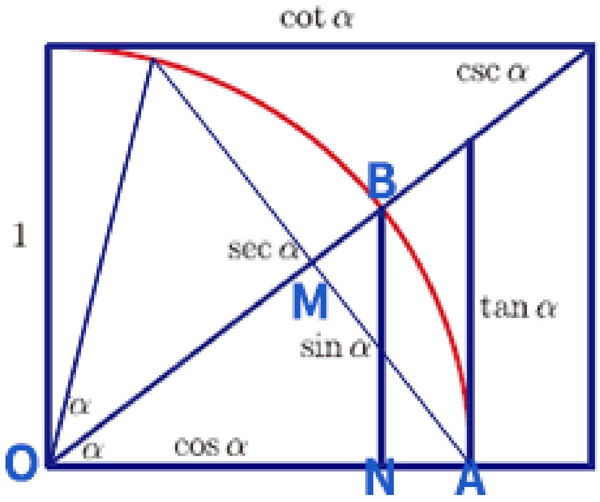


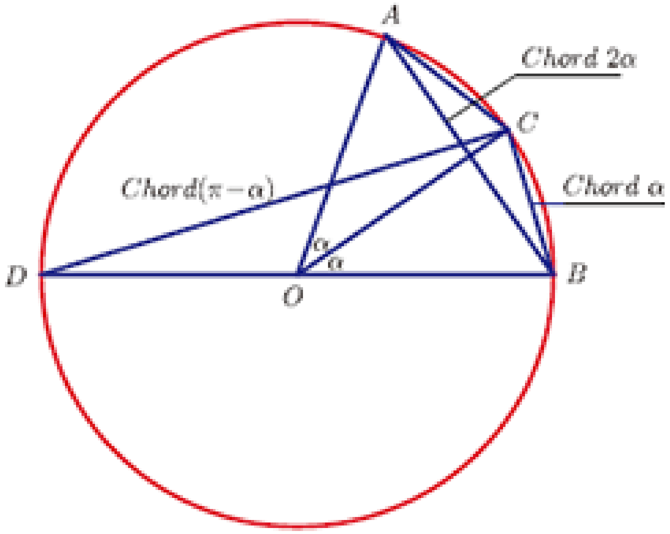
Abu al-Wafa‘ Buzjani 还包括两角和、二倍角公式

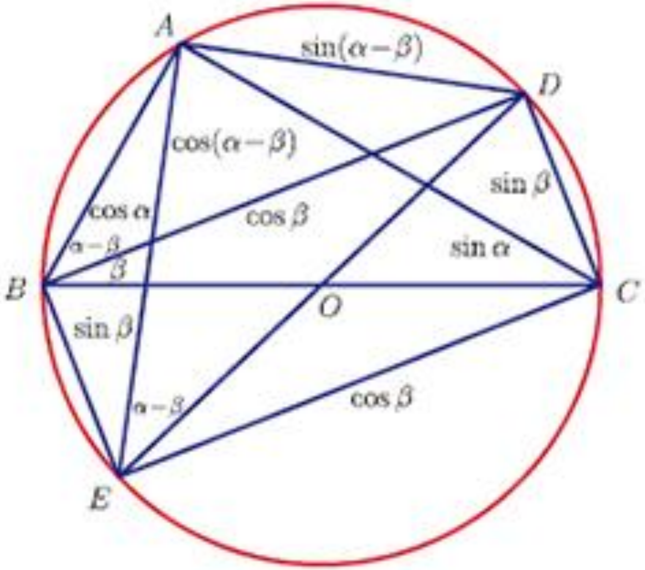
ابوالوفا بوزجانی 我们暂且称他为 阿布韦发

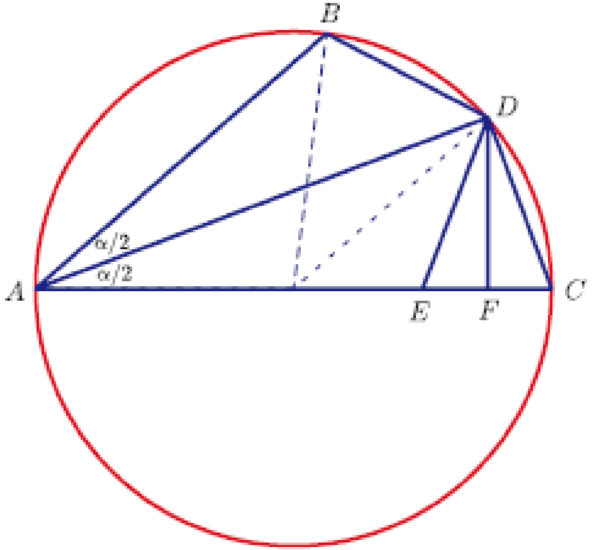
阿布韦发时代的三角关系线段图

每隔15′的正弦和正切表









公元10世纪的波斯
就有这样的算法

$$\frac{2R - Chord(180^\circ - 2\alpha)}{Chord\ \alpha} = \frac{Chord\ \alpha}{R}$$

$$\frac{Chord\ 2\alpha}{Chord\ \alpha} = \frac{Chord(180^\circ - \alpha)}{R}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

天文加减术 维纳积化和差公式 韦达和差化积公式

1436~1476

Johann Müller

Johannes Regiomontanus

1468~1522

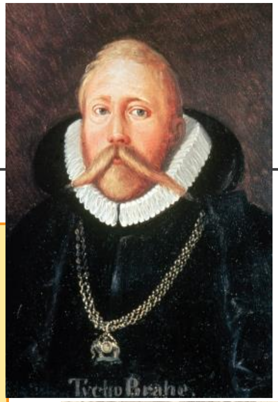
Johannes Werner

维纳公式 $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\ \right]$

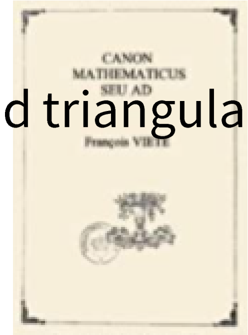
弟谷公式 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\ \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\ \right]$

1546~1601

Tycho Brahe



Canon mathematicus seu ad triangula



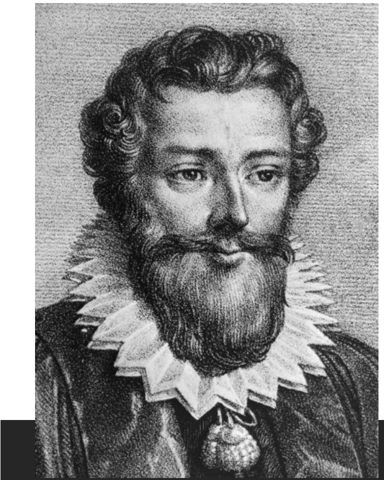
韦达和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$



☆François Viète 1540~ 1603

新代数学符号开创者 韦达

成功解出了弗兰德数学家罗曼努斯(Adrianus Romanus, 1561~1615)于1593年提出的45次方程

John Napier

1550~ 1617

Joost Bürgi

1552 ~ 1632

我们本回主人公 韦达 当年轻松解出的问题
弗兰德（今属比利时）数学家罗曼努斯的解方程挑战

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+111150x^{37}-740459x^{35}+3764565x^{33}-14945040x^{31}+469557800x^{29}+483841800x^{21}$$
$$-488494125x^{19}+384942375x^{17}-232676280x^{15}+105306075x^{13}-34512074x^{11}+7811375x^{9}-1138500x^{7}+95634x^{5}-3795x^{3}+45x=C$$

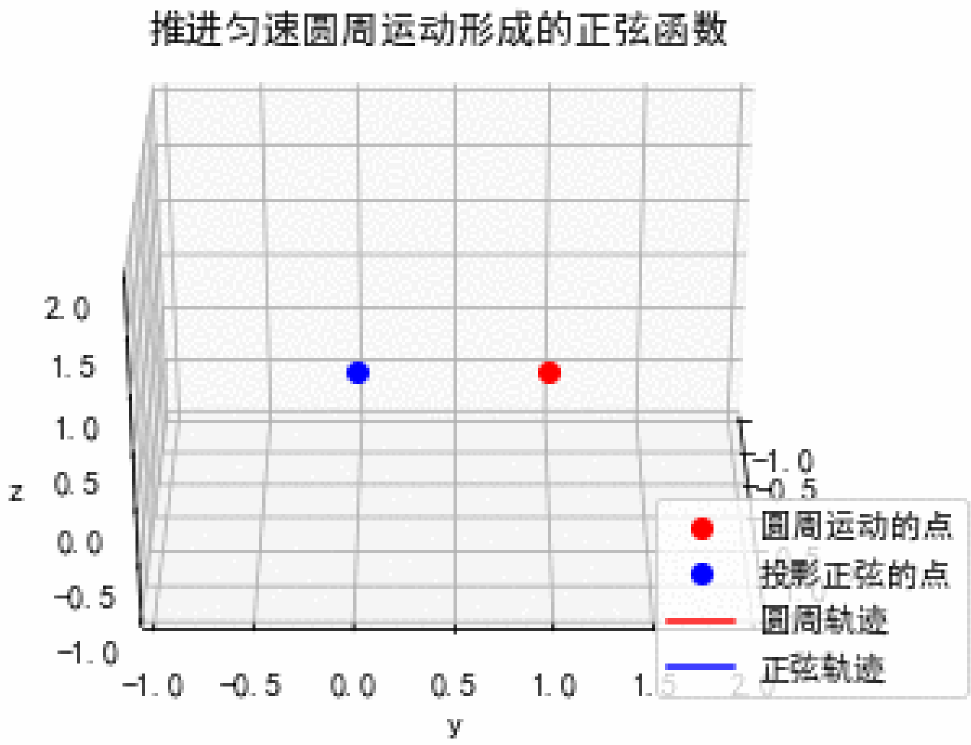
其中C 是个已知数，特别地，他要求给出一个当 $C=\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$ 时的解。

韦达已经知道并能运用n 的正弦和余弦公式（n 为任意整数）。他意识到方程左边是$2\sin 45\alpha$ 的表达式，而后者可用$2\sin\alpha$ 表示。

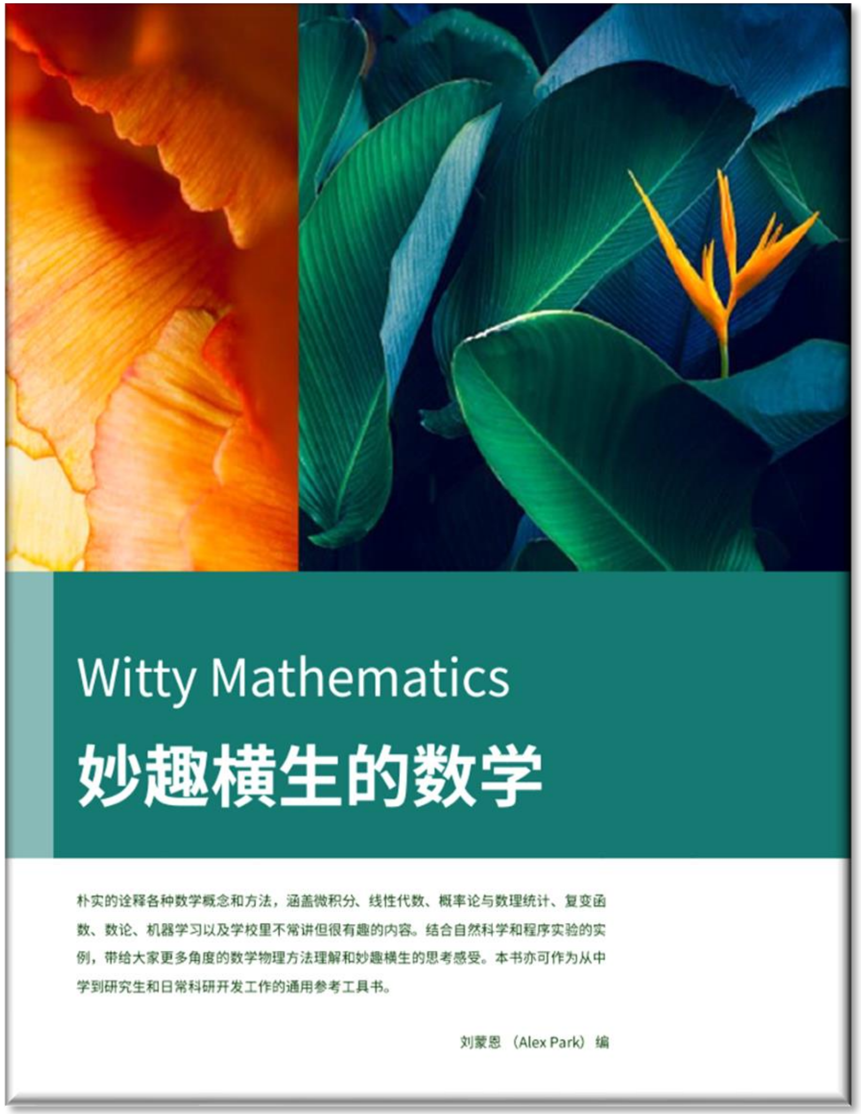
韦达求解 使得 $2\sin 45\alpha=C$ 的α 值，即得原方程在罗曼努斯要求情况下的解。

你是不是和我一样震惊，韦达居然能一眼看出正弦的45倍角公式，这在我们熟知切比雪夫多项式的情况下都算是一种强力基本功

几何-代数-今天工程中的积分变换 三角无处不在



更加丰富有趣的内容，请参考本书



Witty Mathematics

妙趣横生的数学

朴实的诠释各种数学概念和方法，涵盖微积分、线性代数、概率论与数理统计、复变函数、数论、机器学习以及学校里不常讲但很有趣的内容。结合自然科学和程序实验的实例，带给大家更多角度的数学物理方法理解和妙趣横生的思考感受。本书亦可作为从中学到研究生和日常科研开发工作的通用参考工具书。

刘蒙恩（Alex Park）编

https://github.com/kastaineibum/WittyMathematics

与本视频不同角度的思路，知识细节更完整

由浅入深顺序介绍各种数学概念，轻松入门上手

大量程序示例源码，强大的计算机辅助分析理解

历史人物、物理和几何意义，来龙去脉

一同感受数学表达背后魅力无穷的方法论

感谢各位的支持 ♥ ♥ ♥

打赏的朋友会一一记录，未来择机回报

PayPal付款链接

paypal.me/alexparkmz

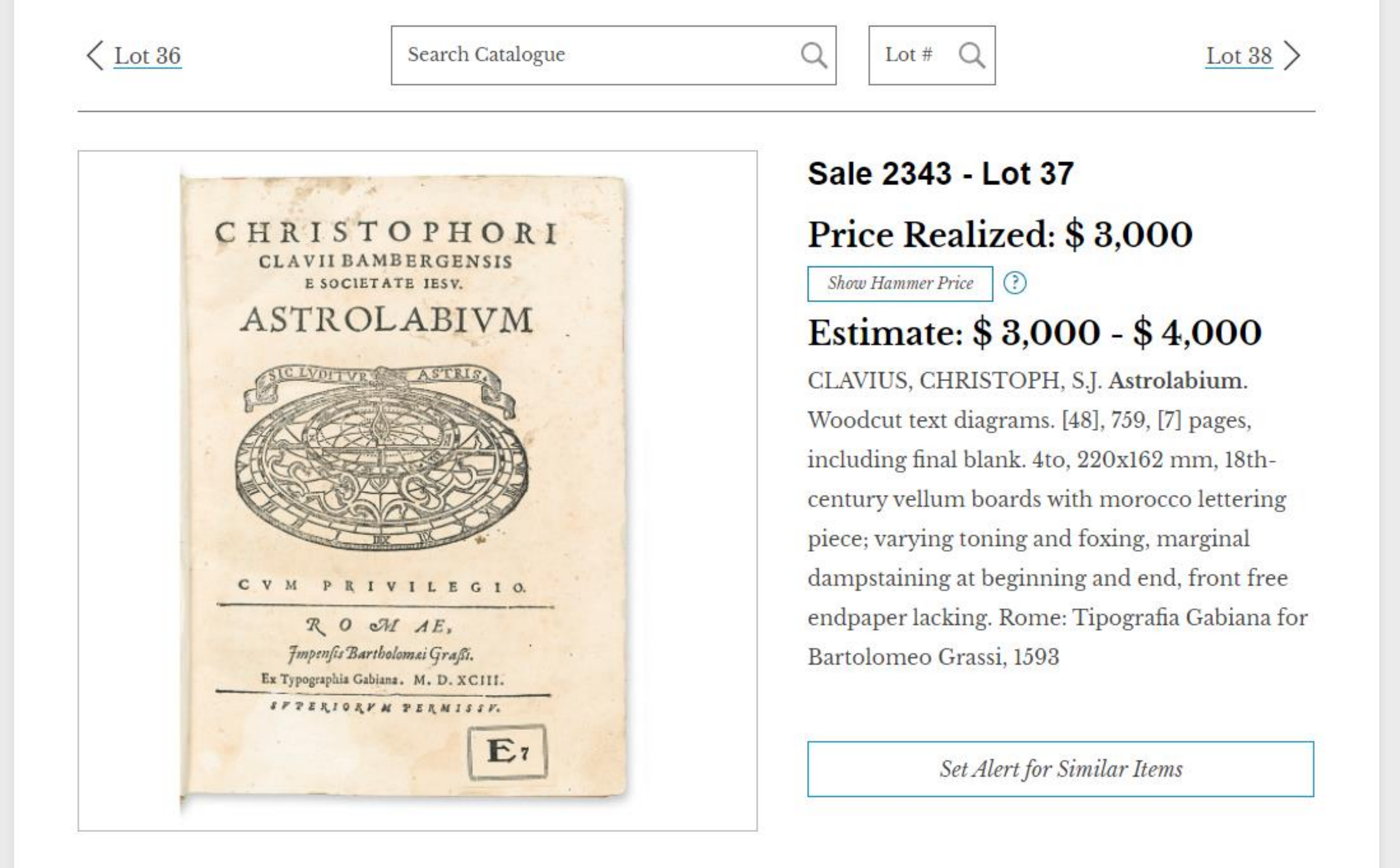
Alex-栗子树科技(**恩)

打开微信扫一扫

豆包柠檬树(**恩)

打开支付宝[扫一扫]

阿斯特罗拉biu木~
这本书想看看但是好贵。。。



CHRISTOPHORI
CLAVII BAMBERGENSIS
E SOCIETATE IESV.
ASTROLABIVM

SIC LVDITVR ASTRIS

CVM PRIVILEGIO.

ROMAE,
Impenſis Bartholomæi Graſſi.
Ex Typographia Gabiana. M. D. XCIII.
SVPERIORVM PERMISSV.

E7

Sale 2343 - Lot 37

Price Realized: $ 3,000

Estimate: $ 3,000 - $ 4,000

CLAVIUS, CHRISTOPH, S.J. **Astrolabium.** Woodcut text diagrams. [48], 759, [7] pages, including final blank. 4to, 220x162 mm, 18th-century vellum boards with morocco lettering piece; varying toning and foxing, marginal dampstaining at beginning and end, front free endpaper lacking. Rome: Tipografia Gabiana for Bartolomeo Grassi, 1593