Изучаем ТеорВер Stepic

28 августа 2018 г.

1 Элементарная теория вероятностей: случайные события

1.1 Обзор

1.2 Вероятностная модель эксперимента

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующих испытаний:

- производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10: 11
- три раза подбрасывается игральная кость: 6*6*6=216
- наудачу извлекается одна кость из полной игры домино: 28

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующего испытания: производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10, а затем столько раз кидается игральная кость, сколько очков выбито на мишени.

Возможные исходы:

- выстрел в "молоко" - кубик не подбрасывается - количество исходов 1
- выстрел в "1" - кубик подбрасывается 1 раз - количество исходов 6

- выстрел в "2" - кубик подбрасывается 2 раза - количество исходов 6^2
- выстрел в "3" - кубик подбрасывается 3 раза - количество исходов 6^3
- выстрел в "4" - кубик подбрасывается 4 раза - количество исходов 6^4
- выстрел в "5" - кубик подбрасывается 5 раз - количество исходов 6^5
- выстрел в "6" - кубик подбрасывается 6 раз - количество исходов 6^6
- выстрел в "7" - кубик подбрасывается 7 раз - количество исходов 6^7
- выстрел в "8" - кубик подбрасывается 8 раз - количество исходов 6^8
- выстрел в "9" - кубик подбрасывается 9 раз - количество исходов 6^9
- выстрел в "10" - кубик подбрасывается 10 раз - количество исходов 6^{10}

Тогда всего элементарных событий $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 + 6^7 + 6^8 + 6^9 + 6^{10} = \sum_{i=0}^{10} 6^i = \dfrac{6^{11} - 1}{6 - 1} = 72559411$

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит каждое из следующих случайных событий:

- сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна пятнадцати: (элементарное событие — появление пары однозначных чисел (m,n)) Ответ: 4, события (6,9),(7,8),(8,7),(9,6)
- наудачу выбранная кость из полной игры домино оказалась дублем (элементарное событие — появление кости m:n) Ответ: 7
- наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из листков календаря) Ответ: 11

1.3 Вероятностное пространство

Задача

Студент, изучающий теорию вероятностей, раздобыл отрывной календарь за 2018 год и вырвал в нем наугад одну страницу. Найдите вероятность того, что число на вырванном листке

- кратно шести: $\frac{59}{365}$
- равно 30: $\frac{11}{365}$

Задача

У кривого игрального кубика грани помечены числами от 1 до 6, а вероятность выпадения грани пропорциональна написанному на ней числу. Событие A означает, что выпало число, меньшее пяти; событие B означает, что выпало нечетное число. Найдите вероятности следующих событий:

- $A \cap B$: $\frac{4}{21}$
- $A \cup B$: $\frac{15}{21}$
- $A \setminus B$: $\frac{6}{21}$

Обозначим x - вероятность выпадения "1". Тогда вероятность выпадения "2" - $2x$, "3" - $3x$, "4" - $4x$, "5" - $5x$, "6" - $6x$. Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1, следовательно $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$ и $x = \frac{1}{21}$.

Задача

Пусть события A и B имеют вероятности 0,5 и 0,7 соответственно. Найдите

- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 1.0
- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 0.7
- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.5

- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.2

Задача

Отметьте верные утверждения. Во всех утверждениях A и B означают случайные события.

- если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$: верно
- $P(A \cap B)$ всегда меньше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cap B)$ может быть больше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: верно
- $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$: верно
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) \ - P(B)$: верно
- событие $P(A \cup B)$ означает, что произошли оба события A и B: верно
- если $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: верно

1.4 Немного комбинаторики

Задача

В урне лежат 9 белых шаров и 5 черных. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найдите вероятности следующих событий

- Извлеченные шары одного цвета: $\dfrac{46}{91}$
- Извлеченные шары разных цветов: $\dfrac{45}{91}$

Задача

На карточках написаны все трехзначные числа, каждое по одному разу. Сколькими способами можно выбрать три карточки с четной суммой.

Сумма будет чётной, если все три карточки чётные или одна чётная и две нечётные. Всего карточек 900 (100...999). Чётных и нечётных ровно половина. Тогда три чётных карточек можно выбрать $\binom{450}{3} =$

$\dfrac{450*449*448}{3*2} = 15086400$ способами. Одну чётную и две нечётных карточек можно выбрать $\binom{450}{1}\binom{450}{2} = 45461250$ способами. Всего $15086400 + 45461250 = 60547650$ способов.

Задача

В чемпионате России по футболу участвует 16 команд. Назовем итоги двух первенств похожими, если в них совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей; команды занявшие четвертые места (они получают право играть в европейских кубках), команды занявшие 13-е места, команды занявшие 14-е места (эти команды играют стыковые матчи); а также команды напрямую покидающие премьер-лигу (т.е. команды, занявшие последнее и предпоследнее места). Сколько существует попарно непохожих итогов чемпионата?

На первое место можно поставить команду шестнадцатью способами, на второе 15-ю, на третье 14-ю, на четвёртое 13-ю, на тринадцатое 12-ю, на четырнадцатое 11-ю. По условию задачи для команд занявших предпоследнее и последнее места порядок не важен, поэтому остаётся ещё выбрать 2 команды из оставшихся 10 - это $\binom{10}{2}$ способов. Всего способов $\binom{10}{2} * 16 * 15 * 14 * 13 * 12 * 11 = 259459200$

Задача

В программе к экзамену по теории вероятностей 75 вопросов. Студент знает 50 из них. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает хотя бы два вопроса из вытянутого им билета. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Всего вариантов составить билеты по три вопроса из 75 вопросов $\binom{75}{3} = 67525$.

Вариантов что в билете будут два вопроса из 50 (знает ответ) и один из 25 (не знает ответа) $\binom{50}{2}\binom{25}{1} = 30625$.

Вариантов что в билете будут три вопроса из 50 (знает ответ) $\binom{50}{3} = 19600$.

Подходят оба варианта, тогда искомая вероятность $\dfrac{19600 + 30625}{67525} = \dfrac{2009}{2701}$.

Задача

Пусть $n \geqslant 3$. Шарики занумерованы числами от 1 до n. Найдите количество способов эти n шариков разместить в n разных ящиков так, чтобы ровно один ящик оказался пустым.

Выбираем пустой ящик - n способов.

Выбираем ящик для двух шариков - (n-1) способов.

Выбираем два шарика - $\binom{n}{2}$ способов.

Остальные (n-2) шарика переставляем по (n-2) ящикам - $(n-2)!$.

Ответ получается перемножением $n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{2}n!$

Задача

Из колоды в 52 карты наугад взяли 6 карт. Найдите вероятности событий

- среди выбранных карт по три карты двух разных мастей: $\frac{490776}{20358520}$
- среди выбранных карт не более двух бубновых карт: $\frac{17163042}{20358520}$

Всего вариантов $\binom{52}{6} = 20358520$

Первый вопрос: выбираем две масти $\binom{4}{2}$. Для каждой масти выбираем три карты $\binom{13}{3}$. Тогда число удовлетворительных результатов $\binom{4}{2}\binom{13}{3}^2 = 490776$.

Второй вопрос: не выбрать бубновую масть $\binom{39}{6} = 3262623$ способов. Выбрать только одну карту бубновой масти $\binom{13}{1}\binom{39}{5} = 7484841$ способов. Выбрать две карты бубновой масти $\binom{13}{2}\binom{39}{4} = 6415578$ способов. Всего $3262623 + 7484841 + 6415578 = 17163042$.

1.5 Условная вероятность

Задача

В урне 11 красных, 10 синих и 9 зеленых шаров. Из нее последовательно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что первый шар окажется красным, второй — синим, а третий — зеленым. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Первый способ Элементарные события - упорядоченные тройки шаров. Всего таких троек $A_{30}^3 = 30 * 29 * 28 = 24360$. Количество способов выбрать на первое место красный шар $\binom{11}{1} = 11$, на второе место синий шар $\binom{10}{1} = 10$, на третье место зелёный шар $\binom{9}{1} = 9$. Тогда вероятность равна $\frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$.

Второй способ Обозначим события: A - первый выташенный шар красный, B - второй вытащенный шар синий, C - третий вытащенный шар зелёный. Надо найти вероятность того, что одновременно произошли все три события A, B и C.

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Событие A - все тройки с первым красным шаром. Таких троек $11 * 29 * 28$. Тогда

$$P(A) = \frac{11 * 29 * 28}{A_{20}^{3}} = \frac{11 * 29 * 28}{30 * 29 * 28} = \frac{11}{30}$$

Событие D при условии A, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, а второй синий. Таких троек $11 * 10 * 28$. Тогда

$$P(B|A) = \frac{11 * 10 * 28}{11 * 29 * 28} = \frac{10}{29}$$

и

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{11}{30}\frac{10}{29} = \frac{11 * 10}{30 * 29}$$

Событие C при условии A и B, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, второй шар уже выбран и он синий, а третий шар зелёный синий. Таких троек $11 * 10 * 9$. Тогда

$$P(C|(A \cap B)) = \frac{11 * 10 * 9}{11 * 10 * 28} = \frac{9}{28}$$

Окончательно получаем

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B) = \frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$$

Задача

Четыре человека A, B, C и D становятся в очередь в случайном порядке. Найдите:

- условную вероятность того, что A первый, если B последний: $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что A первый, если A не последний: $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что A первый, если B не последний: $\frac{2}{9}$
- условную вероятность того, что A первый, если B стоит в очереди позже A: $\frac{1}{2}$
- условную вероятность того, что A стоит в очереди раньше B, если известно, что A раньше C: $\frac{2}{3}$

1 Событие X - A первый, Y - B последний. Найти $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$. Всего четвёрок 4!. Событие Y - все четвёрки, у которых на последнем месте B. Таких четвёрок 3!. Среди четвёрок события Y есть четвёрки события X, это те четвёрки у которых на первом месте A. Таких четвёрок 2! - два места фиксированы а остальные два переставляем произвольно. Тогда искомая вероятность $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \dfrac{2!}{3!} = \dfrac{1}{3}$.

2 Событие X - A первый, Y - A не последний. Найти $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$. Событие Y - все четвёрки, у которых A на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок $3*3!$. Среди этих четвёрок есть те, у которых A не первом месте, таких троек 3!. Значит искомая вероятность $P(X|Y) = \dfrac{1}{3}$.

3 Событие X - A первый, Y - B не последний. Найти $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$. Событие Y - все четвёрки, у которых B на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок $3 * 3!$. Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит A. Таких четвёрок: на первом месте A, на вторам B - таких 2! или на первом месте A, на третьем B - таких 2!, всего $2 * 2!$.. Тогда искомая вероятнсть $P(X|Y) = \dfrac{2 * 2!}{3 * 3!} = \dfrac{2}{9}$.

4 Событие X - A первый, Y - B стоит в очереди позже A. Найти $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$. Событие Y - четвёрки у которых A на первом месте (таких 3!), плюс четвёрки у которых A на втором месте а B на третьем или четвёртом месте (таких 2*2!), плюс четвёрки у которых A на третьем месте а B на четвёртом месте (таких 2!). Таких четвёрок $3 * 3!$. Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит A. Событию X благоприятствуют только четвёрки у которых A на первом месте (таких 3!). Тогда искомая вероятнсть $P(X|Y) = \dfrac{3!}{3! + 2 * 2! + 2!} = \dfrac{3!}{3! + 3!} = \dfrac{1}{2}$.

5 Событие X - A стоит в очереди раньше B, Y - A стоит в очереди раньше C. Найти $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$. Событие Y - четвёрки у которых A на первом месте (таких 3!), плюс четвёрки у которых A на втором месте и C на третьем месте и B на четвёртом месте (таких 1), плюс четвёрки у которых A на втором месте и C на третьем и B на первом месте (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на третьем (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на первом (таких 1), плюс четвёрки у которых А на третьем месте и С на четвёртом месте (таких 2!). Событию X благоприятствуют только четвёрки у которых А на первом месте (таких 3! + 1 + 1). Тогда искомая вероятнсть $P(X|Y) = \dfrac{3!+1+1}{3!+1+1+1+1+2!} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Задача

Игральную кость бросают до тех пор пока не выпадет единица. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

Решение Событие А - на втором бросании выпала 1, событие В - потребовалось чётное число бросаний. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Событие В - потребовалось 2,4,6... бросаний. Вероятность что потребовалось 2-х бросания $\dfrac{5}{6}\dfrac{1}{6}$. Вероятность что потребовалось 4-х бросания $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\dfrac{1}{6}$. Вероятность что потребовалось k бросаний (k - чётное) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\dfrac{1}{6}$. Тогда вероятность чётного числа бросаний $P(B) = \sum_{k=2,4,6\dots}^{\infty}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}\dfrac{1}{6} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^3\dfrac{1}{6} + \ldots + \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\dfrac{1}{6} + \ldots = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\left(1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(\dfrac{5}{6}\right)^4+\left(\dfrac{5}{6}\right)^6+\ldots\right) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2} = \dfrac{5}{36}\cdot\dfrac{36}{11} = \dfrac{5}{11}$.

Событие $A\cap B$ означает что потребовалось 2 бросания и его вероятность содержится в сумме $P(A\cap B) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$.

Тогда искомая вероятность $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{11}} = \dfrac{11}{36}$.

1.6 Теорема Баейса

Задача

Из полного набора костей домино взята одна кость. Найдите вероятность того, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. В качестве ответа приведите обыкновенную дробь

Решение Элементарный исход - упорядоченная пара костей домино при выборе без возвращения. Всего таких упорядоченных пар $28 * 27 = 756$.

Обозначим A событие, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. Разобъём множество элементарных событий B на две непересекающиеся части: B_1 первая кость - дубль, B_2 первая кость не дубль. Тогда по формуле полной вероятности $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$. Вероятность вытащить первой костью дубль

$$P(B_1) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

Вероятность вытащить первой костью не дубль

$$P(B_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость дубль $P(A|B_1) = \frac{6}{27}$, так как первая кость зафиксировала количество очков а в оставшихся 27 костях лишь 6 костей с таким количеством очков. Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость не дубль $P(A|B_1) = 2 \cdot \frac{6}{27}$, так как первая кость зафиксировала два количества очков а в оставшихся 27 костях 6 костей с каждым количеством очков. Тогда $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{6}{27} \cdot \frac{1}{4} + \frac{12}{27} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{18}$

Задача

В урне находится n шаров, некоторые из них белые. Событие A_k при $k = 0, 1, \ldots, n$ состоит в том, что в урне ровно k белых шаров. Предположим, что все эти события равновероятны, т.е. $P(A_0) = P(A_1) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n+1}$. Пусть B — событие, состоящее в том, что наугад взятый шар из урны — белый. Найдите $P(A_k|B)$.

Решение Элементарный исход - вытащен шар из корзины в которой от 0 до n белых шаров. Тогда всё множество элементарных исходов А можно разбить на непересекающиеся подмножества A_k и применить теорему Байеса:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^{n} (P(B|A_k) \cdot P(A_k))$$

$P(B) = \sum_{k=0}^{n} (P(B|A_k) \cdot P(A_k)) = P(B|A_0) \cdot P(A_0) + P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$.

$P(B|A_k) = \dfrac{k}{n}$

Тогда $P(B) = \dfrac{0}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{n}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} \cdot (1 + \ldots + n) = \dfrac{1}{2}$.

и $P(A_k|B) = \dfrac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \dfrac{\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2k}{n(n+1)}$

Задача

В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий вытачивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0,5. Во вторник этот показатель снижается до 0,2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней? В качестве ответа приведите обыкновенную дробь.

Решение Элементарное событие - выбран шуруп из множества всех шурупов. Разобъём множество всех шурупов А на непересекающиеся множества шурупов сделанных в понедельник A_1, во вторник A_2, в среду или четверг или пятницу A_3. Применим теорему Байеса.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} \left(P(B|A_k) \cdot P(A_k)\right)$$

Всего сделано шурупов $x + 4 \cdot 2 \cdot x = 9x$. где x - число шурупов сделанных в понедельник.

Тогда $P(A_1) = \dfrac{1}{9}$, $P(A_2) = \dfrac{2}{9}$, $P(A_3) = \dfrac{6}{9}$.

По условию задачи $P(B|A_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(B|A_2) = \dfrac{1}{5}$, $P(B|A_3) = \dfrac{1}{10}$

И получаем $P(A_1|B) = \dfrac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9}} = \dfrac{1}{3}$

Задача

Даны натуральные числа m и n, причем $m < n$. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m.

Решение Элементарный исход - упорядоченная пара чисел. Количество способов выбрать первое число $\dfrac{1}{n}$, количество способов выбрать второе число $\dfrac{1}{n+1}$. Всего элементарных исходов $\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Обозначим первое выбранное число a, второе число b. Если выбрано число a, то благоприятному исходу удовлетворяет такое число b что $(a - b) \geqslant m$ или $b \leqslant (a - m)$. Вероятность при условии что $a = i$ выбрать "хорошее"число b равна 0 при $i \leqslant m$ и $P(b_{good}|a = i) = \dfrac{i - m}{n - 1}$ при $i > m$.

Тогда вероятность $P(b_{good}) = P(b_{good}|a = 1) \cdot P(a = 1) + P(b_{good}|a = 2) \cdot P(a = 2) + P(b_{good}|a = 3) \cdot P(a = 3) + \ldots + P(b_{good}|a = n) \cdot P(a = n) = \sum_{i>m}^{n} (P(b_{good}|a = i) \cdot P(a = i))$. Подставляя ранее найденные вероятности выбора первого числа a равной $\dfrac{1}{n}$ и $P(b_{good}|a = i) = \dfrac{i - m}{n - 1}$ получим что искомая вероятность выбора "хорошего"числа b равна

$\sum_{i>m}^{n} (P(b_{good}|a = i) \cdot P(a = i)) = \sum_{i>m}^{n} \left(\dfrac{i - m}{n - 1} \cdot \dfrac{1}{n}\right) =$

$\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n-1} \cdot (1 + 2 + \ldots + (n - m)) = \dfrac{(n - m)(n - m + 1)}{2n(n - 1)}$.

Задача

Дано натуральное число $n < 52$. Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты одновременно были взяты n карт. На одну из этих n карт посмотрели, она оказалась тузом. После этого она возвращается в набор взятых карт и эти n карт перемешиваются. После этого из них выбирается одна карта и открывается. Найдите вероятность того, что открытая карта является тузом.

Решение Способ 1 Обозначим А - повторно из набора n карт выбирается туз, B_1 повторно из набора n карт выбирается та-же самая карта, B_2 повторно из набора n карт выбирается другая карта. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

.

Вероятность выбрать ту-же карту из набора n карт $P(B_1)$ равна $\frac{1}{n}$, а вероятность что эта карта при этом условии окажется тузом $P(A|B_1)$ равна 1. Поэтому первое слагаемое равно $\frac{1}{n}$.

Вероятность выбрать другую карту из набора n карт $P(B_2)$ равна $\frac{n-1}{n}$. Обозначим туз который видели в наборе туз1. Рассмотрим подробнее вероятность вытащить какой-то конкретный туз2 при этом условии $P(A|B_2)$ (это не туз1!). Эту вероятность можно найти по формуле полной вероятности рассмотрев два случая: туз2 попал в набор и туз2 не попал в набор. Если туз2 не попал в набор, то вероятность вытащить его равна 0. Тогда осталось найти вероятность того что этот туз2 попал в набор и умножить на вероятность вытащить туз2 из набора. Известно, что в наборе из n карт есть туз1. Таких наборов в колоде из 52 карт существует $\binom{51}{n-1}$. Наборов в которых есть туз2 существует $\binom{50}{n-2}$. Тогда вероятность попадания туз2 в набор равна $\frac{\binom{50}{n-2}}{\binom{51}{n-1}} = \frac{n-1}{51}$. Вероятность вытащить туз2 из набора при дополнительном условии что это не туз1 равна $\frac{1}{n-1}$. Тогда вероятность вытащить туз2 при условии что вытащили не туз1 равна $\frac{n-1}{51} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{51}$. Кроме туз2 есть ещё два туза в колоде, поэтому вероятность вытащить туз при условии что это не туз1 $P(A|B_2)$ равна $\frac{3}{51}$. Тогда $P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{51} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{3(n-1)}{51n}$ и окончательно

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{51n}$$

В ходе решения продемонстрирован простой факт, вероятность того что конкретная карта из колоды из n карт попала в набор из $m < n$ карт равна $\frac{m}{n}$. Вероятность вытащить карту из набора равна $\frac{1}{m}$. Получается что вероятность вытащить карту из набора равна вероятности вытащить карту из колоды. Это совпадает со случаем в задаче вытащить другую карту. Ищем вероятность вытащить другую карту при этом первая карта исключается из рассмотрения и сводится к вероятности вытащить туза из 51 карты с тремя тузами.

Решение Способ 2 Известно что из колоды в 52 карты выбран набор из $0 < n < 52$ карт и в этом наборе есть какой-то конкретный туз, обозначим его туз1.

Сколько всего существует таких наборов из n карт таких, что в них есть этот конкретный туз? К туз1 надо добавить $n-1$ карт из 51. Таких наборов ровно $\binom{51}{n-1}$.

Сколько существует таких наборов с ровно одним тузом (это будет туз1)? Таких наборов $\binom{3}{0} \cdot \binom{48}{n-1}$. Вероятность выбрать туз и набора n карт если там один туз равна $\frac{1}{n}$.

Сколько существует таких наборов с ровно двумя тузами (это будет туз1 и ещё один из трёх других тузов)? Таких наборов $\binom{3}{1} \cdot \binom{48}{n-2}$. Вероятность выбрать туз и набора n карт если там два туза равна $\frac{2}{n}$.

Сколько существует таких наборов с ровно тремя тузами (это будет туз1 и ещё два из трёх других тузов)? Таких наборов $\binom{3}{2} \cdot \binom{48}{n-3}$. Вероятность выбрать туз и набора n карт если там три туза равна $\frac{3}{n}$.

Сколько существует таких наборов с ровно четырьмя тузами (это будет туз1 и все три из трёх других тузов)? Таких наборов $\binom{3}{3} \cdot \binom{48}{n-4}$. Вероятность выбрать туз и набора n карт если там четыре туза равна $\frac{4}{n}$.

По формуле полной вероятности получаем что вероятность вытянуть туз будет равна сумме произведений вероятностей вытянуть туз из набора с фиксированным количеством i тузов на вероятность что в наборе ровно i тузов.

$$P = \frac{1}{n\binom{51}{n-1}}\left(\binom{3}{0}\binom{48}{n-1} + 2\binom{3}{1}\binom{48}{n-2} + 3\binom{3}{2}\binom{48}{n-3} + 4\binom{3}{3}\binom{48}{n-4}\right)$$

Преобразуем дальше и получим

$$P = \frac{1}{n\binom{51}{n-1}}\left(\binom{48}{n-1} + 6\binom{48}{n-2} + 9\binom{48}{n-3} + 4\binom{48}{n-4}\right)$$

Преобразуя дальше можно получить
$P = \frac{1}{n \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\left((52-n)(51-n)(50-n) + 6(52-n)(51-n)(n-1)\right)+$ $\frac{1}{n \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\left(9(52-n)(n-1)(n-2) + 4(n-1)(n-2)(n-3)\right)$ и далее получим $P = \frac{7350n + 117600}{n \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{n+16}{17n} = \frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{51n}$ что совпадает с результатом решения способом 1.

1.7 Независимые события

Задача

В мешке лежит 12 шаров для игры в петанк: 6 белых и 6 черных, причем 2 белых и 4 черных шара с насечкой. Из мешка вынимают наугад один шар. Пусть A — событие, означающее, что вытащили белый шар, а B — событие, означающее, что вынули шар с насечкой. Найдите вероятности P(A), P(B) и $P(A \cap B)$. Будут ли события A и B независимы? В ответе приведите разделенные пробелами найденные вероятности в виде обыкновенных дробей и одно из слов "зависимы"или "независимы"(без кавычек). Например, 1/2 2/3 3/4 независимы.

Решение Вероятность вытащить белый шар $P(A) = \frac{1}{2}$. Вероятность вытащить шар с насечкой $P(B) = \frac{1}{2}$. Пересечение событий A и B - вынули белый шар с насечкой, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Вероятность пересечения событий A и B не равна произведению вероятностей событий A и B, значит события A и B зависимы.

Задача

Из колоды, содержащей 52 карты, наугад извлекается одна карта. Событие A означает, что извлеченная карта является дамой, событие B — что извлечена карта пиковой масти. Найдите вероятности событий A, B и $A \cap B$. Независимы ли события A и B? Решите эту же задачу при условии, что в колоде 54 карты, т.е. к стандартной 52-х карточной колоде добавлены два джокера. Джокер не имеет масти и не является дамой.

Решение Для колоды содержащей 52 карты вероятность вытащить даму $P(A) = \frac{1}{13}$, вероятность вытащить карту пиковой масти $P(B) = \frac{1}{4}$ и вероятность вытащить пиковую даму $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Вероятность пересечения событий равна произведению вероятностей событий, значит события независимы.

Для колоды содержащей 54 карты вероятность вытащить даму $P(A) = \frac{4}{54}$, вероятность вытащить карту пиковой масти $P(B) = \frac{13}{54}$ и вероятность вытащить пиковую даму $P(A \cap B) = \frac{1}{54}$. Вероятность пересечения событий не равна произведению вероятностей событий, значит события зависимы.

Задача

Подбрасываются две правильные игральные кости. Событие A_k при k=2,3,...,12 означает, что сумма очков на кубиках равна k, а событие B_n при n=1,2,...,6 означает, что на первом кубике выпало n очков. Для каких пар (k,n) события A_k и B_n независимы? В качестве ответа приведите все пары, разделенные пробелами. Например, (2,2) (4,3) (5,1).

Решение Способ 1 Найдём вероятности событий A_k и B_n при всех k и n.

- $A_2 = \frac{1}{36}$
- $A_3 = \frac{2}{36}$
- $A_4 = \frac{3}{36}$
- $A_5 = \frac{4}{36}$

- $A_6 = \frac{5}{36}$
- $A_7 = \frac{6}{36}$
- $A_8 = \frac{5}{36}$
- $A_9 = \frac{4}{36}$
- $A_10 = \frac{3}{36}$
- $A_11 = \frac{2}{36}$
- $A_12 = \frac{1}{36}$

Для любого n=1,2,...,6 $B_n = \frac{1}{6}$.

Для проверки независимости событий A_k и B_n надо для каждой пары (k,n) проверить условие независимости $P(A_k \cap B_n) = P(A_k)P(B_n)$.

- $(2, 1) - P(A_2 \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 1) - P(A_3 \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 1) - P(A_4 \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(5, 1) - P(A_5 \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(6, 1) - P(A_6 \cap B_1) = \frac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 1) - P(A_7 \cap B_1) = \frac{1}{36} = P(A_2)P(B_1) = \frac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 1) - P(A_8 \cap B_1) = 0 \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 1) - P(A_9 \cap B_1) = 0 \neq P(A_2)P(B_1) = \frac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы

- $(10, 1) - P(A_10 \cap B_1) = 0 \neq P(A_2)P(B_1) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(11, 1) - P(A_11 \cap B_1) = 0 \neq P(A_2)P(B_1) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 1) - P(A_12 \cap B_1) = 0 \neq P(A_2)P(B_1) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(2, 2) - P(A_2 \cap B_2) = 0 \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 2) - P(A_3 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 2) - P(A_4 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(5, 2) - P(A_5 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(6, 2) - P(A_6 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 2) - P(A_7 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} = P(A_2)P(B_2) = \dfrac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 2) - P(A_8 \cap B_2) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 2) - P(A_9 \cap B_2) = 0 \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(10, 2) - P(A_10 \cap B_2) = 0 \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(11, 2) - P(A_11 \cap B_2) = 0 \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 2) - P(A_12 \cap B_2) = 0 \neq P(A_2)P(B_2) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(2, 3) - P(A_2 \cap B_3) = 0 \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 3) - P(A_3 \cap B_3) = 0 \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 3) - P(A_4 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы

- $(5, 3) - P(A_5 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(6, 3) - P(A_6 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 3) - P(A_7 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} = P(A_2)P(B_3) = \dfrac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 3) - P(A_8 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 3) - P(A_9 \cap B_3) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(10, 3) - P(A_10 \cap B_3) = 0 \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(11, 3) - P(A_11 \cap B_3) = 0 \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 3) - P(A_12 \cap B_3) = 0 \neq P(A_2)P(B_3) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(2, 4) - P(A_2 \cap B_4) = 0 \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 4) - P(A_3 \cap B_4) = 0 \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 4) - P(A_4 \cap B_4) = 0 \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(5, 4) - P(A_5 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(6, 4) - P(A_6 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 4) - P(A_7 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} = P(A_2)P(B_4) = \dfrac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 4) - P(A_8 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 4) - P(A_9 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(10, 4) - P(A_10 \cap B_4) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы

- $(11, 4) - P(A_11 \cap B_4) = 0 \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 4) - P(A_12 \cap B_4) = 0 \neq P(A_2)P(B_4) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(2, 5) - P(A_2 \cap B_5) = 0 \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 5) - P(A_3 \cap B_5) = 0 \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 5) - P(A_4 \cap B_5) = 0 \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(5, 5) - P(A_5 \cap B_5) = 0 \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(6, 5) - P(A_6 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 5) - P(A_7 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} = P(A_2)P(B_5) = \dfrac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 5) - P(A_8 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 5) - P(A_9 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(10, 5) - P(A_10 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(11, 5) - P(A_11 \cap B_5) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 5) - P(A_12 \cap B_5) = 0 \neq P(A_2)P(B_5) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(2, 6) - P(A_2 \cap B_6) = 0 \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(3, 6) - P(A_3 \cap B_6) = 0 \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(4, 6) - P(A_4 \cap B_6) = 0 \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(5, 6) - P(A_5 \cap B_6) = 0 \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы

- $(6, 6) - P(A_6 \cap B_6) = 0 \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(7, 6) - P(A_7 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} = P(A_2)P(B_6) = \dfrac{6}{36 \cdot 6}$ - независимы
- $(8, 6) - P(A_8 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{5}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(9, 6) - P(A_9 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{4}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(10, 6) - P(A_10 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{3}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(11, 6) - P(A_11 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{2}{36 \cdot 6}$ - зависимы
- $(12, 6) - P(A_12 \cap B_6) = \dfrac{1}{36} \neq P(A_2)P(B_6) = \dfrac{1}{36 \cdot 6}$ - зависимы

Итого независимы события при (k,n): (7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6).

Решение Способ 2 Напишем вероятности событий A_k и B_n: $P(B_n) = \dfrac{1}{6}$, $P(A_k) = \dfrac{k-1}{36}$ при k=2,3,...,7 и $P(A_k) = \dfrac{13-k}{36}$ при k=8,9,...,12. Вероятность события $A_k \cap B_n$ также легко находится, поскольку это событие означает, что на первом кубике выпало n, а в сумме выпало k. Если $k \leqslant n$, то это невозможное событие и его вероятность равна нулю. Тогда события A_k и B_n не могут быть независимыми, ибо $P(A_k)P(B_n) > 0 = P(A_k \cap B_n)$. Если же k>n, то это означает, что на втором кубике выпало k-n и вероятность выпадения такой пары очков равна $\dfrac{1}{36}$. Установим когда k>n и $P(A_k)P(B_n) = P(A_k \cap B_n)$. Рассмотрим случай $k \leqslant 7$, тогда $\dfrac{1}{36} = \dfrac{k-1}{36} \cdot \dfrac{1}{6}$ и, значит, k=7 и n — любое. Далее рассмотрим случай $k \geqslant 8$, тогда $\dfrac{1}{36} = \dfrac{13-k}{36} \cdot \dfrac{1}{6}$ и, значит, 13-k=6, что для $k \geqslant 8$ невозможно. Отсюда находим ответ: k=7, n — любое число от 1 до 6.

Задача

Бросаются две игральные кости. Рассмотрим три события: A — на первой кости выпало нечётное число очков, B — на второй кости выпало нечётное число очков, C — сумма очков на обеих костях нечётна.

Бросаются три игральные кости. Событие X состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, Y — одинаковое число очков на второй и третьей костях, Z — на первой и третьей.

Отметьте верные утверждения.

- события A и $\overline{A}$ независимы: неверно
- события A и $\overline{B}$ независимы: верно
- события A, B и C попарно независимы: верно
- события A, B и C независимы в совокупности: неверно
- события X, Y и Z попарно независимы: верно
- события X, Y и Z независимы в совокупности: неверно

Решение

1.8 Схема Бернулли

1.9 Краткие сведения из математического анализа

2 Элементарная теория вероятностей: случайные величины