

Изучаем TeorVer Stepic

23 августа 2018 г.

1 Элементарная теория вероятностей: случайные события

1.1 Обзор

1.2 Вероятностная модель эксперимента

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующих испытаний:

- производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10: 11
- три раза подбрасывается игральная кость: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- наудачу извлекается одна кость из полной игры домино: 28

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующего испытания: производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10, а затем столько раз кидается игральная кость, сколько очков выбито на мишени.

Возможные исходы:

- выстрел в "молоко" - кубик не подбрасывается - количество исходов 1
- выстрел в "1" - кубик подбрасывается 1 раз - количество исходов 6

- выстрел в "2" - кубик подбрасывается 2 раза - количество исходов 6^2
- выстрел в "3" - кубик подбрасывается 3 раза - количество исходов 6^3
- выстрел в "4" - кубик подбрасывается 4 раза - количество исходов 6^4
- выстрел в "5" - кубик подбрасывается 5 раз - количество исходов 6^5
- выстрел в "6" - кубик подбрасывается 6 раз - количество исходов 6^6
- выстрел в "7" - кубик подбрасывается 7 раз - количество исходов 6^7
- выстрел в "8" - кубик подбрасывается 8 раз - количество исходов 6^8
- выстрел в "9" - кубик подбрасывается 9 раз - количество исходов 6^9
- выстрел в "10" - кубик подбрасывается 10 раз - количество исходов 6^{10}

Тогда всего элементарных событий $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 + 6^7 + 6^8 + 6^9 + 6^{10} = \sum_{i=0}^{10} 6^i = \frac{6^{11} - 1}{6 - 1} = 72559411$

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит каждое из следующих случайных событий:

- сумму двух наудачу выбранных однозначных чисел равна пятнадцати: (элементарное событие — появление пары однозначных чисел (m, n)) Ответ: 4, события $(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)$
- наудачу выбранная кость из полной игры домино оказалась дублем (элементарное событие — появление кости $m:n$) Ответ: 7
- наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из листков календаря) Ответ: 11

1.3 Вероятностное пространство

Задача

Студент, изучающий теорию вероятностей, раздобыл отрывной календарь за 2018 год и вырвал в нем наугад одну страницу. Найдите вероятность того, что число на вырванном листке

- кратно шести: $\frac{59}{365}$
- равно 30: $\frac{11}{365}$

Задача

У кривого игрального кубика грани помечены числами от 1 до 6, а вероятность выпадения грани пропорциональна написанному на ней числу. Событие A означает, что выпало число, меньшее пяти; событие B означает, что выпало нечетное число. Найдите вероятности следующих событий:

- $A \cap B$: $\frac{4}{21}$
- $A \cup B$: $\frac{15}{21}$
- $A \setminus B$: $\frac{6}{21}$

Обозначим x - вероятность выпадения "1". Тогда вероятность выпадения "2" - $2x$, "3" - $3x$, "4" - $4x$, "5" - $5x$, "6" - $6x$. Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1, следовательно $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$ и $x = \frac{1}{21}$.

Задача

Пусть события A и B имеют вероятности 0,5 и 0,7 соответственно. Найдите

- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 1.0
- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 0.7
- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.5

- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.2

Задача

Отметьте верные утверждения. Во всех утверждениях A и B означают случайные события.

- если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$: верно
- $P(A \cap B)$ всегда меньше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cap B)$ может быть больше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: верно
- $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$: верно
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B)$: верно
- событие $P(A \cup B)$ означает, что произошли оба события A и B : верно
- если $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: верно

1.4 Немного комбинаторики

Задача

В урне лежат 9 белых шаров и 5 черных. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найдите вероятности следующих событий

- Извлеченные шары одного цвета: $\frac{46}{91}$
- Извлеченные шары разных цветов: $\frac{45}{91}$

Задача

На карточках написаны все трехзначные числа, каждое по одному разу. Сколькими способами можно выбрать три карточки с четной суммой.

Сумма будет чётной, если все три карточки чётные или одна чётная и две нечётные. Всего карточек 900 (100...999). Чётных и нечётных ровно половина. Тогда три чётных карточек можно выбрать $\binom{450}{3} =$

$\frac{450 * 449 * 448}{3 * 2} = 15086400$ способами. Одну чётную и две нечётных карточек можно выбрать $\binom{450}{1} \binom{450}{2} = 45461250$ способами. Всего $15086400 + 45461250 = 60547650$ способов.

Задача

В чемпионате России по футболу участвует 16 команд. Назовем итоги двух первенств похожими, если в них совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей; команды занявшие четвертые места (они получают право играть в европейских кубках), команды занявшие 13-е места, команды занявшие 14-е места (эти команды играют стыковые матчи); а также команды напрямую покидающие премьер-лигу (т.е. команды, занявшие последнее и предпоследнее места). Сколько существует попарно непохожих итогов чемпионата?

На первое место можно поставить команду шестнадцатью способами, на второе 15-ю, на третье 14-ю, на четвертое 13-ю, на тринадцатое 12-ю, на четырнадцатое 11-ю. По условию задачи для команд занявших предпоследнее и последнее места порядок не важен, поэтому остаётся ещё выбрать 2 команды из оставшихся 10 - это $\binom{10}{2}$ способов. Всего способов $\binom{10}{2} * 16 * 15 * 14 * 13 * 12 * 11 = 259459200$

Задача

В программе к экзамену по теории вероятностей 75 вопросов. Студент знает 50 из них. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает хотя бы два вопроса из вытянутого им билета. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Всего вариантов составить билеты по три вопроса из 75 вопросов $\binom{75}{3} = 67525$.

Вариантов что в билете будут два вопроса из 50 (знает ответ) и один из 25 (не знает ответа) $\binom{50}{2} \binom{25}{1} = 30625$.

Вариантов что в билете будут три вопроса из 50 (знает ответ) $\binom{50}{3} = 19600$.

Подходят оба варианта, тогда искомая вероятность $\frac{19600 + 30625}{67525} = \frac{2009}{2701}$.

Задача

Пусть $n \geq 3$. Шарик занумерованы числами от 1 до n . Найдите количество способов эти n шариков разместить в n разных ящиков так, чтобы

ровно один ящик оказался пустым.

Выбираем пустой ящик - n способов.

Выбираем ящик для двух шариков - $(n-1)$ способов.

Выбираем два шарика - $\binom{n}{2}$ способов.

Остальные $(n-2)$ шарика переставляем по $(n-2)$ ящикам - $(n-2)!$.

Ответ получается перемножением $n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{2}n!$

Задача

Из колоды в 52 карты наугад взяли 6 карт. Найдите вероятности событий

- среди выбранных карт по три карты двух разных мастей: $\frac{490776}{20358520}$
- среди выбранных карт не более двух бубновых карт: $\frac{17163042}{20358520}$

Всего вариантов $\binom{52}{6} = 20358520$

Первый вопрос: выбираем две масти $\binom{4}{2}$. Для каждой масти выбираем три карты $\binom{13}{3}$. Тогда число удовлетворительных результатов $\binom{4}{2}\binom{13}{3}^2 = 490776$.

Второй вопрос: не выбрать бубновую масть $\binom{39}{6} = 3262623$ способов. Выбрать только одну карту бубновой масти $\binom{13}{1}\binom{39}{5} = 7484841$ способов. Выбрать две карты бубновой масти $\binom{13}{2}\binom{39}{4} = 6415578$ способов. Всего $3262623 + 7484841 + 6415578 = 17163042$.

1.5 Условная вероятность

Задача

В урне 11 красных, 10 синих и 9 зеленых шаров. Из нее последовательно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что первый шар окажется красным, второй — синим, а третий — зеленым. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Первый способ Элементарные события - упорядоченные тройки шаров. Всего таких троек $A_{30}^3 = 30 * 29 * 28 = 24360$. Количество способов выбрать на первое место красный шар $\binom{11}{1} = 11$, на второе место синий шар $\binom{10}{1} = 10$, на третье место зелёный шар $\binom{9}{1} = 9$. Тогда вероятность равна $\frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$.

Второй способ Обозначим события: А - первый вытащенный шар красный, В - второй вытащенный шар синий, С - третий вытащенный шар зелёный. Надо найти вероятность того, что одновременно произошли все три события А, В и С.

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Событие А - все тройки с первым красным шаром. Таких троек $11 * 29 * 28$. Тогда

$$P(A) = \frac{11 * 29 * 28}{A_{20}^3} = \frac{11 * 29 * 28}{30 * 29 * 28} = \frac{11}{30}$$

Событие В при условии А, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, а второй синий. Таких троек $11 * 10 * 28$. Тогда

$$P(B|A) = \frac{11 * 10 * 28}{11 * 29 * 28} = \frac{10}{29}$$

и

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{11}{30} \frac{10}{29} = \frac{11 * 10}{30 * 29}$$

Событие С при условии А и В, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, второй шар уже выбран и он синий, а третий шар зелёный. Таких троек $11 * 10 * 9$. Тогда

$$P(C|(A \cap B)) = \frac{11 * 10 * 9}{11 * 10 * 28} = \frac{9}{28}$$

Окончательно получаем

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B) = \frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$$

Задача

Четыре человека А, В, С и D становятся в очередь в случайном порядке. Найдите:

- условную вероятность того, что А первый, если В последний: $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что А первый, если А не последний: $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что А первый, если В не последний: $\frac{2}{9}$
- условную вероятность того, что А первый, если В стоит в очереди позже А: $\frac{1}{2}$
- условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше В, если известно, что А раньше С: $\frac{2}{3}$

1 Событие X - A первый, Y - B последний. Найти $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Всего четвёрок $4!$. Событие Y - все четвёрки, у которых на последнем месте B . Таких четвёрок $3!$. Среди четвёрок события Y есть четвёрки события X , это те четвёрки у которых на первом месте A . Таких четвёрок $2!$ - два места фиксированы а остальные два переставляем произвольно.

Тогда искомая вероятность $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$.

2 Событие X - A первый, Y - A не последний. Найти $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Событие Y - все четвёрки, у которых A на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок $3 * 3!$. Среди этих четвёрок есть те, у которых A не первом месте, таких троек $3!$. Значит искомая вероятность $P(X|Y) = \frac{1}{3}$.

3 Событие X - A первый, Y - B не последний. Найти $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Событие Y - все четвёрки, у которых B на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок $3 * 3!$. Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит A . Таких четвёрок: на первом месте A , на втором B - таких $2!$ или на первом месте A , на третьем B - таких $2!$, всего $2 * 2!$.

Тогда искомая вероятность $P(X|Y) = \frac{2 * 2!}{3 * 3!} = \frac{2}{9}$.

4 Событие X - A первый, Y - B стоит в очереди позже A . Найти $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Событие Y - четвёрки у которых A на первом месте (таких $3!$), плюс четвёрки у которых A на втором месте а B на третьем или четвёртом месте (таких $2 * 2!$), плюс четвёрки у которых A на третьем месте а B на четвёртом месте (таких $2!$). Таких четвёрок $3 * 3!$. Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит A . Событию X благоприятствуют только четвёрки у которых A на первом месте (таких $3!$). Тогда искомая вероятность $P(X|Y) = \frac{3!}{3! + 2 * 2! + 2!} = \frac{3!}{3! + 3!} = \frac{1}{2}$.

5 Событие X - A стоит в очереди раньше B , Y - A стоит в очереди раньше C . Найти $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$.

Событие Y - четвёрки у которых A на первом месте (таких $3!$), плюс четвёрки у которых A на втором месте и C на третьем месте и B на четвёртом месте (таких 1), плюс четвёрки у которых A на втором месте и C на третьем и B на первом

месте (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на третьем (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на первом (таких 1), плюс четвёрки у которых А на третьем месте и С на четвёртом месте (таких 2!). Событию Х благоприятствуют только четвёрки у которых А на первом месте (таких $3! + 1 + 1$). Тогда искомая вероятность $P(X|Y) = \frac{3! + 1 + 1}{3! + 1 + 1 + 1 + 1 + 2!} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Задача

Игральную кость бросают до тех пор пока не выпадет единица. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

Решение Событие А - на втором бросании выпала 1, событие В - потребовалось чётное число бросаний. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Событие В - потребовалось 2,4,6... бросаний. Вероятность что потребовалось 2-х бросания $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Вероятность что потребовалось 4-х бросания $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$. Вероятность что потребовалось k бросаний (k - чётное) $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$. Тогда вероятность чётного числа бросаний $P(B) = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$.

Событие $A \cap B$ означает что потребовалось 2 бросания и его вероятность содержится в сумме $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

Тогда искомая вероятность $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{11}} = \frac{11}{36}$.

1.6 Теорема Байеса

Задача

Из полного набора костей домино взята одна кость. Найдите вероятность того, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. В качестве ответа приведите обыкновенную дробь

Решение Элементарный исход - упорядоченная пара костей домино при выборе без возвращения. Всего таких упорядоченных пар $28 \cdot 27 = 756$.

Обозначим A событие, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. Разобьём множество элементарных событий Ω на две непересекающиеся части: B_1 первая кость - дубль, B_2 первая кость не дубль. Тогда по формуле полной вероятности $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$. Вероятность вытащить первой костью дубль

$$P(B_1) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

Вероятность вытащить первой костью не дубль

$$P(B_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость дубль $P(A|B_1) = \frac{6}{27}$, так как первая кость зафиксировала количество очков а в оставшихся 27 костях лишь 6 костей с таким количеством очков. Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость не дубль $P(A|B_2) = 2 \cdot \frac{6}{27}$, так как первая кость зафиксировала два количества очков а в оставшихся 27 костях 6 костей с каждым количеством очков. Тогда $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{6}{27} \cdot \frac{1}{4} + \frac{12}{27} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{18}$

Задача

В урне находится n шаров, некоторые из них белые. Событие A_k при $k = 0, 1, \dots, n$ состоит в том, что в урне ровно k белых шаров. Предположим, что все эти события равновероятны, т.е. $P(A_0) = P(A_1) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n+1}$. Пусть B — событие, состоящее в том, что наугад взятый шар из урны — белый. Найдите $P(A_k|B)$.

Решение Элементарный исход - вытащен шар из корзины в которой от 0 до n белых шаров. Тогда всё множество элементарных исходов A можно разбить на непересекающиеся подмножества A_k и применить теорему Байеса:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^n (P(B|A_k) \cdot P(A_k))$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^n (P(B|A_k) \cdot P(A_k)) = P(B|A_0) \cdot P(A_0) + P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n).$$

$$P(B|A_k) = \frac{k}{n}$$

$$\text{Тогда } P(B) = \frac{0}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \dots + n) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{и } P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Задача

В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий вытачивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0,5. Во вторник этот показатель снижается до 0,2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней? В качестве ответа приведите обыкновенную дробь.

Решение Элементарное событие - выбран шуруп из множества всех шурупов. Разобьём множество всех шурупов A на непересекающиеся множества шурупов сделанных в понедельник A_1 , во вторник A_2 , в среду или четверг или пятницу A_3 . Применим теорему Байеса.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 (P(B|A_k) \cdot P(A_k))$$

Всего сделано шурупов $x + 4 \cdot 2 \cdot x = 9x$. где x - число шурупов сделанных в понедельник.

Тогда $P(A_1) = \frac{1}{9}$, $P(A_2) = \frac{2}{9}$, $P(A_3) = \frac{6}{9}$.

По условию задачи $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_2) = \frac{1}{5}$, $P(B|A_3) = \frac{1}{10}$

И получаем
$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9}} = \frac{1}{3}$$

1.7 Независимые события

1.8 Схема Бернулли

1.9 Краткие сведения из математического анализа

2 Элементарная теория вероятностей: случайные величины