Изучаем ТеорВер Stepic

22 августа 2018 г.

1 Элементарная теория вероятностей: случайные события

1.1 Обзор

1.2 Вероятностная модель эксперимента

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующих испытаний:

- производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10: 11
- три раза подбрасывается игральная кость: 6*6*6=216
- наудачу извлекается одна кость из полной игры домино: 28

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующего испытания: производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10, а затем столько раз кидается игральная кость, сколько очков выбито на мишени.

Возможные исходы:

- выстрел в "молоко" - кубик не подбрасывается - количество исходов 1
- выстрел в "1" - кубик подбрасывается 1 раз - количество исходов 6

- выстрел в "2" - кубик подбрасывается 2 раза - количество исходов 6^2
- выстрел в "3" - кубик подбрасывается 3 раза - количество исходов 6^3
- выстрел в "4" - кубик подбрасывается 4 раза - количество исходов 6^4
- выстрел в "5" - кубик подбрасывается 5 раз - количество исходов 6^5
- выстрел в "6" - кубик подбрасывается 6 раз - количество исходов 6^6
- выстрел в "7" - кубик подбрасывается 7 раз - количество исходов 6^7
- выстрел в "8" - кубик подбрасывается 8 раз - количество исходов 6^8
- выстрел в "9" - кубик подбрасывается 9 раз - количество исходов 6^9
- выстрел в "10" - кубик подбрасывается 10 раз - количество исходов 6^{10}

Тогда всего элементарных событий $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 + 6^7 + 6^8 + 6^9 + 6^{10} = \sum_{i=0}^{10} 6^i = \dfrac{6^{11} - 1}{6 - 1} = 72559411$

Задача

Из какого количества элементарных событий состоит каждое из следующих случайных событий:

- сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна пятнадцати: (элементарное событие — появление пары однозначных чисел (m,n)) Ответ: 4, события (6,9),(7,8),(8,7),(9,6)
- наудачу выбранная кость из полной игры домино оказалась дублем (элементарное событие — появление кости m:n) Ответ: 7
- наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из листков календаря) Ответ: 11

1.3 Вероятностное пространство

Задача

Студент, изучающий теорию вероятностей, раздобыл отрывной календарь за 2018 год и вырвал в нем наугад одну страницу. Найдите вероятность того, что число на вырванном листке

- кратно шести: $\frac{59}{365}$
- равно 30: $\frac{11}{365}$

Задача

У кривого игрального кубика грани помечены числами от 1 до 6, а вероятность выпадения грани пропорциональна написанному на ней числу. Событие A означает, что выпало число, меньшее пяти; событие B означает, что выпало нечетное число. Найдите вероятности следующих событий:

- $A \cap B$: $\frac{4}{21}$
- $A \cup B$: $\frac{15}{21}$
- $A \setminus B$: $\frac{6}{21}$

Обозначим x - вероятность выпадения "1". Тогда вероятность выпадения "2" - $2x$, "3" - $3x$, "4" - $4x$, "5" - $5x$, "6" - $6x$. Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1, следовательно $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$ и $x = \frac{1}{21}$.

Задача

Пусть события A и B имеют вероятности 0,5 и 0,7 соответственно. Найдите

- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 1.0
- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cup B$: 0.7
- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.5

- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие $A \cap B$: 0.2

Задача

Отметьте верные утверждения. Во всех утверждениях A и B означают случайные события.

- если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$: верно
- $P(A \cap B)$ всегда меньше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cap B)$ может быть больше, чем $P(A)$: не верно
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: верно
- $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$: верно
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) \ - P(B)$: верно
- событие $P(A \cup B)$ означает, что произошли оба события A и B: верно
- если $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: верно

1.4 Немного комбинаторики

Задача

В урне лежат 9 белых шаров и 5 черных. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найдите вероятности следующих событий

- Извлеченные шары одного цвета: $\dfrac{46}{91}$
- Извлеченные шары разных цветов: $\dfrac{45}{91}$

Задача

На карточках написаны все трехзначные числа, каждое по одному разу. Сколькими способами можно выбрать три карточки с четной суммой.

Сумма будет чётной, если все три карточки чётные или одна чётная и две нечётные. Всего карточек 900 (100...999). Чётных и нечётных ровно половина. Тогда три чётных карточек можно выбрать $\binom{450}{3} =$

$\dfrac{450 * 449 * 448}{3 * 2} = 15086400$ способами. Одну чётную и две нечётных карточек можно выбрать $\binom{450}{1}\binom{450}{2} = 45461250$ способами. Всего $15086400 + 45461250 = 60547650$ способов.

Задача

В чемпионате России по футболу участвует 16 команд. Назовем итоги двух первенств похожими, если в них совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей; команды занявшие четвертые места (они получают право играть в европейских кубках), команды занявшие 13-е места, команды занявшие 14-е места (эти команды играют стыковые матчи); а также команды напрямую покидающие премьер-лигу (т.е. команды, занявшие последнее и предпоследнее места). Сколько существует попарно непохожих итогов чемпионата?

На первое место можно поставить команду шестнадцатью способами, на второе 15-ю, на третье 14-ю, на четвёртое 13-ю, на тринадцатое 12-ю, на четырнадцатое 11-ю. По условию задачи для команд занявших предпоследнее и последнее места порядок не важен, поэтому остаётся ещё выбрать 2 команды из оставшихся 10 - это $\binom{10}{2}$ способов. Всего способов $\binom{10}{2} * 16 * 15 * 14 * 13 * 12 * 11 = 259459200$

Задача

В программе к экзамену по теории вероятностей 75 вопросов. Студент знает 50 из них. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает хотя бы два вопроса из вытянутого им билета. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Всего вариантов составить билеты по три вопроса из 75 вопросов $\binom{75}{3} = 67525$.

Вариантов что в билете будут два вопроса из 50 (знает ответ) и один из 25 (не знает ответа) $\binom{50}{2}\binom{25}{1} = 30625$.

Вариантов что в билете будут три вопроса из 50 (знает ответ) $\binom{50}{3} = 19600$.

Подходят оба варианта, тогда искомая вероятность $\dfrac{19600 + 30625}{67525} = \dfrac{2009}{2701}$.

Задача

Пусть $n \geqslant 3$. Шарики занумерованы числами от 1 до n. Найдите количество способов эти n шариков разместить в n разных ящиков так, чтобы ровно один ящик оказался пустым.

Выбираем пустой ящик - n способов.

Выбираем ящик для двух шариков - (n-1) способов.

Выбираем два шарика - $\binom{n}{2}$ способов.

Остальные (n-2) шарика переставляем по (n-2) ящикам - $(n-2)!$.

Ответ получается перемножением $n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! = \dfrac{n(n-1)}{2}n!$

Задача

Из колоды в 52 карты наугад взяли 6 карт. Найдите вероятности событий

- среди выбранных карт по три карты двух разных мастей: $\dfrac{490776}{20358520}$
- среди выбранных карт не более двух бубновых карт: $\dfrac{17163042}{20358520}$

Всего вариантов $\binom{52}{6} = 20358520$

Первый вопрос: выбираем две масти $\binom{4}{2}$. Для каждой масти выбираем три карты $\binom{13}{3}$. Тогда число удовлетворительных результатов $\binom{4}{2}\binom{13}{3}^2 = 490776$.

Второй вопрос: не выбрать бубновую масть $\binom{39}{6} = 3262623$ способов. Выбрать только одну карту бубновой масти $\binom{13}{1}\binom{39}{5} = 7484841$ способов. Выбрать две карты бубновой масти $\binom{13}{2}\binom{39}{4} = 6415578$ способов. Всего $3262623 + 7484841 + 6415578 = 17163042$.

1.5 Условная вероятность

Задача

В урне 11 красных, 10 синих и 9 зеленых шаров. Из нее последовательно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что первый шар окажется красным, второй — синим, а третий — зеленым. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Первый способ Элементарные события - упорядоченные тройки шаров. Всего таких троек $A_{30}^3 = 30 * 29 * 28 = 24360$. Количество способов выбрать на первое место красный шар $\binom{11}{1} = 11$, на второе место синий шар $\binom{10}{1} = 10$, на третье место зелёный шар $\binom{9}{1} = 9$. Тогда вероятность равна $\dfrac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \dfrac{33}{812}$.

Второй способ Обозначим события: A - первый выташенный шар красный, B - второй вытащенный шар синий, C - третий вытащенный шар зелёный. Надо найти вероятность того, что одновременно произошли все три события A, B и C.

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Событие A - все тройки с первым красным шаром. Таких троек $11 * 29 * 28$. Тогда

$$P(A) = \frac{11 * 29 * 28}{A_{20}^3} = \frac{11 * 29 * 28}{30 * 29 * 28} = \frac{11}{30}$$

Событие D при условии A, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, а второй синий. Таких троек $11 * 10 * 28$. Тогда

$$P(B|A) = \frac{11 * 10 * 28}{11 * 29 * 28} = \frac{10}{29}$$

и

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{11}{30}\frac{10}{29} = \frac{11 * 10}{30 * 29}$$

Событие C при условии A и B, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, второй шар уже выбран и он синий, а третий шар зелёный синий. Таких троек $11 * 10 * 9$. Тогда

$$P(C|(A \cap B)) = \frac{11 * 10 * 9}{11 * 10 * 28} = \frac{9}{28}$$

Окончательно получаем

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B) = \frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$$

Задача

Четыре человека A, B, C и D становятся в очередь в случайном порядке. Найдите

1.6 Теорема Баейса

1.7 Независимые события

1.8 Схема Бернулли

1.9 Краткие сведения из математического анализа

2 Элементарная теория вероятностей: случайные величины