

# Изучаем TeorVer Stepic

25 августа 2018 г.

## 1 Элементарная теория вероятностей: случайные события

### 1.1 Обзор

### 1.2 Вероятностная модель эксперимента

#### Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующих испытаний:

- производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10: 11
- три раза подбрасывается игральная кость:  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- наудачу извлекается одна кость из полной игры домино: 28

#### Задача

Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующего испытания: производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10, а затем столько раз кидается игральная кость, сколько очков выбито на мишени.

Возможные исходы:

- выстрел в "молоко" - кубик не подбрасывается - количество исходов 1
- выстрел в "1" - кубик подбрасывается 1 раз - количество исходов 6

- выстрел в "2" - кубик подбрасывается 2 раза - количество исходов  $6^2$
- выстрел в "3" - кубик подбрасывается 3 раза - количество исходов  $6^3$
- выстрел в "4" - кубик подбрасывается 4 раза - количество исходов  $6^4$
- выстрел в "5" - кубик подбрасывается 5 раз - количество исходов  $6^5$
- выстрел в "6" - кубик подбрасывается 6 раз - количество исходов  $6^6$
- выстрел в "7" - кубик подбрасывается 7 раз - количество исходов  $6^7$
- выстрел в "8" - кубик подбрасывается 8 раз - количество исходов  $6^8$
- выстрел в "9" - кубик подбрасывается 9 раз - количество исходов  $6^9$
- выстрел в "10" - кубик подбрасывается 10 раз - количество исходов  $6^{10}$

Тогда всего элементарных событий  $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 + 6^7 + 6^8 + 6^9 + 6^{10} = \sum_{i=0}^{10} 6^i = \frac{6^{11} - 1}{6 - 1} = 72559411$

### Задача

Из какого количества элементарных событий состоит каждое из следующих случайных событий:

- сумму двух наудачу выбранных однозначных чисел равна пятнадцати: (элементарное событие — появление пары однозначных чисел  $(m, n)$ ) Ответ: 4, события  $(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)$
- наудачу выбранная кость из полной игры домино оказалась дублем (элементарное событие — появление кости  $m:n$ ) Ответ: 7
- наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из листков календаря) Ответ: 11

### 1.3 Вероятностное пространство

#### Задача

Студент, изучающий теорию вероятностей, раздобыл отрывной календарь за 2018 год и вырвал в нем наугад одну страницу. Найдите вероятность того, что число на вырванном листке

- кратно шести:  $\frac{59}{365}$
- равно 30:  $\frac{11}{365}$

#### Задача

У кривого игрального кубика грани помечены числами от 1 до 6, а вероятность выпадения грани пропорциональна написанному на ней числу. Событие  $A$  означает, что выпало число, меньшее пяти; событие  $B$  означает, что выпало нечетное число. Найдите вероятности следующих событий:

- $A \cap B$ :  $\frac{4}{21}$
- $A \cup B$ :  $\frac{15}{21}$
- $A \setminus B$ :  $\frac{6}{21}$

Обозначим  $x$  - вероятность выпадения "1". Тогда вероятность выпадения "2" -  $2x$ , "3" -  $3x$ , "4" -  $4x$ , "5" -  $5x$ , "6" -  $6x$ . Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1, следовательно  $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$  и  $x = \frac{1}{21}$ .

#### Задача

Пусть события  $A$  и  $B$  имеют вероятности 0,5 и 0,7 соответственно. Найдите

- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие  $A \cup B$ : 1.0
- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие  $A \cup B$ : 0.7
- Наибольшую вероятность, которую может иметь событие  $A \cap B$ : 0.5

- Наименьшую вероятность, которую может иметь событие  $A \cap B$ : 0.2

### Задача

Отметьте верные утверждения. Во всех утверждениях  $A$  и  $B$  означают случайные события.

- если  $A \subset B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ : верно
- $P(A \cap B)$  всегда меньше, чем  $P(A)$ : не верно
- $P(A \cap B)$  может быть больше, чем  $P(A)$ : не верно
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ : верно
- $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ : верно
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B)$ : верно
- событие  $P(A \cup B)$  означает, что произошли оба события  $A$  и  $B$ : верно
- если  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ : верно

## 1.4 Немного комбинаторики

### Задача

В урне лежат 9 белых шаров и 5 черных. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найдите вероятности следующих событий

- Извлеченные шары одного цвета:  $\frac{46}{91}$
- Извлеченные шары разных цветов:  $\frac{45}{91}$

### Задача

На карточках написаны все трехзначные числа, каждое по одному разу. Сколькими способами можно выбрать три карточки с четной суммой.

Сумма будет чётной, если все три карточки чётные или одна чётная и две нечётные. Всего карточек 900 (100...999). Чётных и нечётных ровно половина. Тогда три чётных карточек можно выбрать  $\binom{450}{3} =$

$\frac{450 * 449 * 448}{3 * 2} = 15086400$  способами. Одну чётную и две нечётных карточек можно выбрать  $\binom{450}{1} \binom{450}{2} = 45461250$  способами. Всего  $15086400 + 45461250 = 60547650$  способов.

### Задача

В чемпионате России по футболу участвует 16 команд. Назовем итоги двух первенств похожими, если в них совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей; команды занявшие четвертые места (они получают право играть в европейских кубках), команды занявшие 13-е места, команды занявшие 14-е места (эти команды играют стыковые матчи); а также команды напрямую покидающие премьер-лигу (т.е. команды, занявшие последнее и предпоследнее места). Сколько существует попарно непохожих итогов чемпионата?

На первое место можно поставить команду шестнадцатью способами, на второе 15-ю, на третье 14-ю, на четвертое 13-ю, на тринадцатое 12-ю, на четырнадцатое 11-ю. По условию задачи для команд занявших предпоследнее и последнее места порядок не важен, поэтому остаётся ещё выбрать 2 команды из оставшихся 10 - это  $\binom{10}{2}$  способов. Всего способов  $\binom{10}{2} * 16 * 15 * 14 * 13 * 12 * 11 = 259459200$

### Задача

В программе к экзамену по теории вероятностей 75 вопросов. Студент знает 50 из них. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает хотя бы два вопроса из вытянутого им билета. В ответе приведите обыкновенную дробь.

Всего вариантов составить билеты по три вопроса из 75 вопросов  $\binom{75}{3} = 67525$ .

Вариантов что в билете будут два вопроса из 50 (знает ответ) и один из 25 (не знает ответа)  $\binom{50}{2} \binom{25}{1} = 30625$ .

Вариантов что в билете будут три вопроса из 50 (знает ответ)  $\binom{50}{3} = 19600$ .

Подходят оба варианта, тогда искомая вероятность  $\frac{19600 + 30625}{67525} = \frac{2009}{2701}$ .

### Задача

Пусть  $n \geq 3$ . Шарик занумерованы числами от 1 до  $n$ . Найдите количество способов эти  $n$  шариков разместить в  $n$  разных ящиков так, чтобы

ровно один ящик оказался пустым.

Выбираем пустой ящик -  $n$  способов.

Выбираем ящик для двух шариков -  $(n-1)$  способов.

Выбираем два шарика -  $\binom{n}{2}$  способов.

Остальные  $(n-2)$  шарика переставляем по  $(n-2)$  ящикам -  $(n-2)!$ .

Ответ получается перемножением  $n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{2}n!$

## Задача

Из колоды в 52 карты наугад взяли 6 карт. Найдите вероятности событий

- среди выбранных карт по три карты двух разных мастей:  $\frac{490776}{20358520}$
- среди выбранных карт не более двух бубновых карт:  $\frac{17163042}{20358520}$

Всего вариантов  $\binom{52}{6} = 20358520$

Первый вопрос: выбираем две масти  $\binom{4}{2}$ . Для каждой масти выбираем три карты  $\binom{13}{3}$ . Тогда число удовлетворительных результатов  $\binom{4}{2}\binom{13}{3}^2 = 490776$ .

Второй вопрос: не выбрать бубновую масть  $\binom{39}{6} = 3262623$  способов. Выбрать только одну карту бубновой масти  $\binom{13}{1}\binom{39}{5} = 7484841$  способов. Выбрать две карты бубновой масти  $\binom{13}{2}\binom{39}{4} = 6415578$  способов. Всего  $3262623 + 7484841 + 6415578 = 17163042$ .

## 1.5 Условная вероятность

### Задача

В урне 11 красных, 10 синих и 9 зеленых шаров. Из нее последовательно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что первый шар окажется красным, второй — синим, а третий — зеленым. В ответе приведите обыкновенную дробь.

**Первый способ** Элементарные события - упорядоченные тройки шаров. Всего таких троек  $A_{30}^3 = 30 * 29 * 28 = 24360$ . Количество способов выбрать на первое место красный шар  $\binom{11}{1} = 11$ , на второе место синий шар  $\binom{10}{1} = 10$ , на третье место зелёный шар  $\binom{9}{1} = 9$ . Тогда вероятность равна  $\frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$ .

**Второй способ** Обозначим события: А - первый вытащенный шар красный, В - второй вытащенный шар синий, С - третий вытащенный шар зелёный. Надо найти вероятность того, что одновременно произошли все три события А, В и С.

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Событие А - все тройки с первым красным шаром. Таких троек  $11 * 29 * 28$ . Тогда

$$P(A) = \frac{11 * 29 * 28}{A_{20}^3} = \frac{11 * 29 * 28}{30 * 29 * 28} = \frac{11}{30}$$

Событие В при условии А, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, а второй синий. Таких троек  $11 * 10 * 28$ . Тогда

$$P(B|A) = \frac{11 * 10 * 28}{11 * 29 * 28} = \frac{10}{29}$$

и

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{11}{30} \frac{10}{29} = \frac{11 * 10}{30 * 29}$$

Событие С при условии А и В, это все тройки, где первый шар уже выбран и он красный, второй шар уже выбран и он синий, а третий шар зелёный. Таких троек  $11 * 10 * 9$ . Тогда

$$P(C|(A \cap B)) = \frac{11 * 10 * 9}{11 * 10 * 28} = \frac{9}{28}$$

Окончательно получаем

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B))P(A \cap B) = \frac{11 * 10 * 9}{30 * 29 * 28} = \frac{33}{812}$$

### Задача

Четыре человека А, В, С и D становятся в очередь в случайном порядке. Найдите:

- условную вероятность того, что А первый, если В последний:  $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что А первый, если А не последний:  $\frac{1}{3}$
- условную вероятность того, что А первый, если В не последний:  $\frac{2}{9}$
- условную вероятность того, что А первый, если В стоит в очереди позже А:  $\frac{1}{2}$
- условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше В, если известно, что А раньше С:  $\frac{2}{3}$

**1** Событие  $X$  -  $A$  первый,  $Y$  -  $B$  последний. Найти  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ .

Всего четвёрок  $4!$ . Событие  $Y$  - все четвёрки, у которых на последнем месте  $B$ . Таких четвёрок  $3!$ . Среди четвёрок события  $Y$  есть четвёрки события  $X$ , это те четвёрки у которых на первом месте  $A$ . Таких четвёрок  $2!$  - два места фиксированы а остальные два переставляем произвольно.

Тогда искомая вероятность  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$ .

**2** Событие  $X$  -  $A$  первый,  $Y$  -  $A$  не последний. Найти  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ .

Событие  $Y$  - все четвёрки, у которых  $A$  на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок  $3 * 3!$ . Среди этих четвёрок есть те, у которых  $A$  не первом месте, таких троек  $3!$ . Значит искомая вероятность  $P(X|Y) = \frac{1}{3}$ .

**3** Событие  $X$  -  $A$  первый,  $Y$  -  $B$  не последний. Найти  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ .

Событие  $Y$  - все четвёрки, у которых  $B$  на первом, втором или третьем месте. Таких четвёрок  $3 * 3!$ . Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит  $A$ . Таких четвёрок: на первом месте  $A$ , на втором  $B$  - таких  $2!$  или на первом месте  $A$ , на третьем  $B$  - таких  $2!$ , всего  $2 * 2!$ .

Тогда искомая вероятность  $P(X|Y) = \frac{2 * 2!}{3 * 3!} = \frac{2}{9}$ .

**4** Событие  $X$  -  $A$  первый,  $Y$  -  $B$  стоит в очереди позже  $A$ . Найти  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ .

Событие  $Y$  - четвёрки у которых  $A$  на первом месте (таких  $3!$ ), плюс четвёрки у которых  $A$  на втором месте а  $B$  на третьем или четвёртом месте (таких  $2 * 2!$ ), плюс четвёрки у которых  $A$  на третьем месте а  $B$  на четвёртом месте (таких  $2!$ ). Таких четвёрок  $3 * 3!$ . Среди этих четвёрок нам подходят те, где на первом месте стоит  $A$ . Событию  $X$  благоприятствуют только четвёрки у которых  $A$  на первом месте (таких  $3!$ ). Тогда искомая вероятность  $P(X|Y) = \frac{3!}{3! + 2 * 2! + 2!} = \frac{3!}{3! + 3!} = \frac{1}{2}$ .

**5** Событие  $X$  -  $A$  стоит в очереди раньше  $B$ ,  $Y$  -  $A$  стоит в очереди раньше  $C$ . Найти  $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ .

Событие  $Y$  - четвёрки у которых  $A$  на первом месте (таких  $3!$ ), плюс четвёрки у которых  $A$  на втором месте и  $C$  на третьем месте и  $B$  на четвёртом месте (таких  $1$ ), плюс четвёрки у которых  $A$  на втором месте и  $C$  на третьем и  $B$  на первом



месте (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на третьем (таких 1), плюс четвёрки у которых А на втором месте и С на четвёртом месте и В на первом (таких 1), плюс четвёрки у которых А на третьем месте и С на четвёртом месте (таких 2!). Событию Х благоприятствуют только четвёрки у которых А на первом месте (таких  $3! + 1 + 1$ ). Тогда искомая вероятность  $P(X|Y) = \frac{3! + 1 + 1}{3! + 1 + 1 + 1 + 1 + 2!} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ .

### Задача

Игральную кость бросают до тех пор пока не выпадет единица. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

**Решение** Событие А - на втором бросании выпала 1, событие В - потребовалось чётное число бросаний.  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . Событие В - потребовалось 2,4,6... бросаний. Вероятность что потребовалось 2-х бросания  $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ . Вероятность что потребовалось 4-х бросания  $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$ . Вероятность что потребовалось k бросаний (k - чётное)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$ . Тогда вероятность чётного числа бросаний  $P(B) = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$ .

Событие  $A \cap B$  означает что потребовалось 2 бросания и его вероятность содержится в сумме  $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ .

Тогда искомая вероятность  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{11}} = \frac{11}{36}$ .

## 1.6 Теорема Байеса

### Задача

Из полного набора костей домино взята одна кость. Найдите вероятность того, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. В качестве ответа приведите обыкновенную дробь

**Решение** Элементарный исход - упорядоченная пара костей домино при выборе без возвращения. Всего таких упорядоченных пар  $28 \cdot 27 = 756$ .

Обозначим  $A$  событие, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино. Разобьём множество элементарных событий  $\Omega$  на две непересекающиеся части:  $B_1$  первая кость - дубль,  $B_2$  первая кость не дубль. Тогда по формуле полной вероятности  $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$ . Вероятность вытащить первой костью дубль

$$P(B_1) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

Вероятность вытащить первой костью не дубль

$$P(B_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость дубль  $P(A|B_1) = \frac{6}{27}$ , так как первая кость зафиксировала количество очков а в оставшихся 27 костях лишь 6 костей с таким количеством очков. Вероятность того что вторую кость можно приставить к первой если первая кость не дубль  $P(A|B_2) = 2 \cdot \frac{6}{27}$ , так как первая кость зафиксировала два количества очков а в оставшихся 27 костях 6 костей с каждым количеством очков. Тогда  $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{6}{27} \cdot \frac{1}{4} + \frac{12}{27} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{18}$

### Задача

В урне находится  $n$  шаров, некоторые из них белые. Событие  $A_k$  при  $k = 0, 1, \dots, n$  состоит в том, что в урне ровно  $k$  белых шаров. Предположим, что все эти события равновероятны, т.е.  $P(A_0) = P(A_1) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n+1}$ . Пусть  $B$  — событие, состоящее в том, что наугад взятый шар из урны — белый. Найдите  $P(A_k|B)$ .

**Решение** Элементарный исход - вытащен шар из корзины в которой от 0 до n белых шаров. Тогда всё множество элементарных исходов A можно разбить на непересекающиеся подмножества  $A_k$  и применить теорему Байеса:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^n (P(B|A_k) \cdot P(A_k))$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^n (P(B|A_k) \cdot P(A_k)) = P(B|A_0) \cdot P(A_0) + P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n).$$

$$P(B|A_k) = \frac{k}{n}$$

$$\text{Тогда } P(B) = \frac{0}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1 + \dots + n) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{и } P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

### Задача

В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий вытачивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0,5. Во вторник этот показатель снижается до 0,2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней? В качестве ответа приведите обыкновенную дробь.

**Решение** Элементарное событие - выбран шуруп из множества всех шурупов. Разобьём множество всех шурупов A на непересекающиеся множества шурупов сделанных в понедельник  $A_1$ , во вторник  $A_2$ , в среду или четверг или пятницу  $A_3$ . Применим теорему Байеса.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 (P(B|A_k) \cdot P(A_k))$$

Всего сделано шурупов  $x + 4 \cdot 2 \cdot x = 9x$ , где  $x$  - число шурупов сделанных в понедельник.

$$\text{Тогда } P(A_1) = \frac{1}{9}, P(A_2) = \frac{2}{9}, P(A_3) = \frac{6}{9}.$$

$$\text{По условию задачи } P(B|A_1) = \frac{1}{2}, P(B|A_2) = \frac{1}{5}, P(B|A_3) = \frac{1}{10}$$

$$\text{И получаем } P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9}} = \frac{1}{3}$$

### Задача

Даны натуральные числа  $m$  и  $n$ , причем  $m < n$ . Из чисел  $1, 2, \dots, n$  последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше  $m$ .

**Решение** Элементарный исход - упорядоченная пара чисел. Количество способов выбрать первое число  $\frac{1}{n}$ , количество способов выбрать второе число  $\frac{1}{n-1}$ . Всего элементарных исходов  $\frac{1}{n(n-1)}$ .

Обозначим первое выбранное число  $a$ , второе число  $b$ . Если выбрано число  $a$ , то благоприятному исходу удовлетворяет такое число  $b$  что  $(a - b) \geq m$  или  $b \leq (a - m)$ . Вероятность при условии что  $a = i$  выбрать "хорошее" число  $b$  равна 0 при  $i \leq m$  и  $P(b_{\text{good}}|a = i) = \frac{i - m}{n - 1}$  при  $i > m$ .

Тогда вероятность  $P(b_{\text{good}}) = P(b_{\text{good}}|a = 1) \cdot P(a = 1) + P(b_{\text{good}}|a = 2) \cdot P(a = 2) + P(b_{\text{good}}|a = 3) \cdot P(a = 3) + \dots + P(b_{\text{good}}|a = n) \cdot P(a = n) = \sum_{i>m}^n (P(b_{\text{good}}|a = i) \cdot P(a = i))$ . Подставляя ранее найденные вероятности выбора первого числа  $a$  равной  $\frac{1}{n}$  и  $P(b_{\text{good}}|a = i) = \frac{i - m}{n - 1}$  получим что искомая вероятность выбора "хорошего" числа  $b$  равна

$$\sum_{i>m}^n (P(b_{\text{good}}|a = i) \cdot P(a = i)) = \sum_{i>m}^n \left( \frac{i - m}{n - 1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n - 1} \cdot (1 + 2 + \dots + (n - m)) = \frac{(n - m)(n - m + 1)}{2n(n - 1)}.$$

### Задача

Дано натуральное число  $n < 52$ . Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты одновременно были взяты  $n$  карт. На одну из этих  $n$  карт посмотрели, она оказалась тузом. После этого она возвращается в набор взятых карт и эти  $n$  карт перемешиваются. После этого из них выбирается одна карта и открывается. Найдите вероятность того, что открытая карта является тузом.

**Решение Способ 1** Обозначим  $A$  - повторно из набора  $n$  карт выбирается туз,  $B_1$  повторно из набора  $n$  карт выбирается та-же самая карта,  $B_2$  повторно из набора  $n$  карт выбирается другая карта. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

Вероятность выбрать ту-же карту из набора  $n$  карт  $P(B_1)$  равна  $\frac{1}{n}$ , а вероятность что эта карта при этом условии окажется тузом  $P(A|B_1)$  равна 1. Поэтому первое слагаемое равно  $\frac{1}{n}$ .

Вероятность выбрать другую карту из набора  $n$  карт  $P(B_2)$  равна  $\frac{n-1}{n}$ . Обозначим туз который видели в наборе туз1. Рассмотрим подробнее вероятность вытащить какой-то конкретный туз2 при этом условии  $P(A|B_2)$  (это не туз1!). Эту вероятность можно найти по формуле полной вероятности рассмотрев два случая: туз2 попал в набор и туз2 не попал в набор. Если туз2 не попал в набор, то вероятность вытащить его равна 0. Тогда осталось найти вероятность того что этот туз2 попал в набор и умножить на вероятность вытащить туз2 из набора. Известно, что в наборе из  $n$  карт есть туз1. Таких наборов в колоде из 52 карт существует  $\binom{51}{n-1}$ . Наборов в которых есть туз2 существует  $\binom{50}{n-2}$ . Тогда вероятность попадания туз2 в набор равна  $\frac{\binom{50}{n-2}}{\binom{51}{n-1}} = \frac{n-1}{51}$ . Вероятность вытащить туз2 из набора при дополнительном условии что это не туз1 равна  $\frac{1}{n-1}$ . Тогда вероятность вытащить туз2 при условии что вытащили не туз1 равна  $\frac{n-1}{51} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{51}$ . Кроме туз2 есть ещё два туза в колоде, поэтому вероятность вытащить туз при условии что это не туз1  $P(A|B_2)$  равна  $\frac{3}{51}$ . Тогда  $P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{51} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{3(n-1)}{51n}$  и

окончательно

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{51n}$$

В ходе решения продемонстрирован простой факт, вероятность того что конкретная карта из колоды из  $n$  карт попала в набор из  $m < n$  карт равна  $\frac{m}{n}$ . Вероятность вытащить карту из набора равна  $\frac{1}{m}$ . Получается что вероятность вытащить карту из набора равна вероятности вытащить карту из колоды. Это совпадает со случаем в задаче вытащить другую карту. Ищем вероятность вытащить другую карту при этом первая карта исключается из рассмотрения и сводится к вероятности вытащить туза из 51 карты с тремя тузами.

**Решение Способ 2** Известно что из колоды в 52 карты выбран набор из  $0 < n < 52$  карт и в этом наборе есть какой-то конкретный туз, обозначим его туз1.

Сколько всего существует таких наборов из  $n$  карт таких, что в них есть этот конкретный туз? К туз1 надо добавить  $n - 1$  карт из 51. Таких наборов ровно  $\binom{51}{n-1}$ .

Сколько существует таких наборов с ровно одним тузом (это будет туз1)? Таких наборов  $\binom{3}{0} \cdot \binom{48}{n-1}$ . Вероятность выбрать туз и набора  $n$  карт если там один туз равна  $\frac{1}{n}$ .

Сколько существует таких наборов с ровно двумя тузами (это будет туз1 и ещё один из трёх других тузов)? Таких наборов  $\binom{3}{1} \cdot \binom{48}{n-2}$ . Вероятность выбрать туз и набора  $n$  карт если там два туза равна  $\frac{2}{n}$ .

Сколько существует таких наборов с ровно тремя тузами (это будет туз1 и ещё два из трёх других тузов)? Таких наборов  $\binom{3}{2} \cdot \binom{48}{n-3}$ . Вероятность выбрать туз и набора  $n$  карт если там три туза равна  $\frac{3}{n}$ .

Сколько существует таких наборов с ровно четырьмя тузами (это будет туз1 и все три из трёх других тузов)? Таких наборов  $\binom{3}{3} \cdot \binom{48}{n-4}$ . Вероятность выбрать туз и набора  $n$  карт если там четыре туза равна  $\frac{4}{n}$ .

По формуле полной вероятности получаем что вероятность вытянуть туз будет равна сумме произведений вероятностей вытянуть туз из набора с фиксированным количеством  $i$  тузов на вероятность что в наборе ровно  $i$  тузов.

$$P = \frac{1}{n \binom{51}{n-1}} \left( \binom{3}{0} \binom{48}{n-1} + 2 \binom{3}{1} \binom{48}{n-2} + 3 \binom{3}{2} \binom{48}{n-3} + 4 \binom{3}{3} \binom{48}{n-4} \right)$$

Преобразуем дальше и получим

$$P = \frac{1}{n \binom{51}{n-1}} \left( \binom{48}{n-1} + 6 \binom{48}{n-2} + 9 \binom{48}{n-3} + 4 \binom{48}{n-4} \right)$$

Преобразуя дальше можно получить

$$P = \frac{1}{n \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} ((52-n)(51-n)(50-n) + 6(52-n)(51-n)(n-1)) + \frac{1}{n \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} (9(52-n)(n-1)(n-2) + 4(n-1)(n-2)(n-3))$$

## 1.7 Независимые события

## 1.8 Схема Бернулли

## 1.9 Краткие сведения из математического анализа

# 2 Элементарная теория вероятностей: случайные величины