

Symetria zewnętrzna kryształów - grupy punktowe

- Definicja grupy punktowej
- Kombinacja obrotu wokół osi n -krotnej właściwej:
 - z obrotem wokół prostopadłej osi 2-krotnej
 - z odbiciem w środku symetrii
 - z odbiciem w równoległej płaszczyźnie symetrii
- Grupy punktowe w poszczególnych układach krystalograficznych
- Centrosymetryczne i niecentrosymetryczne grupy punktowe
- Grupy punktowe w układzie regularnym

Grupy punktowe - definicja

❑ Elementy symetrii w budowie zewnętrznej kryształów:

$\bar{1}$ m 1 2 3 4 6 $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$

❑ Definicja:

Grupa punktowa – kombinacja operacji symetrii, które mają przynajmniej 1 punkt niezmienny (*tzn. wspólny*).

Oryginalne (*tzn. niedublujące się*) kombinacje operacji symetrii w kryształach prowadzą do **32 grup punktowych**.

Grupa punktowa jest tworzona przez operacje symetrii, a nie przez elementy symetrii i spełnia matematyczną definicję grupy.

Klasa krystalograficzna – określa rodzaj symetrii kryształu.

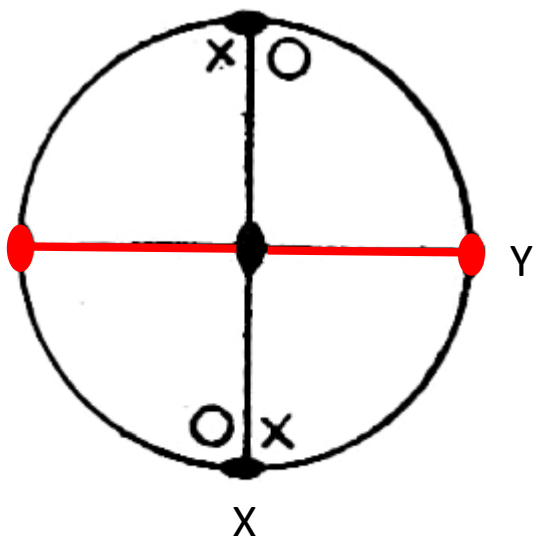
Każda grupa punktowa ma swój symbol.

Współcześnie stosuje się symbole Hermanna-Mauguina, zwane również symbolami międzynarodowymi.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii

□ Kombinacja obrotu wokół osi n-krotnej właściwej (2, 3, 4, 6) z obrotem wokół prostopadłej osi 2:

□ Kombinacja obrotu wokół osi 2 z obrotem wokół prostopadłej osi 2:



Definicje:

- elementy pierwotne, elementy generujące, generatory – z ich istnienia wynika istnienie innych elementów symetrii
- elementy wtórne, elementy wygenerowane – ich istnienie wynika z istnienia innych elementów symetrii

Element wtórny: oś 2 (zaznaczona kolorem czerwonym)

Układ krystalograficzny: rombowy (dlaczego? trzy osie dwukrotne wzajemnie prostopadłe)

Symbol grupy punktowej (i klasy krystalograficznej): pierwsze miejsce w symbolu: X

drugie miejsce w symbolu: Y

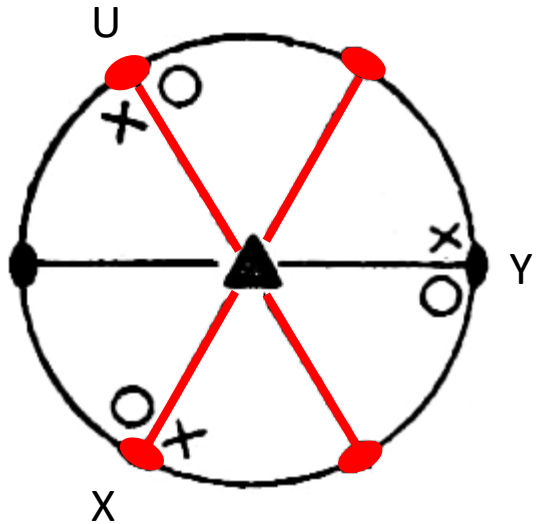
trzecie miejsce w symbolu: Z

222

Na rysunku widać wartości kątów między osiami krystalograficznymi – **układ rombowy jest prostokątny**.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

❑ Kombinacja obrotu wokół osi 3 z obrotem wokół prostopadłej osi 2:



Elementy wtórne: dwie osie 2 (zaznaczone kolorem czerwonym)

Układ krystalograficzny: trygonalny (dlaczego? jedna oś trójkrotna))

Symbol grupy punktowej (i klasy krystalograficznej): pierwsze miejsce w symbolu: Z

drugie miejsce w symbolu: X, Y, U

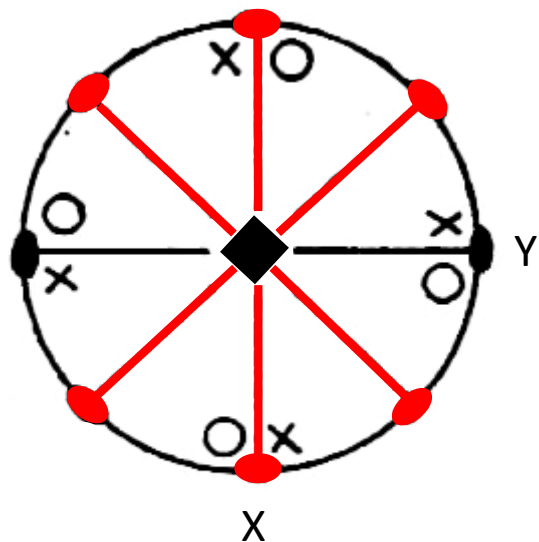
trzecie miejsce w symbolu: puste

32

Na rysunku widać wartości kątów między osiami krystalograficznymi – **układ trygonalny nie jest prostokątny**.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

❑ Kombinacja obrotu wokół osi 4 z obrotem wokół prostopadłej osi 2:



Elementy wtórne: trzy osie 2 (zaznaczone kolorem czerwonym)

Układ krystalograficzny: tetragonalny (dlaczego? Jedna oś czterokrotna)

Symbol grupy punktowej (i klasy krystalograficznej): pierwsze miejsce w symbolu: Z

drugie miejsce w symbolu: X, Y,

trzecie miejsce w symbolu: dwusieczne kątów

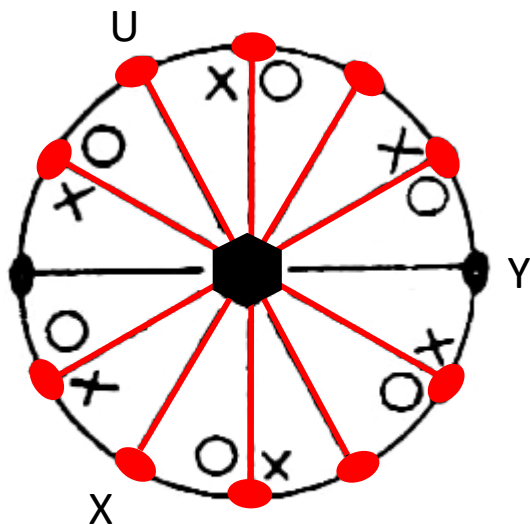
między osiami X i Y

422

Na rysunku widać wartości kątów między osiami krystalograficznymi – **układ tetragonalny jest prostokątny**.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

❑ Kombinacja obrotu wokół osi 6 z obrotem wokół prostopadłej osi 2:



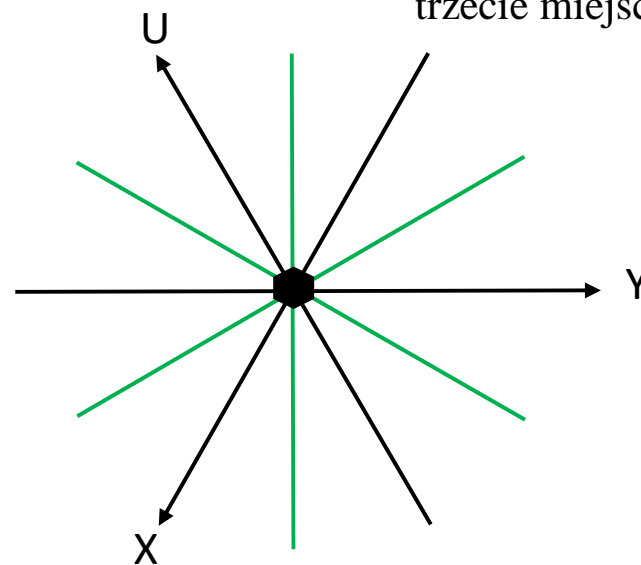
Elementy wtórne: pięć osi 2 (zaznaczone kolorem czerwonym)

Układ krystalograficzny: heksagonalny (dlaczego? oś sześciokrotna)

Symbol grupy punktowej (i klasy krystalograficznej): pierwsze miejsce w symbolu: Z

drugie miejsce w symbolu: X, Y, U

trzecie miejsce w symbolu: kierunki oznaczone
poniżej kolorem zielonym

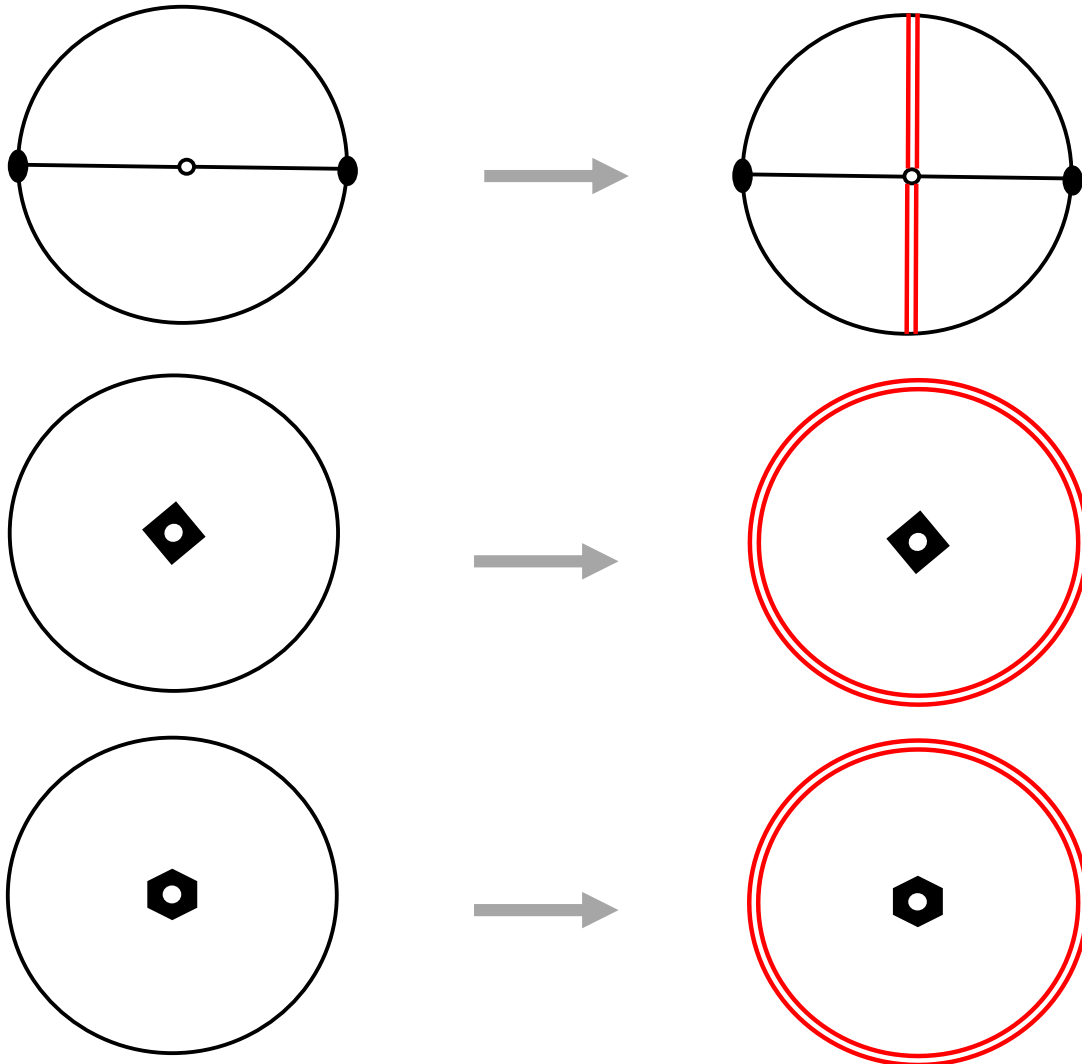


622

Na rysunku widać wartości kątów między osiami krystalograficznymi – **układ heksagonalny nie jest prostokątny**.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

- ❑ Kombinacja obrotu wokół osi parzystokrotnej właściwej (2, 4, 6) i odbicia w środku symetrii:
- ❑ Kombinacja obrotu wokół osi nieparzystokrotnej właściwej (3) i odbicia w środku symetrii:



Wnioski:

- Generuje się płaszczyzna symetrii prostopadła do osi parzystokrotnej.

**Trzy elementy symetrii zawsze współlistnieją:
oś parzystokrotna, środek symetrii i płaszczyzna
symetrii prostopadła do osi.**

- Oś trójkrotna właściwa staje się osią trójkrotną inwersyjną.

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

Zatem jeśli do następujących grup punktowych dodamy operację odbicia w środku symetrii, to wygenerują się następujące grupy punktowe o tzw. symbolach pełnych:

- $222 \rightarrow 2/m2/m2/m$
- $32 \rightarrow \bar{3}2/m$
- $422 \rightarrow 4/m2/m2/m$
- $622 \rightarrow 6/m2/m2/m$

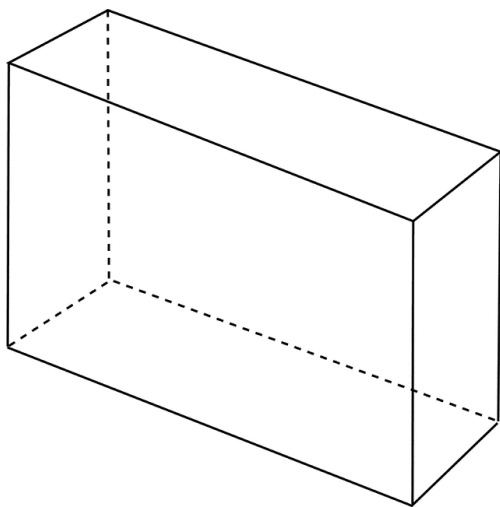
Symbole pełne nie są używane. Stosuje się tzw. symbole skrócone. Stosowane skracanie:

- $2/m \rightarrow m$
- w układzie regularnym dodatkowo skracamy $4/m \rightarrow m$
- w układzie jednoskośnym nie skracamy (dlaczego? symbol skrócony nie zawierałby kompletu generatorów)

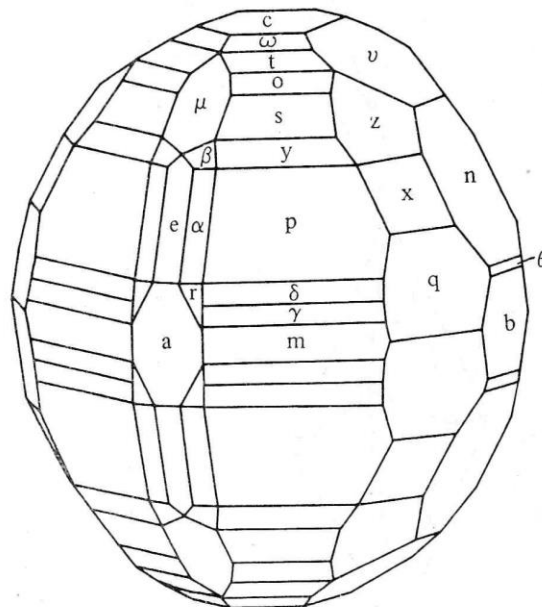
Symbole skrócone dla powyższych symboli pełnych:

- mmm
- $\bar{3}m$
- $4/mmm$
- $6/mmm$

Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)



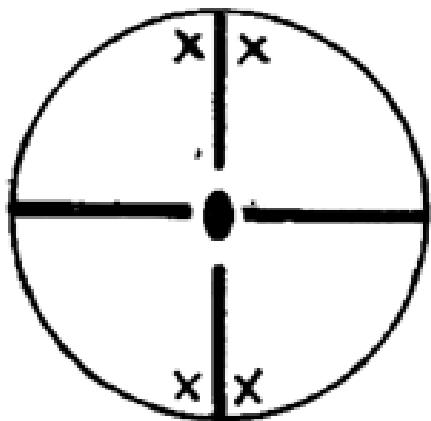
Pudełko zapalek
Grupa punktowa mmm



Kryształ siarki rombowej
Grupa punktowa mmm

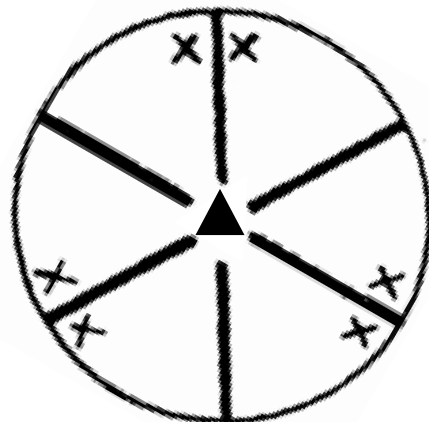
Grupy punktowe – kombinacja operacji symetrii (cd.)

- Kombinacja obrotu wokół osi właściwej (2, 3, 4, 6) i odbicia w równoległej płaszczyźnie symetrii:

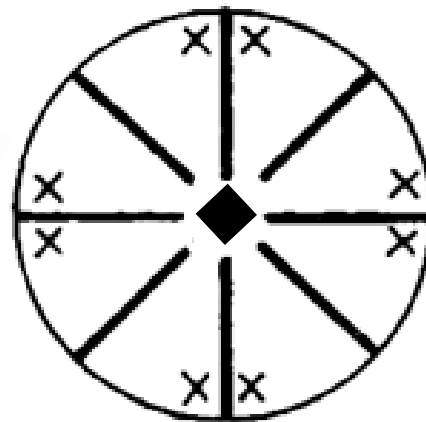


$2\ mm$

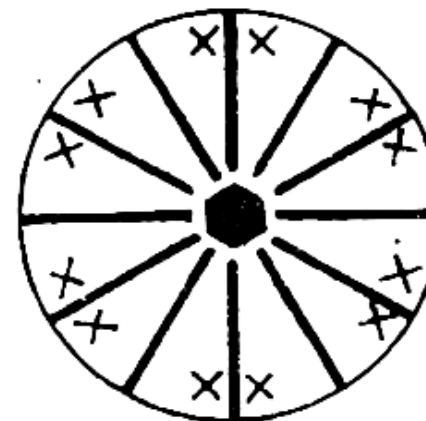
$mm2$



$3\ m$



$4\ mm$



$6\ mm$

*Płaszczyzny symetrii
zaznaczono
grubą kreską*

Grupy punktowe w układach krystalograficznych

□ Grupy punktowe w poszczególnych układach krystalograficznych:

Trójskośny: 1, $\bar{1}$

Jednoskośny: 2, m, 2/m

Rombowy: 222, mm2, mmm

mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 2/m2/m2/m

Tetragonalny: 4, $\bar{4}$, 4/m, 422, 4mm, 4/mmm, $\bar{4}2m$

4/mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 4/m2/m2/m

Trygonalny: 3, $\bar{3}$, 32, 3m, $\bar{3}m$

$\bar{3}m$ - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego $\bar{3}2/m$

Heksagonalny: 6, $\bar{6}$, 6/m, 622, 6mm, 6/mmm, $\bar{6}2m$

6/mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 6/m2/m2/m

Regularny: 23, $m\bar{3}$, 432, 43m, $m\bar{3}m$ - omówione na dalszych slajdach

$m\bar{3}$ - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego $2/m\bar{3}$

$m\bar{3}m$ symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego $4/m\bar{3}2/m$

W sumie 6 grup punktowych posiada symbol skrócony.

Centrosymetryczne grupy punktowe

- 11 centrosymetrycznych grup punktowych: ($\bar{1}$; oś parzystokrotna i prostopadła płaszczyzna symetrii; $\bar{3}$)
podświetlone żółtym kolorem

Trójskośny: 1, $\bar{1}$

Jednoskośny: 2, m, 2/m

Rombowy: 222, mm2, mmm

mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 2/m2/m2/m

Tetragonalny: 4, $\bar{4}$, 4/m, 422, 4mm, 4/mmm, $\bar{4}2m$

4/mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 4/m2/m2/m

Trygonalny: 3, $\bar{3}$, 32, 3m, $\bar{3}m$

$\bar{3}m$ - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego $\bar{3}2/m$

Heksagonalny: 6, $\bar{6}$, 6/m, 622, 6mm, 6/mmm, $\bar{6}2m$

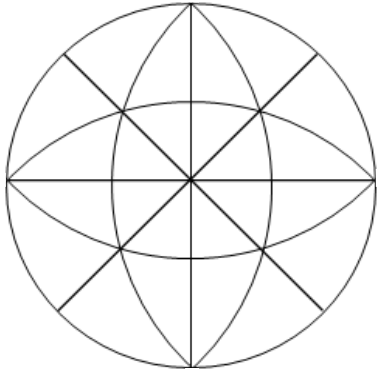
6/mmm - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 6/m2/m2/m

Regularny: 23, $m\bar{3}$, 432, $\bar{4}3m$, $m\bar{3}m$

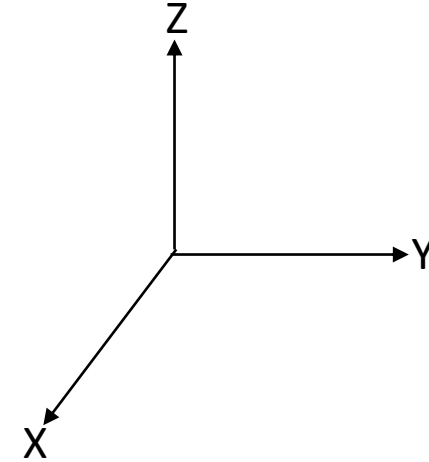
$m\bar{3}$ - symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 2/m $\bar{3}$

$m\bar{3}m$ symbol skrócony pochodzący od symbolu pełnego 4/m $\bar{3}2/m$

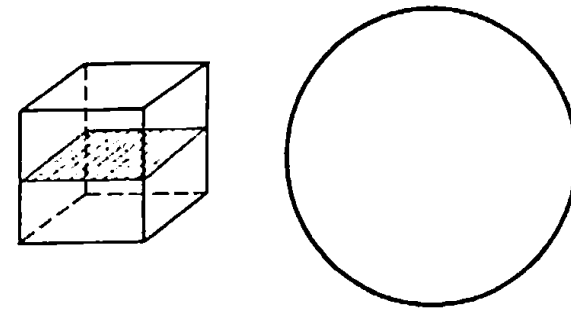
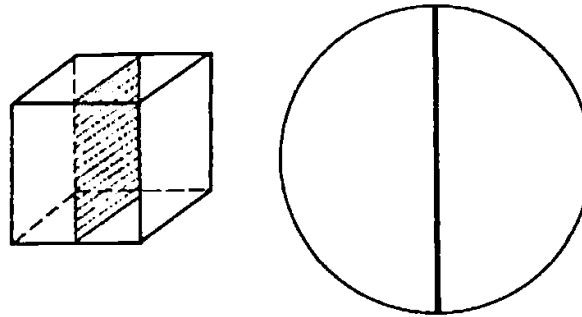
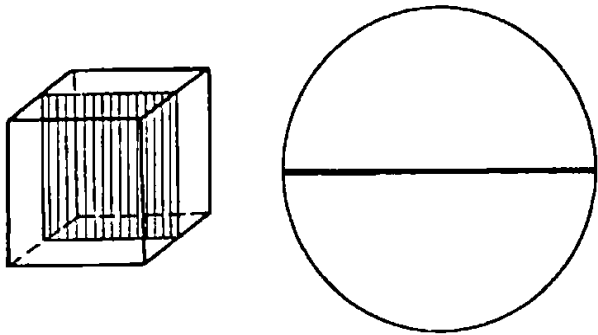
Grupy punktowe w układzie regularnym



Rzut trójkątów sferycznych
na kole projekcji

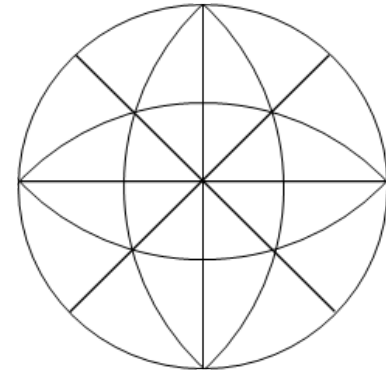
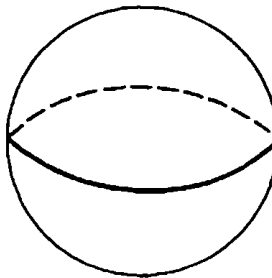
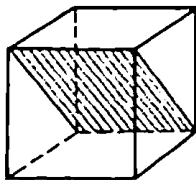
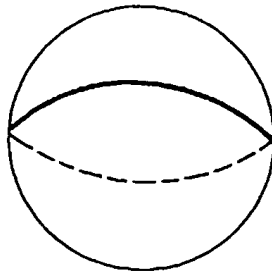
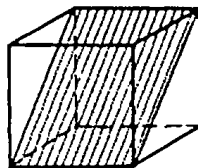
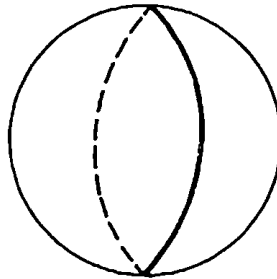
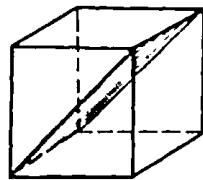
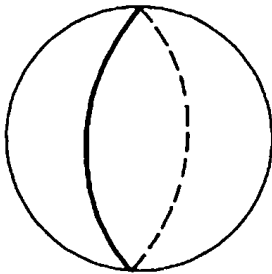
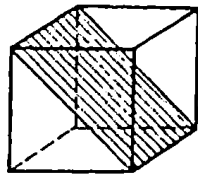
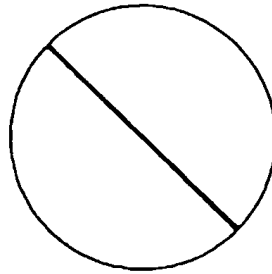
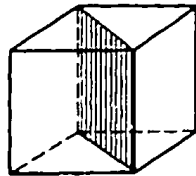
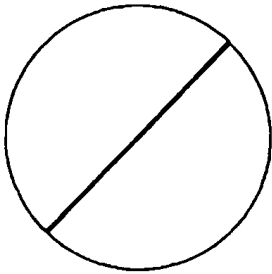
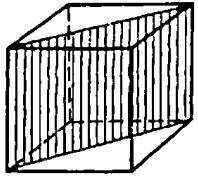


Skąd się biorą trójkąty sferyczne:

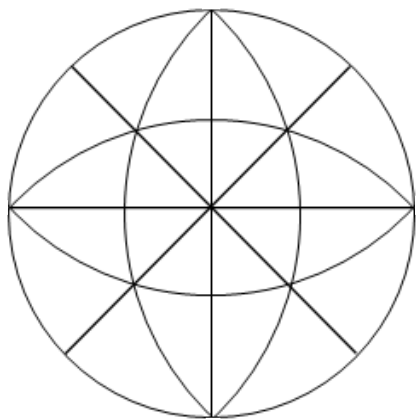


Grupy punktowe w układzie regularnym (cd.)

Skąd się biorą trójkąty sferyczne - ciąg dalszy:



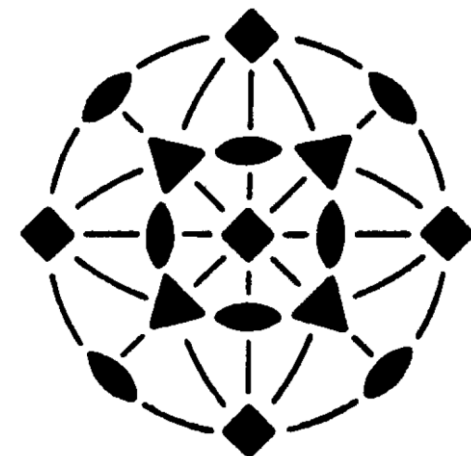
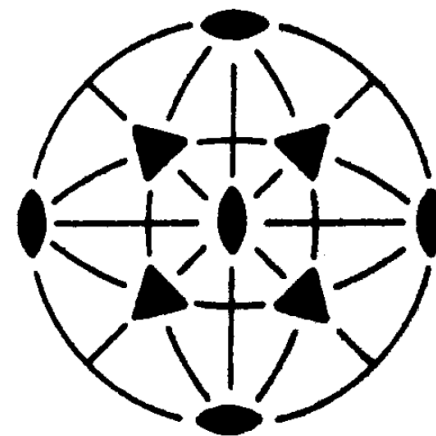
Grupy punktowe w układzie regularnym (cd.)



Osie trójkrotne – w przecięciu trzech kół wielkich

Osie czterokrotne – w przecięciu czterech kół wielkich

Osie dwukrotne – w przecięciu dwóch albo czterech kół wielkich

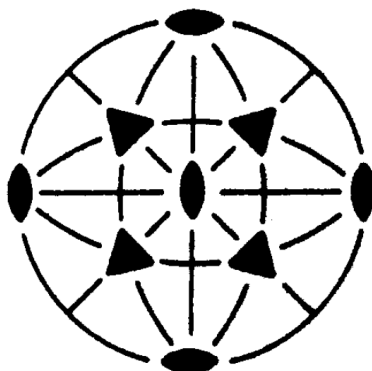


Symbole grup punktowych w układzie regularnym:

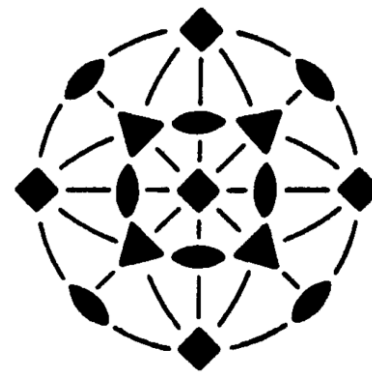
- Pierwsze miejsce: X, Y, Z (trzy kierunki)
- Drugie miejsce: kierunki przekątnych przestrzennych sześcianu (cztery kierunki)
- Trzecie miejsce: kierunki dwusiecznych kątów między osiami X, Y, Z (przekątne ścian sześcianu) (6 kierunków)

Przykład 1.

Jaki będzie symbol grupy punktowej?



23



432

Grupy punktowe w układzie regularnym (cd.)

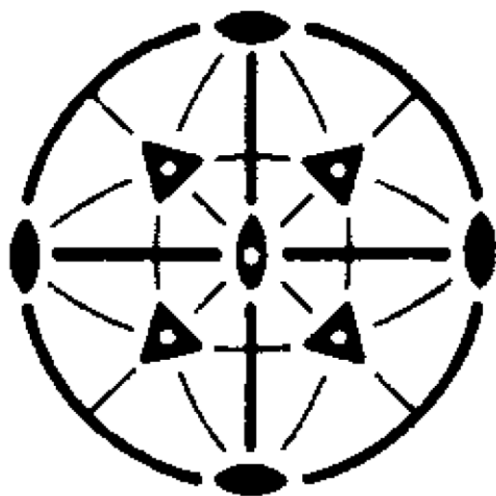
□ Istnieje 5 grup punktowych w układzie regularnym:

23 $m\bar{3}$ 432 $\bar{4}3m$ $m\bar{3}m$ ← symbole skrócone

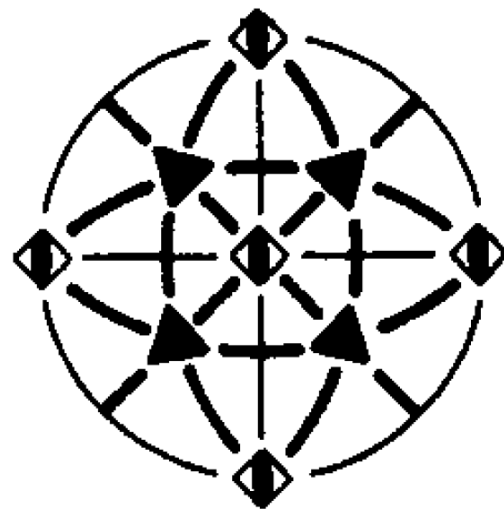
$2/m\bar{3}$ $4/m\bar{3}2/m$ ← symbole pełne

Przykład 2.
Należy zaznaczyć na kole projekcji elementy symetrii występujące w klasach krystalograficznych (grupach punktowych) $m\bar{3}$, $\bar{4}3m$ oraz $m\bar{3}m$.

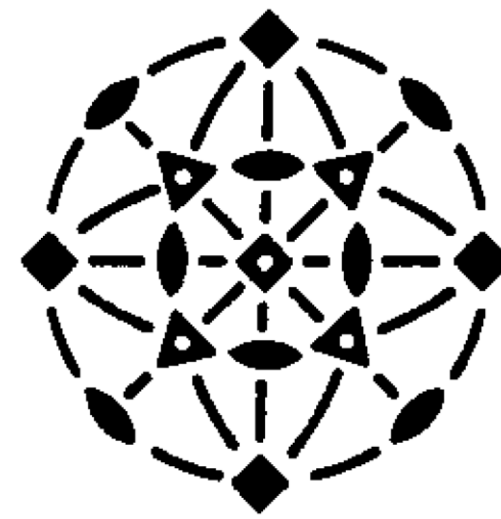
*Na rysunkach grube linie
oznaczają płaszczyzny
symetrii.*



$m\bar{3}$



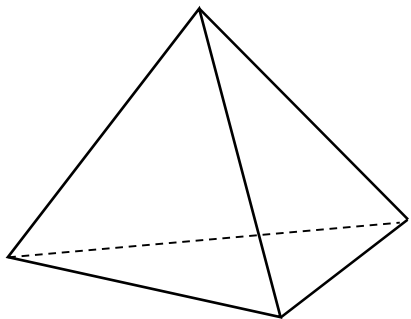
$\bar{4}3m$



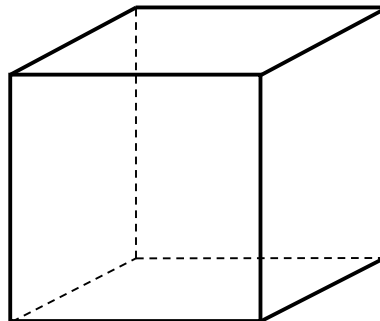
$m\bar{3}m$

Grupy punktowe w układzie regularnym (cd.)

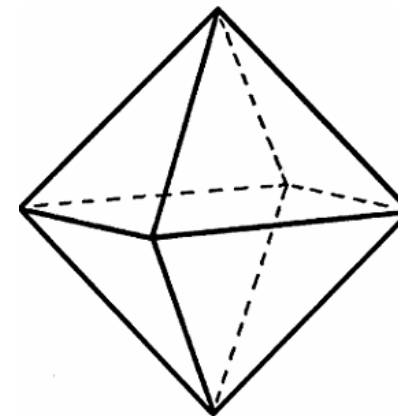
Przykłady kryształów układu regularnego:



$\bar{4}3m$



$m\bar{3}m$



$m\bar{3}m$

Omówione zagadnienia:

- Definicja grupy punktowej
- Kombinacja obrotu wokół osi n -krotnej właściwej:
 - z obrotem wokół prostopadłej osi 2-krotnej
 - z odbiciem w środku symetrii
 - z odbiciem w równoległej płaszczyźnie symetrii
- Grupy punktowe w poszczególnych układach krystalograficznych, w tym w układzie regularnym
- Centrosymetryczne i niecentrosymetryczne grupy punktowe
- Grupy punktowe w układzie regularnym