Содержание

Введение

Ударные волны и аккустические явления

Дёмин Виталий Анатольевич под редакцией Кучинского М.О

Первая пара 09.01.19

Звуковые волны

Уравнение плоской звуковой волны

Звуковой волной называется процесс распространения малых возмущений в веществе. Распространение всегда связано с сжимаемостью. В результате звуковая волна представляет собой систему чередующихся сжатий и разряжений. Эта картина перемещается в пространстве без переноса вещества в первом приближении. То есть перенос вещества эффект вторичный.

Колебания считаются малыми а диссипацию также не рассматривают.

Оказывается что звук не затухает быстро, а тот факт что мы не слышим говорящего связан чисто с его рассеиванием. То есть как было сказано выше причина не в вязкой диссипацие, а в рассеивание.

Если бы не рассеивание то нашу речь можно было бы услышать на десятках километрах.

Но для начала объяснения возьмём уравнение Эйлера, но оно избыточно как это не странно. Избыточно в плане нелинейного слагаемого $(\vec{v}\,\nabla)\vec{v}$ - можно пренебречь если колебания малые (член квадратичен по скорости). То есть пренебрегаем нелинейным слагаемым.

Помимо этого будем рассматривать однородную среду с ρ_0 и p_0 Где эти два слагаемых являются равновестными значениями. А когда мы вносим возмущения появляются слагаемые со штрихом в итоге имеем

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{1}$$

$$p = p_0 + p' \tag{2}$$

То есть слагаемые со штрихом говорят о малом отклонении от равновесного значения, также поправки являются не стационарными. $\rho_0 >> \rho'$ и $p_0 >> p'$ В результате уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p \tag{3}$$

Так как среда однородна то давление $p_0 = 0$, а если разложить в ряд слагаемое $\frac{1}{\rho}$ то в первом приближении получаем $\frac{1}{\rho_0}$. В результате чего имеем:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p' = 0 \tag{4}$$

где $\vec{v}$ - и есть скорость возмущения. Помимо этого запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \tag{5}$$

Вновь расписывая ρ и p получается следующее: слагаемое $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$, а $div(\rho'\vec{v}')$ нелинейна и мала по сравнению с $div(\rho_0\vec{v})$. То есть в итоге получили следующее выражение:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\, div(\vec{v}) = 0 \tag{6}$$

Говоря простым языком мы разложили все в ряд и выделили главные компоненты (основные (играющие главенствующую роль)). Или по простому лиениризовали систему уравнений.

У нас получилось, что каждое слагаемое линейно по величине. И линейную систему всегда можно решить. И решение будет единственным, а решить можно аналитически.

Но у нас 2 уравнения, а неизвестных 3: ρ', p', $\vec{v}$. Нам необходимо замкнуть систему уравнений, чтобы удалось её решить. В роли замыкающего уравнения выступит уравнение состояния. Такие уравнения существуют для газов, а для жидкостей не особо.

Для лучшего понимания , уравнения состояния это зависимость P, V, T, ну например уравнение Менделеева-Клапейрона ну или тип Ван-дер-Вальса.

Будем считать что звук это волна представляющая собой адиабатический процесс. Это говорит о том, что мы можем разложить давление по двум ТД переменным. Пусть одной из них будет энтропия. Тогда выражения для давления примет следующий вид:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho\,' + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho S\,' \tag{7}$$

Второе слагаемое уравнения (7) по определению равно нулю так как такие процессы изотопические, поэтому в итоге имеем:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho\,' \tag{8}$$

Внутренняя энергия переходит в механическую и наоборот. С помощью этого мы замыкаем нашу систему.

И наша система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p' = 0 \\ \frac{\partial \rho\,'}{\partial t} + \rho_0\, div(\vec{v}) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Подставим выражение (8) в уравнение (9) и получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\,\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho\,' = 0 \\ \frac{\partial \rho\,'}{\partial t} + \rho_0\, div(\vec{v}) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Убедимся что эта система звуковой волны.

↬ Рассмотрим звуковую волну $v_x(x,t)$, пусть вектор скорости имеет лишь компоненту x. Это одно из основопологающее отличие от электромагнитной волны, потому что она поперечная.

Мы ищем решение в виде продольной волны.

$$v_x(x,t) \tag{11}$$

$$\rho\,'(x,t) \tag{12}$$

Имеем волну движущуюся вдоль оси x.

Рис. 1: Волна по x

Ищем однородное решение по x и z [под однородностью понимается отсутствие зависимости от x и z, её одинаковость].

$$\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \frac{\partial \rho\,'}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

про diff по времени и получим:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \rho\,'}{\partial t} = 0. \tag{14}$$

А теперь из второго выражения (10) выразим $\frac{\partial \rho\,'}{\partial t}$

$$\frac{\partial \rho\,'}{\partial t} = -\rho_0\, div(\vec{v}) = -\rho_0\, \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{15}$$

Подставим (15) в (14) и получим:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \frac{\partial}{\partial x}\, \rho_0\, \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \tag{16}$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0 \tag{17}$$

Обозначим $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = c^2$, вот и получилось уравнение плоской волны.

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0 \tag{18}$$

Это гиперболическое уравнение мат.физики (существуют три вида:)

- Параболического типа
- Эллиптического типа
- Гиперболического типа

В итоге у нас есть равнение гиперболического типа с 1й неизвестной, но порядок повысился (квадраты и всё такое), уравнение второго порядка по времени и координате.

Получили волновое уравнение гиперболического типа, где c - скорость волны, попрошу внимания "звуковой волны". Теперь решим это уравнение. Решение в отличие от детского сада получим на более высоком уровне.

Так как движения описываемые уравнение Эйлера являются потенциальными. Введём как в электродинамике потенциал. Введём потенциал скорости $\vec{v} = \nabla\varphi$, где φ - потенциал скорости. Через потенциал скорости можно найти все интересующие нас величины.

Из уравнения Эйлера

$$\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p\,' \Rightarrow p\,' \;=\; -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{19}$$

То есть если известно φ - то можно без проблем найти изменение давления колебаний.

Из уравнения состояния (8) имеем $p' = c^2\rho\,'$ и можем выразить плотность $\rho\,'$:

$$\rho\,' = \frac{p\,'}{c^2} = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{20}$$

Вернёмся к уравнению непрерывности (неразрывности) (10) используя $p\,'$.

$$\frac{\partial\rho\,'}{\partial t} + \rho_0\,\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S div(\vec{v}) = 0 \Rightarrow -\rho_0\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S div(grad(\varphi)) = 0 \tag{21}$$

То есть снова пришли к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\triangle\varphi = 0 \tag{22}$$

Вывод потенциал скорости тоже подчиняется волновому уравнению. Найдём для начала решение одномерного уравнения (22), для того чтобы его решить перейдём к переменным $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$. Переработаем уравнение в терминах новых переменных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot 1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{23}$$

Используем это для получения второй производной:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{24}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) = \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{2\,\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} \tag{26}$$

Подобным образом распишем производную по времени:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot c - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot c \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[c\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\right] = c\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - c\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{28}$$

$$= c\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot c - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot c\right) - c\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot c - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot c\right) = \tag{29}$$

$$c^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - c^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} - c^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} + c^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = c^2\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - \frac{2\,\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right] \tag{30}$$

Теперь подставим в уравнение (22), которое записывается в нашем случае следующим образом $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$

В итоге имеем следующее равенство:

$$4c^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi} = 0 \tag{31}$$

Уравнение (31) легко решить. Найдём общее решение этого уравнения.

После первого интегрирования по η получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = f(\xi) \tag{32}$$

Второе интегрирование даёт:

$$\varphi = \underbrace{\int f_1(\xi)d\xi}_{\text{переходит в}\tilde{f}_1(\xi)} + f_2(\eta) \tag{33}$$

Упустим тильду и получим следующее :

$$\varphi = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{34}$$

Это одно из фундаментальных свойств гиперболического уравнения. Вернёмся к исходным переменным:

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \tag{35}$$

И это говорит нам о том, что волна может иметь любую форму главное чтобы это решение зависело от волнового аргумента. Волновой аргумент говорит о том что при смещении координаты x на ct значение волнового аргумента в следующий момент времени t не меняется это справедливо для каждой точки x. Эти два частных решения независимы и именно отсюда и видно, что c - скорость рассматриваемой волны.

Итак исходное волновое уравнение описывает без дисперсионную волну. Так как вся картина движется (перемещается) в среде со скоростью c без дисперсии.

"Дисперсия волн — в теории волн различие фазовых скоростей линейных волн в зависимости от их частоты. Дисперсия волн приводит к тому, что волновое возмущение произвольной негармонической формы претерпевает изменения (диспергирует) по мере его распространения."

Отметим тот факт, что звуковая волна в жидкостях и газах является продольной

$$\varphi(x,t) \;\Rightarrow\; v_x = \nabla_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{36}$$

Далее ограничимся одним частным решением, которое описывает волну в положительном направлении x.

$$v_x = \nabla_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x-ct) = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot 1. \tag{37}$$

Найдём давление p':

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_0\, f'(x-ct)\cdot(-c) = \rho_0\, c\, f'(x-ct) \tag{38}$$

Исключим f' из уравнения (37)

$$p' = \rho_0\, c\, v_x \Rightarrow v_x = \frac{p'}{\rho_0\, c} \tag{39}$$

Если воспользоваться уравнением состояния записанного ранее (20) $p' = c^2\rho'$ выражение для скорости приобретёт следующий вид:

$$v_x = \frac{c\rho'}{\rho_0}. \tag{40}$$

По всему выходит, что все величины завязаны друг на друге.

Мини итог:

1. Получили решение для двух волн $f_1 + f_2$.

2. Получили связь.

Вторая пара 10.01.19

При описании звуковой волны мы предполагали, что среда адиабатическая. То есть для системы выполняется Закон Сохранения Энергии. В уравнении Эйлера также нет вязкости, это не противоречит тому что в ходе распространения волны температура может изменятся.

Это подтверждает идею перехода энергии кинетической в потенциальную и обратно.

Обратимся к всемогущей термодинамике:

$$p(\rho, S) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \rho\,' + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho S\,'}_{\text{даёт } 0 \text{ т.к проц адиабатический}} \tag{41}$$

по аналогии :

$$T\,' = T\,'(\rho, S) = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \rho\,' + \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho S\,'}_{\text{даёт } 0}. \tag{42}$$

то есть имеем такого рода формулу:

$$T\,' = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \rho\,'. \tag{43}$$

Но это как бывает только для слабых отклонений.

Вспомним за коэффициент температурного расширения $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \beta$ Также поговорим за энтальпию: "энтальпия определяется как сумма внутренней энергии ε и произведения давления P на объём V"

$$H = \varepsilon + pV \tag{44}$$

Из уравнения внутренней энергии известно, что :

$$d\varepsilon = TdS - pdV \tag{45}$$

То есть получаем:

$$dH = d(\varepsilon) + d(pV) = TdS - pdV + pdV + Vdp = TdS + Vdp \tag{46}$$

Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{47}$$

$$T' = \frac{T}{C_p}\beta V_0 p' = \text{подставляем } p' = \frac{T}{C_p}\beta V_0 \frac{C}{V_0} v = \frac{T}{C_p}\beta v C \tag{48}$$

Выражение 48 очень важно. Эти соотношение демонстрируют, что все величины в звуковой волне меняются синхронно.

Вот ещё 2 ТД тождества

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{C_p}{C_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \tag{49}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{C_p}{C_v}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \tag{50}$$

Докажем это чуть позже !!ПОЗЖЕ!!

Известно соотношение, что $C_p > C_v$ Вспомним, что теплоемкость это энергия которая необходима для того чтобы нагреть тело на 1 градус.

$$\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}_{\text{Сжимаемость}} = \frac{C_p}{C_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \text{Обозначим} = \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \tag{51}$$

где γ - отношение теплоемкостей.

Вот и оказывается что скорость c:

$$c^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}_{\text{Это нельзя выяснить теоретически}} = \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \tag{52}$$

Воспользуемся уравнением состояния газа:

$$\frac{pV}{T} = R\frac{m}{\mu}, \tag{53}$$

для элемента газа единица массы будем иметь:

$$p = \rho T\frac{R}{\mu}, \tag{54}$$

где R -газовая постоянная отсюда и возьмём производную.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{TR}{\mu}, \tag{55}$$

можно к примеру выразить скорость звука.

$$c^2 = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \tag{56}$$

$$c = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\gamma \left(\frac{TR}{\mu}\right)}, \tag{57}$$

Прикинем скорость звука при $T = 300K, R = 8.31, \gamma = 1.4, \mu = 0.029$. При таких значениях $C = 347\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

Но обычно делают наоборот используют скорость звука для определения показателя адиабаты - γ

Сжимаемость воздуха сильно зависит от сжатия.

$$C = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\gamma \left(\frac{TR}{\mu}\right)},$$

это видно из формулы (57) выше (Формула Лапласа для скорости звука). γ и μ - материальные параметры T - регулируемый параметр $C \sim \sqrt{T}$.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C^2 \Delta \varphi \tag{58}$$

Монохроматические волны - гармонические функции по времене. Будем искать решение этого уравнения в экспоненциальной форме. $\varphi(x, y, z, t)$.

$$\varphi = Re\left\{\varphi_0 e^{-i\omega t}\right\} \tag{59}$$

P.S. - мы используем только реальную часть, потому что скорость не может быть мнимой.

Если ищем в таком виде то мы отделяем временную переменную . φ_0 - это не просто амплитуда, а амплитуда (x,y,z) Мы отделяем временную переменную

$$\varphi = Re\left\{\varphi_0 e^{-i\omega t}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C^2 \Delta \varphi \tag{60}$$

$$-\varphi_0\,\omega^2 e^{-i\omega\,t} = C^2\,\Delta\,\varphi_0 e^{-i\omega\,t}$$

преобразуем

$$-\varphi_0\,\omega^2 = C^2\,\Delta\,\varphi_0$$

$$\Delta\,\varphi_0 + \varphi_0\,\frac{\omega^2}{C^2} = 0$$

Пусть будем рассматривать вновь только ось x, получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \varphi_0\,\frac{\omega^2}{C^2} = 0$$

Ого себе получили уравнение гармонических колебаний.

$$\varphi_0\ \sim e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{C^2}}x} \sim e^{i\,\frac{\omega}{C}x}$$

Это мы подставляем и оставляем только одну часть распространения волны.

$$\varphi = Re\left\{Ae^{i\left(\frac{\omega}{C}x-\omega t\right)}\right\} = Re\left\{Ae^{i(kx-\omega t)}\right\} \tag{61}$$

Если ищем решения в виде монохроматической волны ω A - отвечает за сдвиг фазы k - волновое число, оно показывает пространственную периодичность волны и связан с длиной волны.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\,c}{\omega}$$

A так как комплексное число то запишем его как $A = a\,e^{i\alpha}$ где a - амплитуда и тогда можно подставить в (61) и досчитать.

$$\varphi = a\,\cos(kx - \omega t + \alpha) \tag{62}$$

Описывает волну движущая в направлении положительных x.

Обобщая на 3х мерный случай получим волновой вектор $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ от $k_x x; k_y y; k_z z \Rightarrow \vec{k}\vec{r}$, переходим к скалярному произведению.

$$\varphi = Re\left\{Ae^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right\} \tag{63}$$

волновой вектор нужно записать: $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{z}$ и $\vec{k} = |k|\,\vec{n} = \frac{\omega}{c}$, где $\vec{n}$ - вектор направленный перпендикулярно фронту волны (где движется волна).

В общем случае монохроматические волны можно разложить в любую самую сложную волну. - это важный вывод.

Энергия и импульс звуковых волн

Найдём для начала энергию заключённую волне (рис.1).

Энергия в единице объёма жидкости как мы знаем представлена следующим неравенством:

$$\rho\,\varepsilon + \frac{\rho\,v^2}{2}, \tag{64}$$

конечно, оно для идеальной жидкости, а ε -внутренняя энергия единицы объёма, приход на единицу объёма.

Где первое слагаемое внутренняя энергия, а второе кинетическая энергия. Разложим

$$\rho = \rho_0 + \rho\,'$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon\,'$$

Как и ранее колебания не большие для плотности и энергии. К сожалению, скорость мы так разложить не можем так как волна покоится. Разложим выражение $\rho\,\varepsilon$ на ρ и S то есть по ТД параметрам.

$$\rho\,\varepsilon = \rho_0\,\varepsilon_0 + \left(\frac{\partial(\rho\,\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_S\,\rho\,' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2(\rho\,\varepsilon)}{\partial\rho^{\,2}}\right)_S\,\rho\,'^{\,2} + ... \tag{65}$$

Отсутствие слагаемых с S - связано с тем что процесс адиабатический. Из первого начала тд известно что $d\varepsilon = TdS - pdV = TdS - \frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho$, а $H = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$.

$$dH = d\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho = TdS + \frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho + \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho^{\,2}}d\rho = TdS + \frac{p}{\rho}$$

Всё это необходимо для работы с производными в разложении.

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S = \frac{p}{\rho^{\,2}}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\rho}$$

Поработаем с производной:

$$\left(\frac{\partial(\rho\,\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_S = \varepsilon + \rho\,\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_S = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = \varepsilon + pV = H$$

Неожиданно получили энтальпию.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{1}{\rho} c^2$$

$$\rho\, \varepsilon = \rho_0\, \varepsilon_0 + H_0 \rho\,' + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\rho\,'^{\,2} + ... \tag{66}$$

Разберем наше разложение (66): Первое слагаемое $H_0\rho\,'$ - это энергия единицы объёма неподвижной жидкости в которой отсутствуют колебания. Его мы отбрасываем потому что нас интересуют именно звуковые колебания. Второе слагаемое $H_0\rho\,'$ - изменение энергии элемента жидкости связанного с его массой. Его мы отбрасываем по причине $\int \rho\,' dV = 0$ так как в звуковой волне среднее значение $\bar{\rho}\,' = 0$. Остается слагаемое $\frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\rho\,'^{\,2}$ говоря человеческим языком деформация энергии.

В результате полная энергия определяется

$$\int_V \left(\frac{\rho_0\, v^2}{2} + \frac{c^2\, \rho\,'^{\,2}}{2\, \rho_0}\right) dV \tag{67}$$

Теперь запишем энергию единицы объема звуковой волны:

$$E = \frac{\rho_0\, v^2}{2} + \frac{c^2\, \rho\,'^{\,2}}{2\, \rho_0} \tag{68}$$

и она, оказывается аналогичной энергии пружины.

Если же вернуться к энергии плоской звуковой волны справедливо, что $v = \frac{c\, \rho\,'}{\rho_0}$ можно выразить $\rho\,'$ и подставить в (68):

$$E = \frac{\rho_0\, v^2}{2} + \frac{c^2\, \rho_0^2\, v^2}{2\, \rho_0} = \rho_0\, v^2 \tag{69}$$

Вот так мы получили выражение (69) для плотности энергии звуковой волны. И это, оказывается характерным для любого гармонического осциллятора. Ну и ,конечно,звуковая волна обладает определённой энергией.

Третья пара 16.01.19

Плотность энергии связана с кинетической энергией и деформацией. E - это энергия при осреднении по времени даёт не нулевое значение. Найдём плотность потока энергии звуковой волны.

Плотность потока энергии - это количество энергии проходящее через единицу площади за единицу времени. В гидродинамике она представляет собой

$$\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+H\right)$$

Если от него взять div, то мы получим:

$$\rho\varepsilon+\frac{\rho\, v^2}{2}$$

Но сейчас нас интересует доля от плотности потока энергии связанная с звуковой волной. Раскладывая $\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+H\right)$ заметим, что $\rho\vec{v}H \gg \frac{\rho\, v^2}{2}\vec{v}$. Далее мы разложим все интересующие нас величины в ряд.

$$H = H_0 + H'$$

$$H\,' = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S p\,'$$

Одно слагаемое обусловлено как и раньше адиабатичностью процесса. И подставляя это получаем следующее выражение:

$$\rho\,\vec{v}H = \rho\,\vec{v}H_0 + \rho\,\vec{v}H\,' = \rho\,\vec{v}H_0 + \rho\,\frac{p\,'\vec{v}}{\rho}$$

В итоге полный поток энергии за единицу времени будет равняться следующему соотношению:

$$\oint \left(\rho\,\vec{v}H_0 + p\,'\vec{v}\right) d\vec{S}$$

Отбрасываем слагаемое $\rho\vec{v}H_0$, потому что этот поток энергии связан с изменением массы. Таким образом плотность потока энергии обусловленная звуковой волна равна:

$$\vec{q} = p\,'\vec{v}$$

Ну а полный поток равен

$$\oint p'\vec{v}d\vec{S}$$

Она получилась простой, потому что является продольной.

Легко доказать, что

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) + div(p'\vec{v}) = 0$$

ЭТО ДОМАШКА НА БАЛЛЫ тут тип теор Остроградского Гаусса пригодится ну и $v = \frac{c}{\rho_0}\rho'$ рассматривать как в Ландавшице том гидродинамика.

Это соотношение выражает Закон сохранения Энергии применительно к звуковым колебаниям. то есть связь:

$$p' = vc\rho \Rightarrow \vec{q} = cv^2\rho\vec{n},$$

где $\vec{n}$ - направлен по распространению волны колебаний. В итоге имеем схожую с электродинамикой формулу:

$$\vec{q} = Ec\vec{n},$$

где E объёмная плотность энергии. В итоге в единице V заключена энергия и она переносится вдоль направления $\vec{n}$ - единичного вектора, прошу заметить со скорость c.

Импульс звуковых волн

$$\vec{j} = \vec{v}\rho,$$

где $\vec{j}$ - объёмная плотность вещества, или по-другому количество вещества проходящее через единицу площади, поток массы импульса единицы объёма.

В звуковой волне:

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

где ρ' - отклонение плотности от некоторого среднего значения.

Подставим это в $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \vec{v}\rho_0 + \vec{v}\rho' = \vec{v}\rho_0 + \frac{p'}{c^2}\vec{v} = \vec{v}\rho_0 + \frac{\vec{q}}{c^2}$$

Слагаемое $\vec{v}\rho_0$ отбрасываем, потому что это энергия связанная с движением среды как целого.

Рассмотрим звуковую волну занимающую ограниченную площадь в пространстве (рис.2). Пусть движение потенциально то есть $v = \nabla\varphi/$

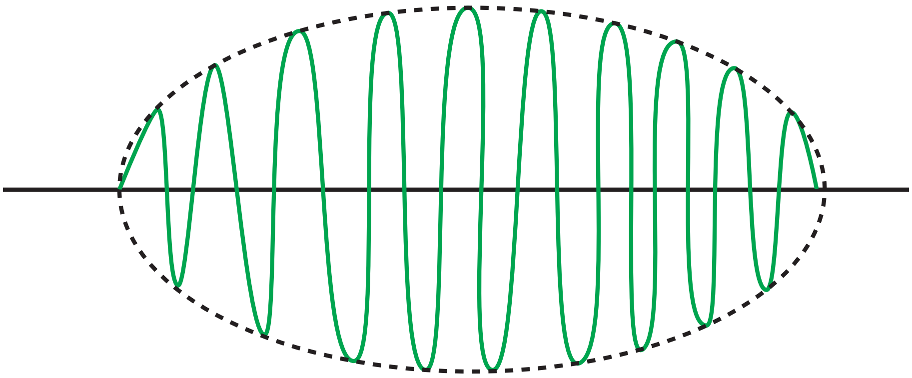

Рис. 2: Локализованная волна

Найдём полный импульс:

$$\int \nabla\varphi\rho_0 \, dV + \int \frac{\vec{q}}{c^2} \, dV$$

По теореме Остроградского-Гаусса имеем:

$$\int \nabla\varphi \, dV = \oint \varphi \, d\vec{S} = 0$$

Ноль потому что $\varphi_\infty = 0$, то есть функция локализована в определённой области пространства, а это в свою очередь говорит о том, что среда как целое отброшена. Тогда имеем:

$$\int \frac{\vec{q}}{c^2} \, dV$$

это и есть полный импульс по объёму. Во втором порядке малости полный импульс переносимой волны не равен нулю. Это означает, что имеет место отличный от нуля перенос вещества. Иными словами распространение звука сопровождается переносом вещества. Однако это перенос представляет собой эффект второго порядка малости.

Отражение и преломление звуковых волн

Будем интересоваться откликом среды на взаимодействие звуковой волны с некоторой границей раздела (рис.3).

Рассмотрим несколько возможных вариантов:

1. Волна полностью отражается.

2. Волна частично, или полностью поглощается.

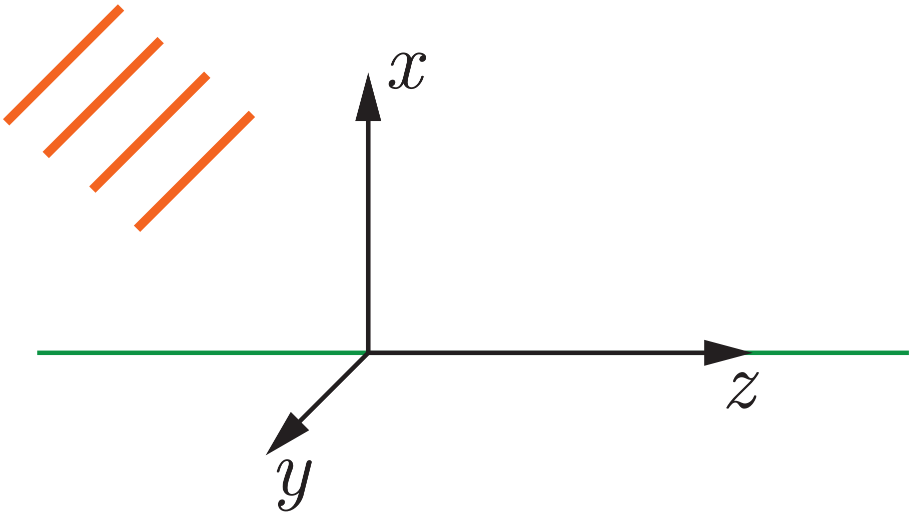

Рис. 3: Падающая волна

При падении звуковой волны на границу раздела двух различных сред в общем случае волна отражается и преломляется. Так как рассматриваем сплошную среду то логично что частоты волны сохраняются.

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2}$$

Случай первый: Отражение

Главной особенность при отражении заключается в том, что движение в первой среде является результатом наложения двух волн падающей и отражённой.

Скорость звука падающей и отражённой волны должна быть одинакова, ибо всё происходит в одной среде.

$$k_{1y} = k_{2y}$$

$$k_{1z} = k_{2z}$$

Волновые числа падающей (k_1) и отражённой (k_2) волны должны быть равны. z - компонента определяет периодичность по z, а y по y. Стоит также учесть тот факт, что волновой вектор перпендикулярен фронту распространения волны.

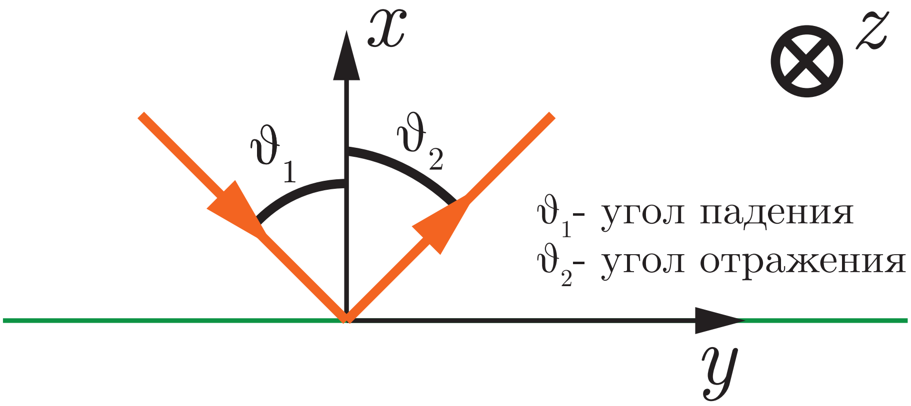

Рис. 4: Отражение

$$k_{1y} = \frac{\omega}{c} sin(\ \vartheta_1\ ) = |k|\ sin(\ \vartheta_1\ )$$
$$k_{2y} = \frac{\omega}{c} sin(\ \vartheta_2\ ) = |k|\ sin(\ \vartheta_2\ )$$

Равенство выше глаголит, что: *"Угол падения равен углу отражения"*

$$\vartheta_1 \ = \ \vartheta_2$$

Случай второй: Преломление звуковых волн

$$k_{1y} = \frac{\omega}{c_1} sin(\ \vartheta_1\ ) = |k|\ sin(\ \vartheta_1\ )$$
$$k_{2y} = \frac{\omega}{c_2} sin(\ \vartheta_2\ ) = |k|\ sin(\ \vartheta_2\ )$$

Но $k_{1y} = k_{2y}$ меняется лишь x (рис.5). Поэтому приравнивая получаем:

$$\frac{\omega}{c_1} sin(\ \vartheta_1\ ) = \frac{\omega}{c_2} sin(\ \vartheta_2\ ),$$

Или по другому:

$$\frac{sin(\ \vartheta_1\ )}{sin(\ \vartheta_2\ )} = \frac{c_1}{c_2}\ ,$$

Вот и закон преломления.

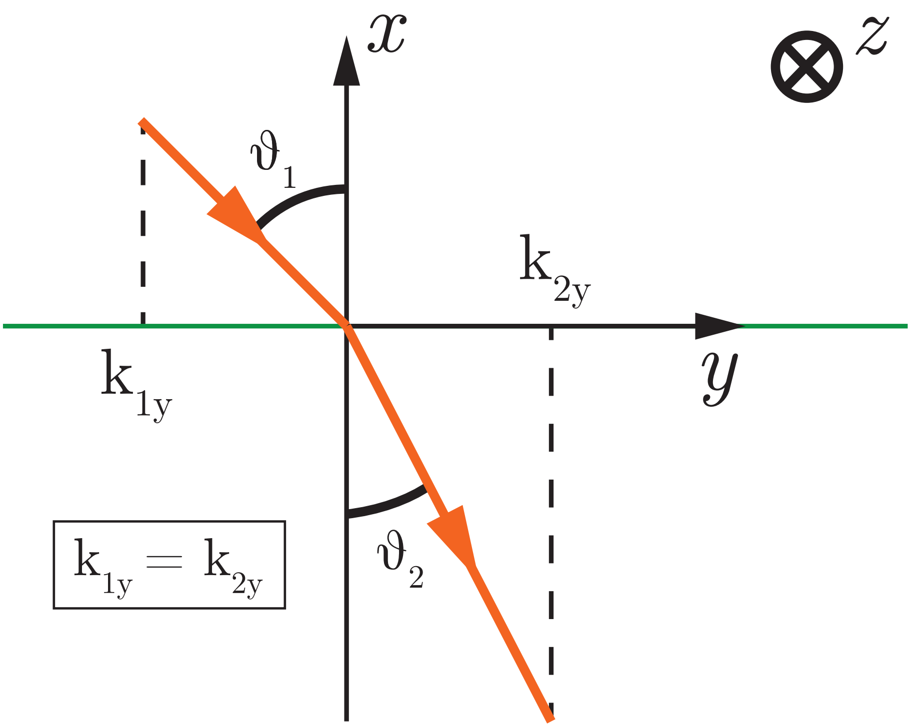

Рис. 5: Преломление

Количественное соотношение между интенсивностями падающей, отражённой, преломлённой волны.

Найдём количественное соотношение между интенсивностями падающей, отражённой, преломлённой волны. Ограничимся 2х мерным пространством:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y \Rightarrow k = \frac{\omega}{c},$$

где k - величина волнового вектора.

Будем рассуждать в терминах потенциалов скорости:

$$\varphi_1 = A_1\, exp\left\{ i\omega\left(\frac{x}{c_1} cos(\,\vartheta_1\,) + \frac{y}{c_1} cos(\,\vartheta_1\,) - t\right)\right\}$$

$$\varphi_1' = A_1'\, exp\left\{ i\omega\left(-\frac{x}{c_1} cos(\,\vartheta_1\,) + \frac{y}{c_1} cos(\,\vartheta_1\,) - t\right)\right\}$$

$$\varphi_2 = A_2\, exp\left\{ i\omega\left(\frac{x}{c_2} cos(\,\vartheta_2\,) + \frac{y}{c_2} cos(\,\vartheta_2\,) - t\right)\right\}$$

φ_1 - потенциал падающей волны, φ_1' - отражённой, φ_2 - прошедшей. Стоит упомянуть о:

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega(\,\frac{k}{\omega}\,x - t) \Rightarrow (kx - \omega t)$$

Гран условия которые применяем таковы: На поверхности раздела одинаковое давление.

$$p = -\dot{\varphi}\rho = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\rho$$

Его мы записываем и на потенциалы.

$$v_x = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

На границе $p_1 = p_2$ и $v_{x1} = v_{x2}$, а $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_2$ В итоге получаем:

$$\begin{cases} \rho_1\left(A_1 - A_1'\right) = \rho_1 A_2 \\ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) \end{cases}$$

И это всё при $x = 0$.

$$\frac{cos(\ \vartheta_1\ )}{c_1}\left(A_1 - A_1'\right) = \frac{cos(\ \vartheta_2\ )}{c_1}A_2$$