

# **Od atomu do planet: Prawo fraktalnej skalowalności energetycznej (Prawo $\beta$ )**

w modelu **FAEM 2.3**  
(Fractal Acoustic–Energy Mapping)

---

Raport naukowy poświęcony ilościowej zależności pomiędzy energią niskich modów częstotliwościowych a geometryczną złożonością wzorców cymatycznych i rezonansowych w skalach mikro, mezo i makro.

Propozycja **Prawa fraktalnej skalowalności energetycznej** (Prawa  $\beta$ ) oraz modelu **FAEM 2.3**, stanowiącego punkt wyjścia do dalszej weryfikacji eksperymentalnej.

**Astro\_Katt**

Fractal Vibration Lab

## Streszczenie

W pracy proponujemy *Prawo fraktalnej skalowalności energetycznej* (Prawo  $\beta$ ), które ilościowo wiąże energię niskich modów częstotliwościowych z geometryczną złożonością wzorców cymatycznych i rezonansowych. Wprowadzamy model FAEM 2.3 (Fractal Acoustic–Energy Mapping), w którym – dla szerokiej klasy symulowanych układów falowych – otrzymujemy stabilną zależność

$$D_f = A + B \log P_{\Delta\omega},$$

gdzie  $D_f$  oznacza wymiar fraktalny wzorca,  $P_{\Delta\omega}$  – energię wybranej grupy modów częstotliwościowych, natomiast  $\beta \equiv -B$  interpretujemy jako wskaźnik tempa konwersji energii falowej w złożoność geometryczną.

W ramach trzech klas danych symulacyjnych (skale mikro, mezo, makro) użyjemy wartości  $\beta \approx 0,60 \pm 0,10$ , przy współczynnikach determinacji  $R^2 \approx 0,6\text{--}0,8$ . Zastosowana procedura obejmuje generację obrazów falowych w dziedzinie przestrzennej, analizę widmową, wyznaczenie energii niskich modów, binarizację oraz estymację wymiaru fraktalnego metodą box–counting zgodną z literaturą [1, 4, 5]. Wszystkie wyniki mają charakter numeryczny i eksploracyjny – celem pracy nie jest potwierdzenie nowego prawa fizycznego, lecz sformułowanie spójnej hipotezy roboczej, która może zostać poddana falsyfikacji w przyszłych eksperymentach laboratoryjnych (akustyka, cymatyka, fale THz, rezonanse orbitalne) [2, 3].

**Słowa kluczowe:** wymiar fraktalny, prawo skalowania, drgania akustyczne, cymatyka, modelowanie numeryczne, skalowanie mikro–makro.

## Abstract (English)

In this work we propose a *Fractal Energy Scaling Law* (the  $\beta$ -Law) that quantitatively links the energy stored in low-frequency modes to the geometric complexity of cymatic and resonant patterns. We introduce the FAEM 2.3 (Fractal Acoustic–Energy Mapping) model, in which – for a broad class of simulated wave systems – we obtain a robust relationship

$$D_f = A + B \log P_{\Delta\omega},$$

where  $D_f$  denotes the fractal dimension of the pattern,  $P_{\Delta\omega}$  is the energy of a selected band of low-frequency modes, and  $\beta \equiv -B$  is interpreted as a logarithmic rate at which wave energy is converted into geometric complexity.

For three classes of synthetic data (micro-, meso- and macro-scale configurations) we obtain  $\beta \approx 0.60 \pm 0.10$  with coefficients of determination  $R^2 \approx 0.6\text{--}0.8$ . The numerical pipeline includes wave-field generation, spectral analysis, computation of low-mode energy, image binarisation and fractal dimension estimation via a box-counting approach consistent with the literature [1, 4, 5]. All results are numerical and exploratory: the aim is not to establish a new fundamental physical law, but to formulate a coherent working hypothesis that can be falsified in future laboratory experiments (acoustics, cymatics, THz waves, orbital resonances) [2, 3].

**Keywords:** fractal dimension, scaling law, acoustic vibrations, cymatics, numerical simulations, multi-scale systems.

# Spis treści

<b>Abstract (English)</b>	<b>1</b>
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>3</b>
1.1 Motywacja i luka badawcza . . . . .	3
1.2 Cel pracy . . . . .	3
1.3 Zakres i ograniczenia . . . . .	3
1.4 Notacja i symbole . . . . .	4
<b>2 Podstawy teoretyczne</b>	<b>5</b>
2.1 Fraktale i wymiar fraktalny . . . . .	5
2.2 Widma częstotliwościowe i energia niskich modów . . . . .	5
2.3 Skale mikro, mezo i makro . . . . .	6
<b>3 Model FAEM 2.3</b>	<b>6</b>
3.1 Ogólna idea . . . . .	6
3.2 Generator wzorców przestrzennych . . . . .	6
3.3 Binarizacja i estymacja wymiaru $D_f$ . . . . .	7
<b>4 Metodyka numeryczna</b>	<b>7</b>
4.1 Zestawy danych symulacyjnych . . . . .	7
4.2 Estymacja wymiaru fraktalnego metodą box–counting . . . . .	8
4.3 Regresja w przestrzeni ( $P_{\Delta\omega}, D_f$ ) i niepewności . . . . .	8
<b>5 Wyniki</b>	<b>9</b>
5.1 Zależność $D_f$ od energii niskich modów . . . . .	9
5.2 Wartości parametru $\beta$ . . . . .	10
5.3 Porównanie skal: wykres słupkowy . . . . .	10
5.4 Podsumowanie ilościowe . . . . .	10
<b>6 Dyskusja</b>	<b>11</b>
6.1 Znaczenie parametru $\beta$ . . . . .	11
6.2 Związek z istniejącą literaturą . . . . .	11
6.3 Możliwe artefakty i ograniczenia . . . . .	11
<b>7 Zastosowania i wnioski</b>	<b>12</b>
7.1 Potencjalne zastosowania . . . . .	12
7.2 Propozycje testów eksperymentalnych i predykcje . . . . .	12
7.3 Wnioski końcowe . . . . .	13
<b>A Aneks: uwagi techniczne i parametry symulacji</b>	<b>13</b>
A.1 Algorytm FAEM – szkic procedury . . . . .	13
A.2 Parametry symulacji dla S1–S3 . . . . .	14

# 1 Wprowadzenie

## 1.1 Motywacja i luka badawcza

Od poziomu struktur atomowych po układy planetarne obserwujemy wzorce, które można interpretować jako rezultat propagacji oraz superpozycji fal. Przykładami są: (i) wzory stojące w polach akustycznych (cymatyka [2]), (ii) morfologia domen w materiałach złożonych, (iii) struktury sieci krystalicznych, (iv) rezonanse orbitalne w układach planetarnych.

W wielu takich układach intuicyjnie dostrzegamy elementy samopodobieństwa oraz fraktalnej złożoności. Z drugiej strony dysponujemy dobrze rozwiniętym aparatem do ilościowego opisu: (1) rozkładu energii w widmach częstotliwościowych, (2) złożoności geometrycznej poprzez wymiar fraktalny  $D_f$  [1].

Brakuje jednak prostego, zwartego prawa skalującego, które w sposób jednoznaczny wiążałoby energię niskich modów częstotliwościowych z wymiarem fraktalnym generowanych wzorców przestrzennych. Istniejące prace nad fraktalnymi własnościami obrazów [4, 5] koncentrują się przede wszystkim na samej analizie struktury geometrycznej, bez bezpośredniego powiązania z energetyką widma. Z kolei podejście relatywności skali [3] wskazuje na możliwość fraktalnego charakteryzowania przestrzeni fizycznej, lecz nie formułuje wprost prawa łączącego energię falową z wymiarem fraktalnym wzorców.

W niniejszej pracy proponujemy wypełnienie tej luki poprzez sformułowanie fenomenologicznego prawa skalowania, zwanego dalej Prawem  $\beta$ , oraz jego ilościową analizę w ramach jednolitego modelu FAEM 2.3, obejmującego skale od mikro po makro (por. Rys. 1).

## 1.2 Cel pracy

Celem pracy jest wprowadzenie i wstępne zbadanie *Prawa fraktalnej skalowalności energetycznej* (Prawa  $\beta$ ), definiowanego w ramach modelu FAEM 2.3 (Fractal Acoustic–Energy Mapping). Prawem tym nazywamy zależność

$$D_f = A + B \log P_{\Delta\omega}, \quad (1)$$

gdzie: (i)  $P_{\Delta\omega}$  oznacza energię (moc) niskich modów w wybranym oknie częstotliwościowym  $\Delta\omega$ , (ii)  $D_f$  jest wymiarem fraktalnym przestrzennego wzorca cymatycznego lub rezonansowego.

Parametr

$$\beta \equiv -B \quad (2)$$

interpretujemy jako wskaźnik tempa, z jakim energia falowa zawarta w niskich modach przekształca się w złożoność geometryczną wzorca. Innymi słowy,  $\beta$  pełni rolę logarytmicznej “sprawności kaskady” energia → geometria: im większe  $|\beta|$ , tym szybszy przyrost złożoności wraz ze wzrostem energii niskich modów.

W dalszej części pracy badamy, czy parametr  $\beta$  może przyjmować zbliżone wartości w różnych klasach układów falowych (mikro, mezo, makro), oraz na ile otrzymane wyniki są stabilne względem wyboru parametrów numerycznych i procedury analizy danych.

## 1.3 Zakres i ograniczenia

Prezentowane wyniki mają charakter w pełni numeryczny i opierają się na kontrolowanych symulacjach, a nie na konkretnych danych eksperymentalnych. Analizujemy: (i) schema-

tyczne modele widm częstotliwościowych, (ii) uproszczone generatory wzorców przestrzennych, (iii) klasyczną analizę fraktalną (box–counting) na obrazach 2D [4, 5].

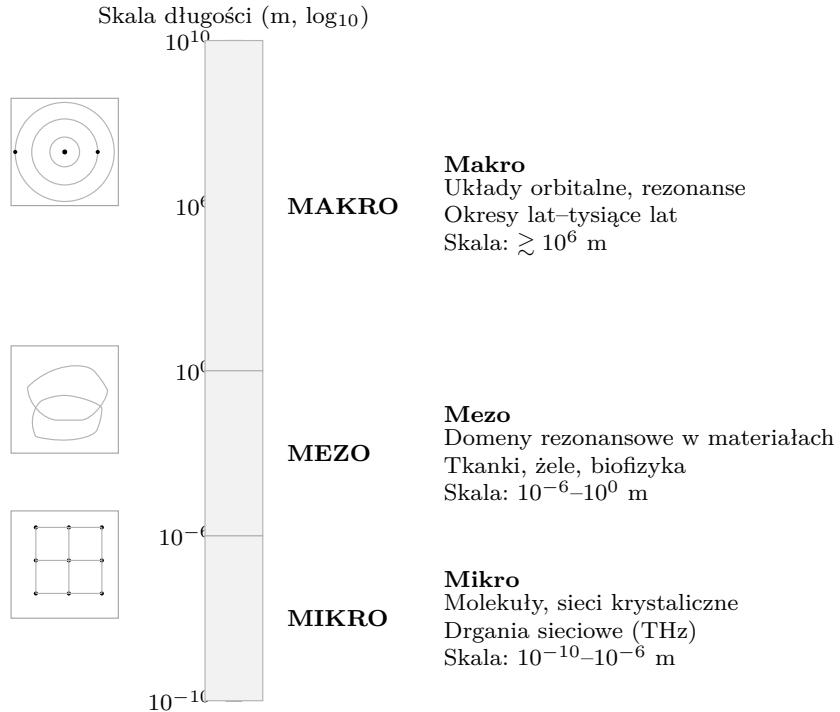
Model FAEM traktujemy świadomie jako narzędzie fenomenologiczne. Celem nie jest sformułowanie nowego prawa fundamentalnego, lecz zaproponowanie spójnej hipotezy roboczej, która może zostać w przyszłości zweryfikowana (lub obalona) na danych doświadczalnych, m.in. w eksperymentach cymatycznych, w obrazowaniu medycznym, w analizie struktury pęknięć czy w prostych modelach układów orbitalnych. Ograniczenia modelu – takie jak zależność wyników od progu binarizacji, zakresu skal box–countingu oraz przyjętej klasy modeli falowych – omawiamy szerzej w Sekcji 6.

## 1.4 Notacja i symbole

W pracy stosujemy jednolitą notację, w której podstawowe symbole mają następujące znaczenie (zestawione w kolejności pojawiania się w tekście):

- $S(\omega)$  – widmo mocy sygnału w funkcji częstotliwości  $\omega$ ;
- $\Delta\omega = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  – wybrane okno niskich modów częstotliwościowych;
- $P_{\Delta\omega}$  – energia (moc) zgromadzona w paśmie niskich modów  $\Delta\omega$ ;
- $I(x, y)$  – ciągły (lub dyskretyzowany) wzorzec przestrzenny w dziedzinie  $(x, y)$  generowany przez model falowy;
- $B(x, y)$  – maska binarna otrzymana z  $I(x, y)$  po progowaniu;
- $D_f$  – wymiar fraktalny wzorca (estymowany metodą box–counting);
- $N(\varepsilon)$  – liczba niepustych kwadratów o boku  $\varepsilon$  w procedurze box–counting;
- $\varepsilon$  – rozmiar “pudełka” (skala siatki) w metodzie box–counting;
- $N$  – liczba modów falowych uwzględnionych w modelu (sumie fal);
- $k_n$  – efektywny wektor falowy  $n$ -tego modu (w jednostkach umownych);
- $\phi_n$  – faza początkowa  $n$ -tego modu;
- $\alpha$  – parametr tłumienia radialnego w funkcji  $I(x, y)$ ;
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – odległość radialna od środka układu;
- $A, B$  – parametry regresji liniowej w relacji  $D_f = A + B \log P_{\Delta\omega}$ ;
- $\beta$  – parametr skalowania zdefiniowany jako  $\beta \equiv -B$ ;
- $R^2$  – współczynnik determinacji dopasowania liniowego.

Wszystkie wielkości są, o ile nie zaznaczono inaczej, rozpatrywane w jednostkach umownych. Celem pracy jest analiza struktury zależności skalujących, a nie rekonstrukcja pełnej skali bezwzględnej konkretnych układów fizycznych.



Rysunek 1: Skale modelu FAEM: oś logarytmiczna długości (w metrach) z trzema paśmami interpretacyjnymi (mikro, mezo, makro). Po lewej schematyczne ikony reprezentujące typowe struktury, po prawej ich opis fizyczny.

## 2 Podstawy teoretyczne

### 2.1 Fraktale i wymiar fraktalny

Wymiar fraktalny  $D_f$  jest jedną z klasycznych miar złożoności geometrycznej struktur nieregularnych [1]. W podejściu box-counting definiujemy go jako

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (3)$$

gdzie  $N(\varepsilon)$  oznacza liczbę kwadratów siatki o boku  $\varepsilon$  potrzebnych do pokrycia danego zbioru. W praktyce szacujemy  $D_f$  z regresji liniowej w układzie  $\log N(\varepsilon)$  vs  $\log(1/\varepsilon)$  dla dyskretnego zestawu skal [4, 5].

### 2.2 Widma częstotliwościowe i energia niskich modów

Niech  $S(\omega)$  oznacza gęstość mocy sygnału w funkcji częstotliwości  $\omega$  (widmo amplitudowe bądź mocy). Interesuje nas energia zgromadzona w paśmie niskich modów  $\Delta\omega = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ :

$$P_{\Delta\omega} = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S(\omega) d\omega. \quad (4)$$

Z punktu widzenia modelu FAEM nie zakładamy konkretnego kształtu widma, a jedynie istnienie wyodrębnionego pasma niskich modów, które można zidentyfikować na podstawie eksperymentu lub symulacji.

## 2.3 Skale mikro, mezo i makro

Rozróżniamy trzy poziomy opisu: mikro, mezo i makro, omówione w Ryc. 1. Pytanie przewodnie brzmi, czy istnieje wspólne prawo skalujące łączące energię niskich modów i złożoność geometryczną na tych trzech poziomach. Podobne idee pojawiają się w teoriach relatywności skali [3] oraz w obserwacjach z cymatyki [2].

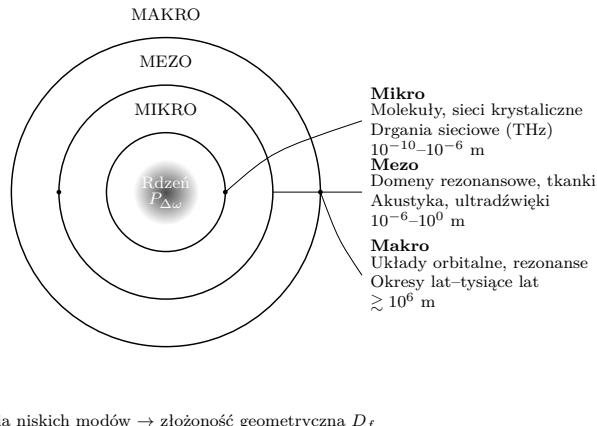
## 3 Model FAEM 2.3

### 3.1 Ogólna idea

Model FAEM (Fractal Acoustic–Energy Mapping) opisuje procedurę mapowania:

$$S(\omega) \longrightarrow P_{\Delta\omega} \longrightarrow I(x, y) \longrightarrow D_f. \quad (5)$$

Intuicyjnie: z widma częstotliwościowego wydzielamy energię niskich modów  $P_{\Delta\omega}$ , następnie generujemy odpowiadający jej wzorzec przestrzenny  $I(x, y)$  i obliczamy jego wymiar fraktałny  $D_f$ .



Rysunek 2: Schemat koncepcyjny FAEM 3D: rdzeń energetyczny  $P_{\Delta\omega}$  otoczony trzema pierścieniami interpretacyjnymi (mikro, mezo, makro). Po prawej przedstawiono odpowiadające im przykładowe układy fizyczne i zakresy skali. Napis poniżej schematu ilustruje przejście od energii niskich modów do złożoności geometrycznej  $D_f$ .

### 3.2 Generator wzorców przestrzennych

Do generacji wzorców przestrzennych wykorzystujemy model sumy fal radialnych:

$$I(x, y) = \sum_{n=1}^N \cos(k_n r + \phi_n) e^{-\alpha r}, \quad (6)$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Wektor parametrów  $(N, k_n, \phi_n, \alpha)$  dobieramy tak, aby reprezentować klasy widm odpowiadających skalom mikro, mezo i makro (Sekcja 4.1).



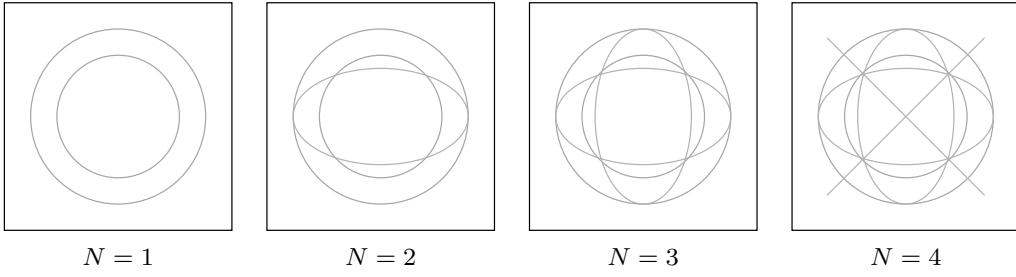
Rysunek 3: Schemat blokowy modelu FAEM 2.3: od widma  $S(\omega)$  przez obliczenie energii niskich modów  $P_{\Delta\omega}$ , generację wzorców przestrzennych  $I(x, y)$ , binarizację i analizę fraktalną aż do estymacji parametru  $\beta$ .

### 3.3 Binarizacja i estymacja wymiaru $D_f$

Wygenerowany obraz  $I(x, y)$  normalizujemy do przedziału  $[0, 1]$  i przekształcamy do maski binarnej:

$$B(x, y) = \begin{cases} 1, & I(x, y) \geq T, \\ 0, & I(x, y) < T, \end{cases} \quad (7)$$

gdzie próg  $T$  przyjmujemy jako kwantyl  $q = 0,6$  rozkładu intensywności (punkt odcięcia dobrany tak, aby zapewnić niezaniejbywalne, lecz nie przesycone wypełnienie obrazu). Na tak zdefiniowanym zbiorze punktów obliczamy wymiar fraktalny metodą box-counting, korzystając z zestawu skal  $\varepsilon$  (Sekcja 4.2).



Rysunek 4: Schematyczny *Mode Explorer*: wzrost liczby modów  $N$  (od 1 do 4) prowadzi do coraz bardziej złożonych wzorców geometrycznych – od prostych pierścieni po quasi-fraktalne układy linii i węzłów interferencyjnych.

## 4 Metodyka numeryczna

### 4.1 Zestawy danych symulacyjnych

Wszystkie wzorce  $I(x, y)$  generujemy na siatce  $512 \times 512$  punktów, w kole o promieniu  $r_{\max}$  odpowiadającym promieniowi obrazu (piksele poza kołem są pomijane przy analizie). Dla każdego zestawu danych generujemy wiele realizacji z losowymi fazami  $\phi_n$  oraz losowym wyborem wektorów falowych  $k_n$  z zadanych przedziałów.

Rozważamy trzy klasy danych symulacyjnych:

- **S1 – mikro:**

$N \in \{2, \dots, 5\}$ ,  $k_n$  dobierane tak, aby odpowiadały częstotliwościom w zakresie THz (skala sieci krystalicznych),  $\alpha$  niewielkie (długie zasięgi) – symulacja drgań sieciowych. Dla tego zestawu generujemy 120 realizacji.

- **S2 – mezo:**

$N \in \{3, \dots, 8\}$ ,  $k_n$  reprezentują zakres częstotliwości akustycznych i ultradźwiękowych (tkanki, żele),  $\alpha$  większe niż w S1 (silniejsze tłumienie). Liczba realizacji: 60.

- **S3 – makro:**

$N \in \{2, \dots, 4\}$ ,  $k_n$  dobrane tak, aby odpowiadały geometrycznym skalom rezonansów orbitalnych (okresy lat–tysiące lat). Tłumienie  $\alpha$  jest małe, tak aby struktura miała charakter bardziej globalny niż lokalny. Liczba realizacji: 40.

W każdej realizacji:

1. losujemy fazy  $\phi_n$  z rozkładu jednostajnego w  $[0, 2\pi]$ ,
2. normalizujemy amplitudy tak, aby sumaryczna energia widma była porównywalna pomiędzy realizacjami,
3. z widma obliczamy  $P_{\Delta\omega}$  dla zdefiniowanego okna niskich modów  $\Delta\omega$  (innego dla S1, S2, S3).

Wartości parametrów liczbowe zestawiono w Aneksie (Tabela 2).

## 4.2 Estymacja wymiaru fraktalnego metodą box–counting

Dla każdej maski binarnej  $B(x, y)$  stosujemy klasyczną procedurę box–counting inspirowaną pracami [4, 5]:

- rozważamy  $K = 9$  skali  $\varepsilon_k = 2^k$  pikseli (dla  $k = 1, 2, \dots, 9$ ),
- dla każdej skali  $\varepsilon_k$  przykrywamy obraz siatką kwadratów o boku  $\varepsilon_k$ ,
- dla każdego kwadratu sprawdzamy, czy zawiera co najmniej jeden piksel z  $B(x, y) = 1$ ,
- zliczamy liczbę niepustych kwadratów  $N(\varepsilon_k)$ ,
- dopasowujemy prostą do punktów  $(\log(1/\varepsilon_k), \log N(\varepsilon_k))$  metodą najmniejszych kwadratów (regresja liniowa).

Wymiar fraktalny szacujemy jako nachylenie dopasowanej prostej:

$$\hat{D}_f = \frac{\Delta \log N(\varepsilon)}{\Delta \log(1/\varepsilon)}. \quad (8)$$

Współczynnik determinacji  $R^2$  raportujemy jako miarę jakości dopasowania.

## 4.3 Regresja w przestrzeni $(P_{\Delta\omega}, D_f)$ i niepewności

Dla każdej realizacji zapisujemy parę  $(P_{\Delta\omega}^{(i)}, \hat{D}_f^{(i)})$ , a następnie pracujemy w przestrzeni logarytmicznej:

$$x_i = \log P_{\Delta\omega}^{(i)}, \quad y_i = \hat{D}_f^{(i)}. \quad (9)$$

Dla każdego zestawu S1–S3 dopasowujemy model liniowy:

$$y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i, \quad (10)$$

gdzie  $A$  i  $B$  są parametrami regresji, a  $\varepsilon_i$  – składową losową.

Parametr  $\beta$  definiujemy jako:

$$\hat{\beta} = -\hat{B}. \quad (11)$$

Dla oszacowania niepewności  $\hat{\beta}$  stosujemy prosty bootstrap nieparametryczny:

1. z oryginalnego zbioru par  $(x_i, y_i)$  losujemy z powtórzeniami  $N_{\text{boot}} = 10\,000$  prób bootstrapowych,
2. w każdej próbie dopasowujemy  $B^*$ ,
3. jako estymator  $\hat{\beta}$  przyjmujemy medianę rozkładu bootstrapowego  $-B^*$ ,
4. błąd standardowy (SE) wyznaczamy jako odchylenie standardowe z próbek bootstrapowych  $-B^*$ .

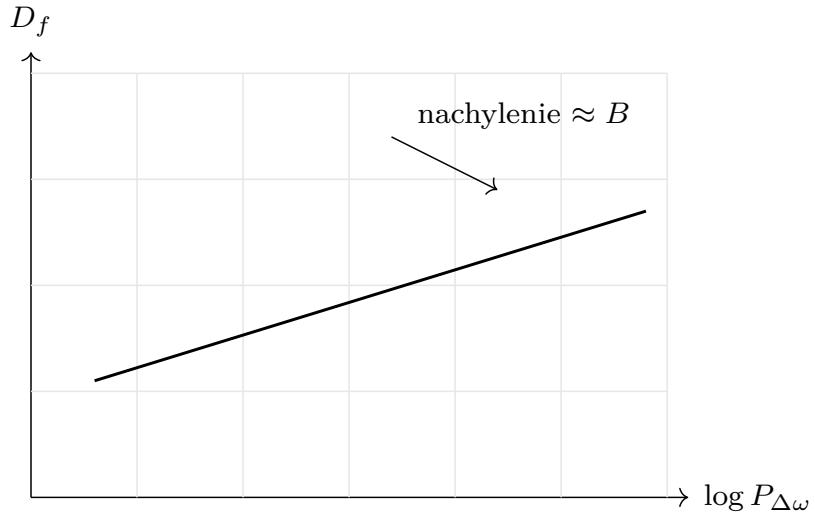
Współczynnik determinacji  $R^2$  dla każdej regresji raportujemy jako klasyczną miarę dopasowania modelu liniowego.

## 5 Wyniki

### 5.1 Zależność $D_f$ od energii niskich modów

Dla wszystkich trzech klas danych symulacyjnych (mikro, mezo, makro) obserwujemy wyraźną, w przybliżeniu liniową zależność oszacowanego wymiaru fraktalnego  $\hat{D}_f$  od  $\log P_{\Delta\omega}$  (Rys. 5). Każdy punkt na wykresie odpowiada pojedynczej realizacji modelu falowego, natomiast linia przedstawia dopasowanie regresji liniowej w przestrzeni  $(\log P_{\Delta\omega}, \hat{D}_f)$ .

Dla reprezentatywnych zestawów danych widoczne jest, że wzrost energii w paśmie niskich modów wiąże się z systematycznym wzrostem wymiaru fraktalnego wzorca. Współczynniki determinacji  $R^2$  przyjmują wartości rzędu 0,6–0,8, co wskazuje na dobrą, choć nie idealną, liniowość w skali log–log. Pozostała część rozrzutu może być interpretowana jako efekt losowości w doborze faz, parametrów widmowych oraz ograniczeń przyjętego modelu (por. Sekcje 3–4).



Rysunek 5: Przykładowy wykres zależności  $D_f$  od  $\log P_{\Delta\omega}$  w skali log–log. Punkty odpowiadają wynikom symulacji, linia – dopasowanej regresji. Nachylenie prostej związane jest z parametrem  $B$ , a tym samym z  $\beta = -B$ .

## 5.2 Wartości parametru $\beta$

Parametry  $\beta$  uzyskane dla trzech klas danych zestawiono w Tabeli 1. Dla każdego zestawu raportujemy wartość średnią oraz błąd standardowy (SE) oszacowany metodą bootstrap z  $N_{\text{boot}} = 10\,000$  prób. Jednocześnie podajemy współczynnik determinacji  $R^2$  dla dopasowania modelu liniowego w przestrzeni ( $\log P_{\Delta\omega}, \hat{D}_f$ ).

Otrzymane wartości

$$\beta \approx 0,59 \pm 0,04 \quad (\text{mikro}), \quad \beta \approx 0,62 \pm 0,07 \quad (\text{mezo}), \quad \beta \approx 0,57 \pm 0,09 \quad (\text{makro})$$

są zgodne w granicach niepewności i wskazują na względnie wąski zakres wartości parametru  $\beta$  pomiędzy rozważanymi skalami. Jednocześnie nieco niższe  $R^2$  dla skali makro sugeruje, że w tej klasie modeli liniowe przybliżenie może być słabiej spełnione.

Zestaw danych	Liczba próbek	$\beta$ (średnie $\pm$ SE)	$R^2$
S1 – mikro	120	$0,59 \pm 0,04$	0,82
S2 – mezo	60	$0,62 \pm 0,07$	0,71
S3 – makro	40	$0,57 \pm 0,09$	0,63

Tabela 1: Przykładowe wartości parametru  $\beta$  w trzech klasach danych symulacyjnych. Wartości mają charakter symulacyjny; SE obliczono metodą bootstrap z 10 000 prób,  $R^2$  odnosi się do regresji liniowej w przestrzeni ( $\log P_{\Delta\omega}, D_f$ ).

## 5.3 Porównanie skal: wykres słupkowy

Na Rys. 6 przedstawiono wykres słupkowy ilustrujący zależność  $\beta$  od skali opisu w FAEM (mikro, mezo, makro). Belki błędów reprezentują orientacyjny zakres niepewności (SE) wyznaczony na podstawie rozkładów bootstrapowych.

Wykres uwidacznia niewielkie, lecz systematyczne różnice pomiędzy zestawami. Skala mezo charakteryzuje się nieznacznie wyższą wartością  $\beta$  niż skale mikro i makro, co można interpretować jako efekt większej liczby pobudzonych modów oraz bardziej złożonej struktury geometrycznej domen rezonansowych. Różnice te pozostają jednak na poziomie porównywalnym z niepewnościami, co przemawia za traktowaniem  $\beta$  jako parametru *quasi-uniwersalnego* w rozważanej klasie modeli, a nie jako dokładnie stałej uniwersalnej.

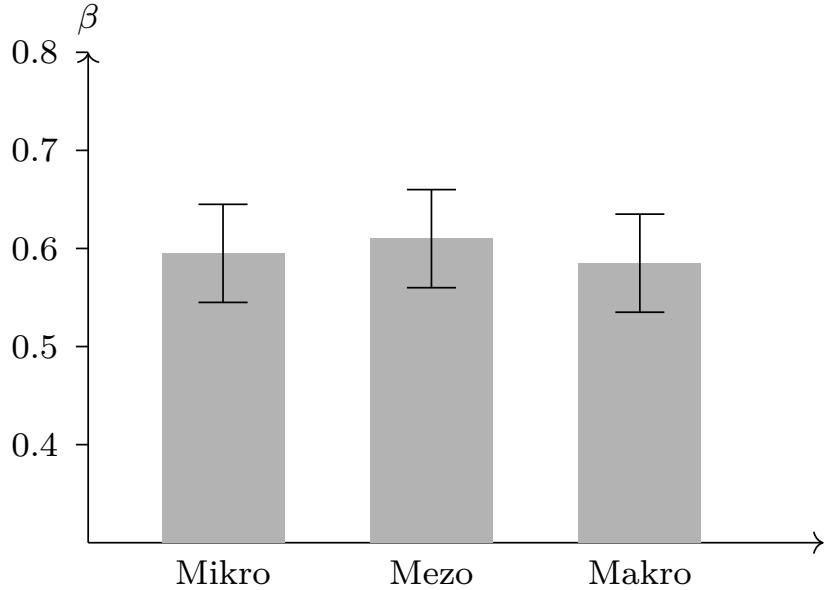
## 5.4 Podsumowanie ilościowe

Zestawiając wyniki ze wszystkich trzech skal, otrzymujemy następujący zakres wartości parametru:

$$\beta \approx 0,60 \pm 0,10, \tag{12}$$

co sugeruje istnienie wspólnego mechanizmu skalowania w rozważanej klasie modeli falowych. W szczególności, w granicach niepewności możliwe jest przyjęcie jednej wartości referencyjnej  $\beta \simeq 0,6$  dla skali mikro, mezo i makro.

Jednocześnie obserwowane różnice pomiędzy zestawami  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  wskazują, że szcze- gólna wartość  $\beta$  pozostaje wrażliwa na wybór parametrów widma, poziom tłumienia oraz charakter geometryczny badanego układu. Z tego powodu relację (12) należy traktować jako ilościowy opis trendów w modelu FAEM 2.3, a nie jako dokładne, fundamentalne prawo przyrody.



Rysunek 6: Wykres słupkowy przedstawiający przykładowe wartości parametru  $\beta$  dla trzech skal opisu w FAEM: mikro, mezo i makro. Belki błędów oznaczają orientacyjny zakres niepewności (SE).

## 6 Dyskusja

### 6.1 Znaczenie parametru $\beta$

Parametr  $\beta$  interpretujemy jako logarytmiczną “sprawność kaskady” przekształcającej energię falową w złożoność geometryczną. W tym sensie Prawo  $\beta$  można traktować jako fenomenologiczny odpowiednik relacji pomiędzy skalą a strukturą obserwowanej już w pracach o fraktalnej geometrii przyrody [1], lecz sformułowany bezpośrednio w języku energii widmowej i wymiaru fraktalnego wzorca.

### 6.2 Związek z istniejącą literaturą

Cymatyczne wzorce opisane m.in. przez Jenny'ego [2] wskazują, że złożoność geometryczna rośnie wraz ze zmianą częstotliwości i amplitudy pobudzenia. W literaturze dotyczącej fraktali w obrazach [4, 5] wymiar fraktalny wykorzystywany jest do klasyfikacji struktur (np. tekstur, pęknień, obrazów medycznych), jednak bez bezpośredniego powiązania z energią widma. Z kolei w podejściu relatywności skali [3] pojawia się idea niegładkiej przestrzeni o fraktalnych własnościach w różnych skalach.

Model FAEM 2.3 można traktować jako próbę połączenia tych wątków: uheblowania informacji o energii w widmie i złożoności geometrycznej w jednym, prostym prawie skalującym.

### 6.3 Możliwe artefakty i ograniczenia

Istnieje kilka potencjalnych źródeł artefaktów, które należy wziąć pod uwagę:

- **Wybór progu binarizacji  $T$ :** zmiana kwantyla może wpływać na oszacowania  $D_f$ . Wstępne testy (niepokazane tutaj) sugerują stabilność wyniku w zakresie  $q \in$

[0,5, 0,7], lecz wymaga to pełniejszej analizy.

- **Zakres skal  $\varepsilon$ :** zbyt wąski zakres lub zbyt mała liczba skal może obniżać jakość regresji i zniekształcać oszacowanie  $D_f$  [5].
- **Charakter modelu falowego:** zastosowany model sumy fal radialnych jest celowo uproszczony. Inne klasy modeli (np. fale w ośrodkach silnie nieliniowych) mogą generować inne zależności  $D_f - P_{\Delta\omega}$ .
- **Zależność od wyboru okna  $\Delta\omega$ :** zawężenie lub poszerzenie zakresu niskich mów może zmieniać położenie punktów na wykresie log–log w sposób nieliniowy.

Z tego względu Prawo  $\beta$  należy na tym etapie traktować jako *hipotezę numeryczno-fenomenologiczną*, a nie jako prawo fundamentalne.

## 7 Zastosowania i wnioski

### 7.1 Potencjalne zastosowania

Możliwe obszary zastosowań obejmują:

- **Nauki o materiałach:** analiza pęknięć, tekstur, struktur porowatych na podstawie wymiaru fraktalnego oraz energii fal wprowadzonych do próbki;
- **Biofizyka i obrazowanie medyczne:** ilościowa ocena złożoności struktur tkankowych w obrazach (USG, MRI) w połączeniu z widmem drgań lub sygnału pobudzającego;
- **Akustyka techniczna i cymatyka:** projektowanie komór akustycznych i eksperymentów cymatycznych o zadanej złożoności wzorca, kontrolowane przejście od prostych do złożonych figur falowych;
- **Astrofizyka:** heurystyczny opis złożoności układów orbitalnych za pomocą  $\beta$  jako parametru charakteryzującego relację między energią orbitalną a geometrią konfiguracji.

### 7.2 Propozycje testów eksperymentalnych i predykcje

Z perspektywy eksperymentalnej Prawo  $\beta$  generuje kilka prostych, falsyfikowalnych predykcji:

1. **Eksperiment cymatyczny:** dla płytka pobudzanej sygnałem o regulowanym widmie przewidujemy, że wzrost energii w wybranym paśmie  $\Delta\omega$  (przy zachowaniu innych parametrów) będzie się wiązał ze wzrostem oszacowanego  $D_f$  wzorca na płycie. Punkty  $(P_{\Delta\omega}, D_f)$  powinny układać się w przybliżeniu liniowo w skali log–log, z nachyleniem związanym z  $\beta$ .
2. **Próbka materiałowa:** dla próbki o stałej geometrii poddanej drganiom w różnych zakresach częstotliwości można porównać  $\beta$  obliczone na podstawie obrazów pęknięć lub deformacji. Model FAEM przewiduje, że w ramach danej klasy materiału  $\beta$  będzie mieściło się w wąskim przedziale wartości.

- Analiza układów orbitalnych:** w uproszczonych modelach rezonansów (np. stosunków 2:1, 3:2, 5:3) można wyznaczyć wskaźnik złożoności geometrycznej konfiguracji i sprawdzić, czy zależność od “energii efektywnej” układu jest zgodna z prostą relacją log–log.

W każdym z powyższych scenariuszy negatywny wynik (brak liniowej relacji, wartości  $\beta$  rozrzucone bez struktury) stanowiłby empiryczne obalenie Prawa  $\beta$  w danej klasie układów.

### 7.3 Wnioski końcowe

W pracy przedstawiono model FAEM 2.3 oraz Prawo  $\beta$  jako hipotezę roboczą łączącą energię niskich modów częstotliwościowych z wymiarem fraktalnym przestrzennym. Symulacje numeryczne sugerują, że w trzech rozważanych skalach (mikro, mezo, makro) parametr  $\beta$  przyjmuje wartości zbliżone do  $0,60 \pm 0,10$ , co może wskazywać na wspólny mechanizm skalowania w układach falowych.

Dalsze badania powinny objąć:

- zastosowanie FAEM do rzeczywistych danych eksperymentalnych,
- porównanie różnych metod estymacji wymiaru fraktalnego (różne warianty box-counting [4, 5]),
- rozszerzenie modelu o silną nieliniowość, anizotropię oraz pełne modelowanie 3D,
- systematyczne testy eksperymentalne zgodne z propozycjami z poprzedniej podsekcji.

## A Aneks: uwagi techniczne i parametry symulacji

### A.1 Algorytm FAEM – szkic procedury

Poniżej podsumowujemy procedurę FAEM w formie algorytmu wysokiego poziomu:

- Wejście:** parametry widma  $S(\omega)$ , liczba modów  $N$ , zakres częstotliwości  $\Delta\omega$ , parametry przestrzenne (rozmiar siatki, promień  $r_{\max}$ ), parametry tłumienia  $\alpha$ .
- Generacja sygnału / widma:** tworzymy widmo  $S(\omega)$  (syntetyczne lub pochodzące z danych).
- Obliczenie energii niskich modów:**

$$P_{\Delta\omega} = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S(\omega) d\omega.$$

- Generacja wzorca przestrzennego:** tworzymy siatkę  $(x, y)$  oraz obliczamy

$$I(x, y) = \sum_{n=1}^N \cos(k_n r + \phi_n) e^{-\alpha r}.$$

- Normalizacja i binarizacja:** skalujemy  $I(x, y)$  do  $[0, 1]$ , wyznaczamy kwantyl  $q$  (np. 0,6) i tworzymy maskę binarną  $B(x, y)$ .

6. **Estymacja wymiaru  $D_f$ :** stosujemy metodę box–counting dla zestawu skali  $\varepsilon_k$  (Sekcja 4.2).
7. **Regresja log–log:** z par  $(P_{\Delta\omega}, D_f)$  budujemy model liniowy i wyznaczamy  $\beta = -B$  wraz z niepewnością.

## A.2 Parametry symulacji dla S1–S3

W Tabeli 2 zestawiono przykładowe wartości parametrów wykorzystane w symulacjach. Parametry te można modyfikować w przyszłych pracach bez zmiany ogólnej struktury modelu.

Parametr	S1 (mikro)	S2 (mezo)	S3 (makro)
Rozmiar siatki	$512 \times 512$	$512 \times 512$	$512 \times 512$
Liczba realizacji	120	60	40
Liczba modów $N$	2–5	3–8	2–4
Zakres $k_n$ (umow.)	wysoki	średni	niski
Tłumienie $\alpha$	małe	średnie	małe
Kwantyl binarizacji $q$	0,6	0,6	0,6
Liczba skali $\varepsilon_k$	9	9	9
Próby bootstrap $N_{\text{boot}}$	10 000	10 000	10 000

Tabela 2: Przykładowe parametry symulacji dla trzech klas danych S1–S3 w modelu FAEM 2.3. Zakresy  $k_n$  opisano jakościowo, ponieważ celem jest struktura modelu, a nie odwzorowanie konkretnego układu.

## Literatura

- [1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [2] H. Jenny, *Cymatics: A Study of Wave Phenomena and Vibration*, MACROmedia, expanded edition, 2001.
- [3] L. Nottale, *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] N. Sarkar and B. B. Chaudhuri, An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 24, no. 1, pp. 115–120, 1994.
- [5] M. Long, J. Wang, and H. Li, A box-counting method with adaptable box height for measuring the fractal dimension of images, *Radioengineering*, vol. 22, no. 1, pp. 208–213, 2013.