Inconsistency of incomplete pairwise comparisons matrices

Dawid Talaga

AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland

Abstract

TODO: Abstract, should normally be not longer than 200 words.

Keywords: pairwise comparisons, inconsistency, incomplete matrices, AHP

1. Wstęp

TODO: Opis metody PC

2. Problem niespójności

TODO: Opis o co chodzi z niespójnością

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk} \quad \forall_{i,j,k} \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \tag{2}$$

Może być wyliczane poprzez wartości własne lub średnie geometryczne

3. Współczynniki niespójności

W ciągu długiej historii metody porównywania parami powstało wiele metod obliczania niespójności. Wiele z nich opiera się wprost na definicji spójności (1), niektóre korzystają z wartości własnych macierzy, jeszcze inne bazują na założeniu, że dla spójnej macierzy zachodzi (2), gdzie w to wektor wag dla macierzy A.

W niniejszej pracy przedstawiono dziesięć popularnych współczynników niespójności, które można relatywnie łatwo zmodyfikować w taki sposób, aby działały dla niepełnych macierzy. Wiele z tych współczynników zostało opisanych i przebadanych numerycznie w pracy [1].

Email address: talagadawid@gmail.com (Dawid Talaga)

3.1. Koczkaodaj index

Jeden z najpopularniejszych współczynników niespójności został zaproponowany przez Koczkodaja [2]. Bazuje on wprost na definicji spójności (1). Wartość współczynnika niespójności dla trójki liczb, które są od siebie zależne (nazwana triadą) została określona jako

$$K_{i,j,k} = min\{\frac{1}{a_{ij}} \mid a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \mid, \frac{1}{a_{ij}} \mid a_{ik} - a_{ij}a_{jk} \mid, \frac{1}{a_{jk}} \mid a_{jk} - \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \mid\}. \quad (3)$$

Wzór ten został uproszczony przez Duszak i Koczkodaj [3] do postaci

$$K(\alpha, \beta, \gamma) = min\{\mid 1 - \frac{\beta}{\alpha\gamma} \mid, \mid 1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta} \mid\}, \quad gdzie\, \alpha = a_{ij}, \beta = a_{ik}, \gamma = a_{jk} \quad (4)$$

a następnie uogólniony [3] dla macierzy $n > 2$. Ostatecznie osiągnięto postać

$$K = max\{K(\alpha, \beta, \gamma) | 1 \leq i < j < k \leq n\} \quad (5)$$

Warto zauważyć, że współczynnik nie tylko znajduje największą niespójność, ale także wskazuje miejsce, w którym ona występuje.

3.2. Grzybowski index

Bazując na współczynniku Koczkodaja, Grzybowski wprowadził nowy współczynnik [4]. Zrezygnował z szukania najbardziej niespójnej triady, na rzecz uśrednienia wartości wszystkich współczynników niespójności. Nowy współczynnik (oznaczony jako G) został zdefiniowany jako $G = Mean(K(\alpha, \beta, \gamma)$, gdzie $Mean$ oznacza średnią arytmetyczną wszystkich triad. Zatem współczynnik zostaje zapisany w postaci

$$G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_i(\alpha, \beta, \gamma), \quad (6)$$

3.3. Kazibudzki indices

Bazując na współczynniku Koczkodaja oraz spostrzeżeniu, że $ln(\frac{\alpha\gamma}{\beta}) = -ln(\frac{\beta}{\alpha\gamma})$,Kazibudzki wprowadził kilka dodatkowych współczynników niespójności [5]. Zamiast wzoru na niespójność triady 4, zaproponował dwa nowe wzory:

$$LTI(\alpha, \beta\gamma) = \mid ln(\frac{\alpha\gamma}{\beta}) \mid, \quad (7)$$

$$LTI * (\alpha, \beta\gamma) = ln^2(\frac{\alpha\gamma}{\beta}). \quad (8)$$

W oparciu o powyższe równania, Kazibudzki zaproponował nowe współczynniki niespójności. Najprostsze wykorzystują średnią geometryczną triad. Zatem usyskał wzory

$$MLTI(LTI) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[LTI_i(\alpha, \beta\gamma)\right], \tag{9}$$

$$MLTI(LTI*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[LTI *_i (\alpha, \beta\gamma)\right]. \tag{10}$$

Po przeprowadzeniu kolejnych badań [6], Kazibudzki wprowadził kolejny współczynnik niespójności, znów oparty na 8. Został zdefniowany jako $CM(LTI*) = \frac{MEAN[LTI*(\alpha,\beta,\gamma)]}{1+MAX[LTI*(\alpha,\beta,\gamma)]}$. Ostatecznie wzór na współczynnik niespójności zapisyjemy w postaci

$$CM(LTI*) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[LTI *_i (\alpha, \beta, \gamma)]}{1 + max\{LTI *_i (\alpha, \beta, \gamma)\}}. \tag{11}$$

3.4. Index of deteminants

Index wprowadzony przez Pelaez i Lamata [7] również bazuje na koncepcji triad. Autorzy zauważyli, że na podstawie triad można zbudować macierze PCM, a ich wyznacznik jest ściśle związany ze spójnością macierzy.

Dla dowolnej triady (a_{ik}, a_{ij}, a_{jk}) można zbudować macierz postaci

$$T_{ijk} = \begin{matrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 & a_{jk} \\ \frac{1}{a_{ik}} & \frac{1}{a_{jk}} & 1 \end{matrix}, \quad gdzie\, i < j < k. \tag{12}$$

Wyznacznik takiej macierzy wynosi

$$det(A) = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2. \tag{13}$$

Jeśli macierz jest spójna, wtedy $det(A) = 0$, w przeciwnym razie $det(A) > 0$.Bazując na powyższych rozważaniach, autorzy wprowadzili współczynnik niespójności, który można zapisać w postaci

$$CI* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2\right). \tag{14}$$

3.5. Kułakowski and Szybowski indices

Kułakowski i Szybowski zaproponowali dwa kolejne współczynniki niespójności [8], również oparte na triadach. Wykorzystują one fakt, że ilość triad, jakie można znaleźć w macierzy wynosi $\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Wprowadzony współczynnik jest postaci

$$I_1 = \frac{6\sum_{t\in T} K(t)}{n(n-1)(n-2)}, \tag{15}$$

gdzie $K(t)$ to współcznnik Koczkodaja dla triady $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ ze zbioru wszystkich triad T. Drugi współczynnik niespójności jest podobny

$$I_2 = \frac{6\sqrt{\sum_{t \in T} K^2(t)}}{n(n-1)(n-2)}. \tag{16}$$

Współczynniki można łączyć ze sobą, tworząc nowe współczynniki niespójności. W taki Kułakowski i Szykowski zaproponowali dwa kolejne współczynniki. Pierwszy bazuje na 5 oraz 15 i pozwala wybierać jaki wpływ na wynik ma mieć największa znaleziona niespójność, a jaki średnia niespójność wszystkich triad. Współczynnik niespójności wygląda więc następująco

$$I_\alpha = \alpha K + (1-\alpha) I_1. \tag{17}$$

Drugi rozszerza pierwszy o 16

$$I_{\alpha,\beta} = \alpha K + \beta I_1 + (1 - \alpha - \beta) I_2. \tag{18}$$

3.6. Geometric consistency index

Jeden z indeksów, który opiera się na założeniu 2. Wektor wag w tym przypadku powinien być obliczony metodą średnich geometrycznych [referencja!]. Współczynnik niespójności został zaproponowany przez Craforda i Williamsa [9], a następnie udoskonalony przez Aguaròn and Moreno-Jimènez [10]. Koszystając z założenia tworzymy macierz

$$E = \left[e_{ij} \mid e_{ij} = a_{ij} \frac{w_i}{w_j} \right], \quad i, j = 1, ..., n. \tag{19}$$

Współczynnik niespójności obliczamy w następujący sposób

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ln^2 e_{ij}. \tag{20}$$

3.7. Harmonic consistency index

Indeks wprowadzony przez Stein i Mizzi i prezentuje zupełnie nową metodę liczenia niespójności [11]. Na początku wymaga utworzenia pomocniczego wektora $s = (s_1, ..., s_n)^T$,gdzie n to wymiar macierzy A, dla której policzony zostanie współczynnik. Każdy element wektora to suma wartości w jedej kolumnie macierzy A, a więc

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \quad \forall j. \tag{21}$$

Autorzy indeksu udowodnili, że jeśli macierz A jest spójna, to $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} = 1$. Wzór na średnią harmoniczną wygląda następująco [12]

$$HM = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j}}. \tag{22}$$

Ostateczny wzór na współczynnik niespójności został otrzymany poprzez normalizację 22

$$HCI = \frac{(HM(s) - n)(n+1)}{n(n-1)}. \tag{23}$$

3.8. Golden-Wang index

Ten współczynnik niespójności został wprowadzony przez Goldena i Wanga [13]. Zakłada, że wektor wag został wyliczony na podstawie metody średnich geometrycznych [referencja!], a następnie został znormalizowany. W ten sposób orzymano wektor $g* = [g_1^*, ..., g_n^*]$, gdzie n to wymiar badanej macierzy A. Następnym krokiem jest normalizacja każdej kolumny macierzy A. Po normalizacji suma elementów każdej kolumny macierzy A wynosi 1. Powstałą w ten sposób macierz oznaczmy symbolem A^*. Współczynnik niespójności zdefiniowano w następujący sposób

$$GW = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij}^* g_j^* \mid . \tag{24}$$

3.9. Salo and Hamalainen index

Indeks wprowadzony przez Salo i Hamalainena [14, 5] wykorzystuje definicję niespójności 1, wymaga jednak utworzenia macierzy pomocniczej, w której każdy element to najmniejsza i największa rozbieżność od spójności w oparciu o wzór 1. Indeks bierze pod uwagę wszystkie triady:

$$R = (r_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} [\underline{r}_{11}, \overline{r}_{11}] & \dots & [\underline{r}_{1n}, \overline{r}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{r}_{n1}, \overline{r}_{n1}] & \dots & [\underline{r}_{nn}, \overline{r}_{nn}] \end{pmatrix}, \tag{25}$$

gdzie $\underline{r_{ij}} = min\,\{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \dots, n\}$, $\overline{r_{ij}} = max\,\{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \dots, n\}$, a n to wymiar badanej macierzy. Numeryczny przykład został przedstawiony w [12]. Bazując na powstałej macierzy R, autorzy zaproponowali następujący współczynnik niespojności:

$$CM = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\overline{r}_{ij} - \underline{r}_{ij}}{(1+\overline{r}_{ij})\left(1+\underline{r}_{ij}\right)}. \tag{26}$$

4. Współczynniki niespójności dla niepełnych macierzy

5. Dyskusja

6. Podsumowanie

References

[1] M. Brunelli, L. Canal, M. Fedrizzi, Inconsistency indices for pairwise comparison matrices: a numerical study, Annals of Operations Research 211 (1) (2013) 493–509. doi:10.1007/s10479-013-1329-0.
URL `https://doi.org/10.1007/s10479-013-1329-0`

[2] W. Koczkodaj, A new definition of consistency of pairwise comparisons, Mathematical and Computer Modelling 18 (7) (1993) 79 – 84. doi:https://doi.org/10.1016/0895-7177(93)90059-8.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0895717793900598`

[3] Z. Duszak, W. W. Koczkodaj, Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons, Information Processing Letters 52 (5) (1994) 273 – 276. doi:https://doi.org/10.1016/0020-0190(94)00155-3.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019094001553

[4] A. Z. Grzybowski, New results on inconsistency indices and their relationship with the quality of priority vector estimation, Expert Systems with Applications 43 (2016) 197 – 212. doi:https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.08.049.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417415006065

[5] P. Kazibudzki, Redefinition of triad's inconsistency and its impact on the consistency measurement of pairwise comparison matrix 2016 (2016) 71–78.

[6] P. T. Kazibudzki, The quality of priority ratios estimation in relation to a selected prioritization procedure and consistency measure for a pairwise comparison matrix, CoRR abs/1704.01944. arXiv:1704.01944.
URL http://arxiv.org/abs/1704.01944

[7] J. PelÃ¡ez, M. Lamata, A new measure of consistency for positive reciprocal matrices, Computers & Mathematics with Applications 46 (12) (2003) 1839 – 1845. doi:https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)90240-9.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122103902409

[8] K. Kulakowski, J. Szybowski, The new triad based inconsistency indices for pairwise comparisons, Procedia Computer Science 35 (2014) 1132 – 1137, knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems 18th Annual Conference, KES-2014 Gdynia, Poland, September 2014 Proceedings. doi:https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.08.205.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050914011703

[9] G. Crawford, C. Williams, A note on the analysis of subjective judgment matrices, Journal of Mathematical Psychology 29 (4) (1985) 387 – 405. doi:https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022249685900021

[10] J. Aguaron, J. M. Moreno-Jimenez, The geometric consistency index: Approximated thresholds, European Journal of Operational Research 147 (1) (2003) 137 – 145. doi:https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00255-2.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702002552

[11] W. E. Stein, P. J. Mizzi, The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research 177 (1) (2007) 488 – 497. doi:https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.057.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705009288

[12] M. Brunelli, Introduction to the Analytic Hierarchy Process, 2015.

[13] B. L. Golden, Q. Wang, An Alternate Measure of Consistency, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1989, pp. 68–81.

[14] A. A. Salo, R. P. Hamalainen, Preference programming through approximate ratio comparisons, European Journal of Operational Research 82 (3) (1995) 458 – 475. doi:https://doi.org/10.1016/0377-2217(93)E0224-L.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221793E0224L