Inconsistency of incomplete pairwise comparisons matrices

Dawid Talaga

AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland

Abstract

TODO: Abstract, should normally be not longer than 200 words.

Keywords: pairwise comparisons, inconsistency, incomplete matrices, AHP

1. Introduction

Ludzie od wieków podejmują decyzję. Niektóre z nich są bardzo proste i przychodzą z łatwością, inne jednak, te bardziej skomplikowane, wymagają głębszej analizy. Dzieje się tak wtedy, gdy porównywanych obiektów jest wiele, są rozbudowane, a kryterium wyboru ciężko jest jednoznacznie zmierzyć. Na szczęście rozwój matematyki przyniósł ciekawe narzęcie - The Pairwise Comparisons (PC) Method. Pierwszym przypdakiem użycia metody (jeszcze w bardzo prostej wersji) jest system elekcyjny opisany przez Ramonda Llulla [1] już w XIII wieku. Jego zasady polegały na tym, że kandydatów porównywano każdy z każdym, a zwyciężał ten, który wygrał w największej liczbie bezpośrednich porównań. Kolejny powrót do metody to dopiero wiek osiemnasty i system głosowania zaproponowany przez Condorcet i Borda [2]. W XX wieku metoda znalazła zastosowanie w teorii społecznego wyboru (social choice), której głównymi przedstawicielami byli nobliści Keneth Arrow [3] i Amartya Sen [4]. Na obecny kształt metody wpływ miały zmiany wprowadzone przez Fechnera [Fechner 1966] , a następnie udoskonalone prze Thrustone [5]. Przełomowm momentem stało się jednak wprowadzenie do metody The Analytic Hierarchy Process (AHP) przez Saaty'ego [6], które pozwoliło na porównywanie o wiele bardziej skomplikowanych obiektów i tworzenie struktury hierarchicznej.

The PC method opiera się na założeniu, że nie warto porównywać od razu wszystkich obiektów. Lepiej jest porównać je parami, a następnie wyniki zebrać razem. Takie porównania parami są dla człowieka dużo bardziej intuicyjne i naturalne. Skąd jednak mieć pewność, że jego oceny są spójne? Albo co zrobić w przypadku, gdy pewnych porównań zabraknie? Czy warto wtedy zajmować się w ogóle metodą porównywania parami?

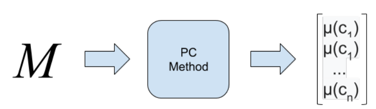
Email address: talagadawid@gmail.com (Dawid Talaga)

Odpowiedzią na pierwsze pytanie jest wprowadzone do metody pojęcie niespójności i wiele sposobów liczenia tego parametru. Celem tej pracy jest udzielenie odpowiedzi na dwa kolejne pytania. A więc zbadanie, czy dostępne metody określania niespójności dają wiarygodne rezultaty wtedy, kiedy z jakiegoś powodu brakuje części informacji. Zadaniem niniejszej pracy jest sprawdzenie, który sposób liczenia niespójności jest w takim przypadku najlepszy i czy w ogóle ma to sens. Aby tego dokonać, wykonano szereg testów na różnych znanych współczynnikach niespójności, uwzględniając wiele różnych parametrów: rozmiar macierzy, ilość brakujących danych, wielkość niespójności. Rezultaty badań zostały zamieszczone poniżej.

2. Preliminaries

2.1. Metoda porównywania parami

Metoda służy do wyboru najlepszej alternatywy z pośród zbioru alternatyw. Cel ten zostaje osiągnięty jednak poprzez porównanie parami wszystkich alternatyw. Każdej parze przypisywana jest wartość numeryczna, która nie tylko określa, która alternatywa jest preferowana, ale informuje również o wadze tej preferencji. W ten sposób skończony zbiór alternatyw $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ zostaje przekształcony w PC macierz $M = (m_{ij})$, gdzie $m_{i,j} \in R$ i $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Warto zauważyć, że martości m_{ij} i m_{ji} reprezentują tę samą parę. Należy się zatem spodziewać, że wartość $m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}$. Jeżeli $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}$, to macierz nazywamy odwracalną (reciprocal). PC macierz jest podstawą obliczeń metody. Jest wykorzystywana w funkcji $\mu : C \rightarrow R$, która każdej alternatywie ze zbioru C przypisuje dodatnią liczbę rzeczywistą. Utworzony w ten sposób wektor $\mu = [\mu(c_1), \ldots, \mu(c_n)]$, nazywany jest wektorem wag (see Fig.1). Informuje on o tym, która alternatywa zwyciężyła.



Istnieje wiele sposobów obliczania wektora μ, wśród popularnych znajdują się metoda wykorzystująca wektory własne macierzy, czy metoda oparta na średnich geometrycznych [7].

2.2. Niespójność

Ważnym parmetrem określającym macierz M jest spójność. Macierz jest spójna jeżeli dla każdych i, j, k, gdzie $1 \leq i, j, k \leq n$ zachodzi:

$$m_{ik} = m_{ij} m_{jk} \quad \forall_{i,j,k}. \tag{1}$$

Warto zauważyć, że jeżeli macierz jest spójna, to po obliczeniu wektora wag μ, spełniony jest również warunek, że dla każdych i, j gdzie $1 \leq i, j \leq n$ zachodzi:

$$a_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \tag{2}$$

W praktyce rzadko zdarza się, żeby macierz M była całkowicie spójna. Dlatego w ciągu długiej historii metody porównywania parami, powstało wiele metod obliczania niespójności. Część z nich opiera się wprost na definicji spójności (1), niektóre korzystają z wartości własnych macierzy, jeszcze inne bazują na wspomnianym już warunku (2).

3. Współczynniki niespójności

W niniejszej pracy przedstawiono szesnaście popularnych współczynników niespójności. Ich dokładny opis, łącznie z podaniem wzorów, które je opisują jest konieczny, aby w kolejnym kroku zmodyfikować je w taki sposób, aby działały również dla niepełnych macierzy. Wiele z tych współczynników zostało opisanych i przebadanych numerycznie w pracy [8]. We wszystkich metodach zakłada się, że macierz jest odwracalna (reciprocal).

3.1. Saaty index

To jeden z najbardziej podstawowych i popularnych współczynników. Wprowadzony prze Saaty'ego [9]. W celu wyznaczenia niespójności, należy wykorzystać wartość własną macierzy. Autor wykorzystał zależność, największa wartośc własna macierzy jest równa jej wymiarowi wtedy i tylko wtedy, gdy dana macierz jest całkowicie spójna. Na tym założeniu oparł swoje rozważania i zaproponował wzór:

$$CI(A) = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}, \tag{3}$$

gdzie $\lambda_{max}$to największa wartość własna badanej macierzy, a n to jej wymiar.

3.2. Geometric consistency index

Jeden z indeksów, który opiera się na założeniu 2. Wektor wag w tym przypadku powinien być obliczony metodą średnich geometrycznych [referencja!]. Współczynnik niespójności został zaproponowany przez Craforda i Williamsa [10], a następnie udoskonalony przez Aguaròn and Moreno-Jimènez [11]. Koszystając z założenia tworzymy macierz

$$E = \left[e_{ij} \mid e_{ij} = a_{ij} \frac{w_i}{w_j} \right], \quad i, j = 1, ..., n. \tag{4}$$

Współczynnik niespójności obliczamy w następujący sposób

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ln^2 e_{ij}. \tag{5}$$

3.3. Koczkodaj index

Jeden z najpopularniejszych współczynników niespójności został zaproponowany przez Koczkodaja [12]. Bazuje on wprost na definicji spójności (1). Wartość współczynnika niespójności dla trójki liczb, które są od siebie zależne (nazwana triadą) została określona jako

$$K_{i,j,k} = min\{\frac{1}{a_{ij}} \mid a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \mid, \frac{1}{a_{ij}} \mid a_{ik} - a_{ij}a_{jk} \mid, \frac{1}{a_{jk}} \mid a_{jk} - \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \mid\}. \quad (6)$$

Wzór ten został uproszczony przez Duszak i Koczkodaj [13] do postaci

$$K(\alpha,\beta,\gamma) = min\{\mid 1 - \frac{\beta}{\alpha\gamma} \mid, \mid 1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta} \mid\}, \quad gdzie\, \alpha = a_{ij}, \beta = a_{ik}, \gamma = a_{jk} \quad (7)$$

a następnie uogólniony [13] dla macierzy $n > 2$. Ostatecznie osiągnięto postać

$$K = max\{K(\alpha,\beta,\gamma) | 1 \leq i < j < k \leq n\} \quad (8)$$

Warto zauważyć, że współczynnik nie tylko znajduje największą niespójność, ale także wskazuje miejsce, w którym ona występuje.

3.4. Kazibudzki indexes

Bazując na współczynniku Koczkodaja oraz spostrzeżeniu, że $ln(\frac{\alpha\gamma}{\beta}) = -ln(\frac{\beta}{\alpha\gamma})$,Kazibudzki wprowadził kilka dodatkowych współczynników niespójności [14]. Zamiast wzoru na niespójność triady 7, zaproponował dwa nowe wzory:

$$LTI(\alpha,\beta\gamma) = \mid ln(\frac{\alpha\gamma}{\beta}) \mid, \quad (9)$$

$$LTI*(\alpha,\beta\gamma) = ln^2(\frac{\alpha\gamma}{\beta}). \quad (10)$$

W oparciu o powyższe równania, Kazibudzki zaproponował nowe współczynniki niespójności. Najprostsze wykorzystują średnią geometryczną triad. Zatem usyskał wzory

$$MLTI(LTI) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [LTI_i(\alpha,\beta\gamma)], \quad (11)$$

$$MLTI(LTI*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [LTI*_i(\alpha,\beta\gamma)]. \quad (12)$$

Po przeprowadzeniu kolejnych badań [15], Kazibudzki wprowadził kolejny współczynnik niespójności, znów oparty na 10. Został zdefniowany jako $CM(LTI*) = \frac{MEAN[LTI*(\alpha,\beta,\gamma)]}{1+MAX[LTI*(\alpha,\beta,\gamma)]}$. Ostatecznie wzór na współczynnik niespójności zapisyjemy w postaci

$$CM(LTI*) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[LTI*_i(\alpha,\beta,\gamma)]}{1 + max\{LTI*_i(\alpha,\beta,\gamma)\}}. \quad (13)$$

3.5. Index of deteminants

Index wprowadzony przez Pelaez i Lamata [16] również bazuje na koncepcji triad. Autorzy zauważyli, że na podstawie triad można zbudować macierze PCM, a ich wyznacznik jest ściśle związany ze spójnością macierzy.

Dla dowolnej triady (a_{ik}, a_{ij}, a_{jk}) można zbudować macierz postaci

$$T_{ijk} = \begin{matrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 & a_{jk} \\ \frac{1}{a_{ik}} & \frac{1}{a_{jk}} & 1 \end{matrix}, \quad gdzie\, i < j < k. \tag{14}$$

Wyznacznik takiej macierzy wynosi

$$det(A) = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2. \tag{15}$$

Jeśli macierz jest spójna, wtedy $det(A) = 0$, w przeciwnym razie $det(A) > 0$.Bazując na powyższych rozważaniach, autorzy wprowadzili współczynnik niespójności, który można zapisać w postaci

$$CI* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2\right). \tag{16}$$

3.6. Kułakowski and Szybowski indexes

Kułakowski i Szybowski zaproponowali dwa kolejne współczynniki niespójności [17], również oparte na triadach. Wykorzystują one fakt, że ilość triad, jakie można znaleźć w macierzy wynosi

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \tag{17}$$

Autorzy zrezygnowali z szukania najbardziej niespójnej triady, na rzecz uśrednienia wartości wszystkich współczynników niespójności. Wprowadzony współczynnik można rozumieć jako średnią arytmetyczną wszystkich triad. Jest on postaci

$$I_1 = \frac{6\sum_{t\in T} K(t)}{n(n-1)(n-2)}, \tag{18}$$

gdzie $K(t)$ to współcznnik Koczkodaja dla triady $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ ze zbioru wszystkich triad T. Drugi współczynnik niespójności jest podobny

$$I_2 = \frac{6\sqrt{\sum_{t\in T} K^2(t)}}{n(n-1)(n-2)}. \tag{19}$$

Współczynniki można łączyć ze sobą, tworząc nowe współczynniki niespójności. W taki Kułakowski i Szykowski zaproponowali dwa kolejne współczynniki. Pierwszy bazuje na 8 oraz 18 i pozwala wybierać jaki wpływ na wynik ma mieć największa znaleziona niespójność, a jaki średnia niespójność wszystkich triad. Współczynnik niespójności wygląda więc następująco

$$I_\alpha = \alpha K + (1-\alpha) I_1. \tag{20}$$

Drugi rozszerza pierwszy o 19

$$I_{\alpha,\beta} = \alpha K + \beta I_1 + (1-\alpha-\beta) I_2. \tag{21}$$

3.7. Harmonic consistency index

Indeks wprowadzony przez Stein i Mizzi i prezentuje zupełnie nową metodę liczenia niespójności [18]. Na początku wymaga utworzenia pomocniczego wektora $s = (s_1, ..., s_n)^T$,gdzie n to wymiar macierzy A, dla której policzony zostanie współczynnik. Każdy element wektora to suma wartości w jedej kolumnie macierzy A, a więc

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \quad \forall j. \tag{22}$$

Autorzy indeksu udowodnili, że jeśli macierz A jest spójna, to $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} = 1$. Wzór na średnią harmoniczną wygląda następująco [19]

$$HM = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j}}. \tag{23}$$

Ostateczny wzór na współczynnik niespójności został otrzymany poprzez normalizację (23)

$$HCI = \frac{(HM(s) - n)(n+1)}{n(n-1)}. \tag{24}$$

3.8. Golden and Wang index

Ten współczynnik niespójności został wprowadzony przez Goldena i Wanga [20]. Zakłada, że wektor wag został wyliczony na podstawie metody średnich geometrycznych [referencja!], a następnie został znormalizowany. W ten sposób orzymano wektor $g* = [g_{1,}^*, ..., g_n^*]$, gdzie n to wymiar badanej macierzy A. Następnym krokiem jest normalizacja każdej kolumny macierzy A. Po normalizacji suma elementów każdej kolumny macierzy A wynosi 1. Powstałą w ten sposób macierz oznaczmy symbolem A^*. Współczynnik niespójności zdefiniowano w następujący sposób

$$GW = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij}^* g_j^* \mid. \tag{25}$$

3.9. Salo and Hamalainen index

Indeks wprowadzony przez Salo i Hamalainena [21, 14] wykorzystuje definicję niespójności (1), wymaga jednak utworzenia macierzy pomocniczej, w której każdy element to najmniejsza i największa rozbieżność od spójności w oparciu o wzór (1). Indeks bierze pod uwagę wszystkie triady:

$$R = (r_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} [\underline{r}_{11}, \overline{r}_{11}] & \dots & [\underline{r}_{1n}, \overline{r}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{r}_{n1}, \overline{r}_{n1}] & \dots & [\underline{r}_{nn}, \overline{r}_{nn}] \end{pmatrix}, \tag{26}$$

gdzie $\underline{r_{ij}} = min\{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \ldots, n\}$, $\overline{r_{ij}} = max\{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \ldots, n\}$, a n to wymiar badanej macierzy. Numeryczny przykład został przedstawiony w [19]. Bazując na powstałej macierzy R, autorzy zaproponowali następujący współczynnik niespojności:

$$CM = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\overline{r}_{ij} - \underline{r}_{ij}}{(1 + \overline{r}_{ij})\left(1 + \underline{r}_{ij}\right)}. \tag{27}$$

3.10. Cavallo and D'Apuzzo index

Autorzy Cavallo and D'Apuzzo oparli swój index na triadach, poprowadzili jednak badania nową ścieżką, uogólniając je dla liniowych, uporządkowanych grup abelowych [22, 23]. Dzięki temu indeks może być stosowany również z innymi relacjami [8]. Współczynnik dla relacji max można przedstawić w postaci wzoru:

$$I_{CD} = \prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=i+1}^{n-2} \prod_{k=j+1}^{n} \left(max\left\{ \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}, \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} \right\} \right)^{\frac{1}{\binom{n}{3}}}. \tag{28}$$

3.11. Relative error

Ten współczynnik niespójności, zaproponowany przez Barzailiego [24], wymaga obliczenia wektora wag metodą obliczenia średniej arytmetycznej dla każdego wiersza oraz utworzenia dwóch dodatkowych macierzy. Zatem wektor wag wynosi $w_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, gdzie n to wymiar macierzy. Dwie pomocnicze macierze zostają obliczone według wzorów:

$$C = (c_{ij}) = (w_i - w_j) \tag{29}$$

$$E = (e_{ij}) = (a_{ij} - c_{ij}) \tag{30}$$

Ostatecznie wzór na współczynnik niespójności może zostać zapisany w postaci:

$$RE(A) = \frac{\sum_{ij} e_{ij}^2}{\sum_{ij} a_{ij}^2}. \tag{31}$$

4. Współczynniki niespójności dla niepełnych macierzy

Nie istnieją współczynniki niespójności przeznaczone dla macierzy niepełnych. Współczynniki z rozdziału (3) można jednak zastosować w takich przypadkach. Zazwyczaj wymaga to lekkiej modyfikacji definicji współczynnika lub wykonania obliczeń tylko dla wybranych danych. Poniżej zostały zaprezentowane sposoby, w jaki prezentowane współczynniki zostały dostosowane, aby potrafiły radzić sobie z macierzami niepełnymi.

We wszystkich metodach na początku przyjęte zostaje założenie, że w puste miejsca w macierzy wpisana zostaje wartość 0.

Saaty index: Wejściowa macierz zostaje zmodyfikowana w wykorzystaniem metody zaproponowanej przez Harkera [25]. Oznacza to, że na przekątnej macierzy umieszczone zostają wartości $c + 1$, gdzie c to ilość niezerowych elementów w danym wierszu. Dla tak uzupełnionej macierzy może zostać policzona wartość współczynnika.

Geometric consistency index: Przy wyliczaniu wektora wag metodą średnich geomemetrych pominięte zostają wartości równe 0. Dodatkowo we wzorze (5) użyte zostają tylko te elementy e_{ij}, które są różne od 0. Spowodowane jest to faktem, że dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór R^{+}.

Koczkodaj index, Kazibudzki indexes, Index of determinants: Pod uwagę wzięte zostają tylko te triady, które nie zawierają wartości zerowych.

Kułakowski and Szybowski indexes: Pod uwagę wzięte zostają tylko te triady, które nie zawierają wartości zerowych. Dodatkowo ilość triad nie jest już liczona według wzoru (17), lecz określona wprost poprzez zliczenie ilości znalezionych triad.

Harmonic consistency index: Brak modyfikacji.

Golden and Wang index: Przy wyliczaniu wektora wag metodą średnich geomemetrych pominięte zostają wartości równe 0.

Salo and Hamalainen: Brak modyfikacji.

Cavallo and D'Appuzo: W czasie wyliczania iloczynu (28) pominięte zostają elementy równe 0.

Relative index: Brak modyfikacji.

5. Dyskusja

Zaprezentowane współczynniki niespójności zostały poddane testom. Ich celem było wybranie tych współczynników, które będą dawały wiarygodne wyniki dla macierzy niepełnych. Postanowiono zatem, że miarą jakości wspłczynników będzie błąd względny (wyrażony w procentach), który bierze pod uwagę wartość współczynnika dla pełnej, niespójnej macierzy oraz wartość współczynnika dla tej samej macierzy po częściowym zdekompletowaniu. Dla pewności, że wyniki są poprawne, badania wszystkich współczynników zostały przeprowadzone na tych samych macierzach. Wzięto pod uwagę różne rozmiary macierzy, stopień zdekompletowania i poziom niespójności. Następnie, w celu łatwego porównania współczynniów i wyboru najlepszych, uśredniono wyniki, wykorzystując średnią arytmetyczną. Przy budowaniu kolejnych kroków rozwiązania problemu, wykorzystano algorytmy pojawiącje się w artykule [15].

Algorytm badań współczyników niespójności:.

1. Wygeneruj losowy wektor n liczb $w = [w_1, ..., w_n]$ i powiązaną z nim spójną macierz porównywania parami $PCM = [m_{ij}]$, gdzie $m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$.
2. Zaburz macierz poprzez przemnożenie jej elementów (z wyłączeniem przekątnej) przez wartość d, losowo wybieraną z przedziału $\left(\frac{1}{x}, x\right)$.
3. Zastąp wartości m_{ij}, gdzie $i < j$ wartościami m_{ji}.
4. Oblicz wartości współczynników niespójności wszystkimi metodami dla utworzonej macierzy.
5. Zdekompletuj macierz, usuwając niektóre z wartości porównań. Stopień niekompletności ma wynieść $g\%$.
6. Oblicz wartości współczynników niespójności wszystkimi metodami dla zdekompletowanej macierzy.
7. Oblicz błąd względny dla każdego indeksu.
8. Powtórz kroki od 1 do 10 X_1 razy.
9. Oblicz średni błąd względny dla każdego współczynnika niespójności dla macierzy PCM.
10. Powtórz kroki od 1 do 10 X_2 razy.
11. Oblicz średni błąd względny dla każdego współczynnika poprzez uśrednienie wartości otrzymanych w kroku 9.

Powyższy algorytm został przeprowadzony dla wartości $X_1 = 100$, $X_2 = 100$. Został uruchomiony dla wartości d z przedziału $(1.1, 1.2, ..., 4)$, a wyniki następnie uśredniono. Oznacz to, że średni błąd względny jednego współczynnika obliczono na podstawie 4000 macierzy, z których każdą zdekompletowano losowo 100 razy, co łącznie daje 400000 spradzeń jak dobry jest dany współczynnik.

Dodatkowo przeprowadzono testy dla różnych rozmiarów macierzy. Wyniki podzielono na dwie części:

1. Stały stopień niekompletności, różny rozmiar macierzy.
2. Różny stopień niekompletności, stały rozmiar macerzy.

Celem takiego podziału jest zwrócenie uwagi na to, jak zachowują się współczynniki niespójności wraz ze zmianą rozmiaru lub stopnia niekompletności. Wyniki badań przedstawiono poniżej.

Wyniki: Błąd względny współczynników niespójności dla niepłnych macierzy o stopniu niekompletności $g = 15\%$ i rózym rozmiarze macierzy.

Nazwa współczynnika	n=4	n=7	n=8	n=10	n=15	średnia
saaty	33,41	19,82	18,78	19,16	17,37	21,71
geometric	616,68	124,73	77,94	68,62	39,13	185,42
koczkodaj	13,86	3,69	2,14	1,62	0,80	**4,42**
kazibudzkiLTI1	24,80	10,21	6,62	4,97	2,73	9,87
kazibudzkiLTI2	42,31	17,93	11,88	9,03	5,03	17,24
kazibudzkiCMLTI2	35,40	17,07	13,26	11,20	6,81	16,75
pelaeLamata	44,65	19,90	13,46	10,36	5,84	18,84
kulakowskiSzybowski	20,34	7,68	4,88	3,63	1,96	7,70
kulakowskiSzybowski2	44,61	26,05	27,12	29,64	28,46	31,18
kulakowskiSzybowskiIa	16,47	5,18	3,09	2,27	1,16	5,63
kulakowskiSzybowskiIab	17,40	4,89	2,81	2,04	1,01	5,63
harmonic	9 573,02	1 577,49	1 127,33	1 066,35	866,00	2 842,04
goldenWang	115,92	54,37	43,90	43,16	36,26	58,72
saloHamalainen	381,57	205,06	176,11	160,06	136,55	211,87
cavalloDapuzzo	16,94	6,85	4,46	3,36	1,87	6,70
relativeError	1 792,64	226 313,60	746,21	100,87	20,42	45 794,75

Wyniki: Błąd względny współczynników niespójności dla niepełnych macierzy o różnym stopniu niekompletności stałym rozmiarze macierzy $n = 8$.

Nazwa współczynnika	g=4%	g=7%	g=14%	g=25%	g=50%	średnia
saaty	4,71	9,40	18,78	32,89	65,56	26,27
geometric	23,60	48,44	86,61	135,68	207,99	100,46
koczkodaj	0,48	0,99	2,17	4,52	16,41	**4,92**
kazibudzkiLTI1	2,90	4,31	6,64	10,05	23,09	9,40
kazibudzkiLTI2	5,12	7,71	11,91	18,08	40,77	16,72
kazibudzkiCMLTI2	5,16	8,05	13,34	22,03	61,16	21,95
pelaeLamata	5,73	8,72	13,52	20,54	45,64	18,83
kulakowskiSzybowski	2,17	3,18	4,91	7,43	17,30	7,00
kulakowskiSzybowski2	5,90	12,22	27,12	56,71	202,27	60,84
kulakowskiSzybowskiIa	1,20	1,88	3,12	5,13	13,97	5,06
kulakowskiSzybowskiIab	1,00	1,65	2,84	4,74	12,97	4,64
harmonic	291,74	544,60	1 152,26	1 962,25	3 995,58	1 589,29
goldenWang	14,23	25,23	46,18	68,83	98,24	50,54
saloHamalainen	88,40	137,70	180,17	182,54	148,74	147,51
cavalloDapuzzo	1,95	2,91	4,46	6,81	16,11	6,45
relativeError	18,99	20,81	206,74	68,98	1 056,96	274,50

Analizując powyższe wyniki, można wysnuć kilka wniosków.

Zpewnością udało się pokazać, że błąd wzrasta wraz ze stopniem niekompletności, co nie powinno byc dużym zaskoczeniem. Jednocześnie maleje wraz ze zwrostem rozmiaru macierzy. Najważniejsze pytanie dotyczyło jednak tego, które współczyniki dobrze poradzą sobie z niekompletnymi macierzami. Najlepszy okazał się Współczynnik Koczkodaja (3.3). Zwycięża w 9 z 10 testów, a jego średni błąd w obu przypadkach okazuje się najlepszy (poniżej 5%). Kolejne miejsca zajmują dwa współczyniki Kułakowskiego i Szybowskiego (3.6) oraz Współczynnik Cavallo i D'Apuzzo (3.10). Warto zauważyć, że wszystkie te współczynniki opierają się na triadach.

Może pojawić się pytanie, co sprawia, że Współczynnik Koczkodaja daje tak dobre wyniki i czy warto go stosować. Warto wrócić do definicji tego współczynika (8) i zauważyć, że jest on równy wartości najbardziej niespójnej triady. Jeśli więc stopień niekompletności macierzy jest niewielki, istnieje duża szansa, że po zdekompletowaniu macierzy i ponownym policzeniu niespójności, wartość współczynnika w ogóle się nie zmieni. Ulegnie ona zmianie jedynie wtedy, kiedy zostanie usunięty element wchodzący w skład najbardziej niespójnej triady. A więc w wielu przypadkach badanie macierzy pełnej i po zdekompletowaniu daje dokładnie te same rezutaty (błąd wynosi 0%). Jest to jedyny tego rodzaju współczynnik spośród zaprezentowanych w tym artykule.

W przypadku korzystania ze Współczynnika Koczkodaja, może pojawić się jednak obawa, że usunięty element należał do najbardziej niespójnej triady. Ciężko przewidzieć wtedy, jaki błąd będzie zawierał wspołczynnik macierzy niepełnej. Wydaje się, że z pomocą przychodzą współczynniki zaproponowane przez Kułakowskiego i Szybowskiego, na które należy zwrócić szczególną uwagę. Pierwszy z nich (18) uśrednia niespójności triad. A więc jest bezpieczny i daje dałkiem dobre rezultaty (w obu testach zajął 6. miejsce i osiagnął błąd poniżej 8%. Z tej perspektywy bardzo ciekawe okazuje się inny współczynnik zaproponowany przez tych samch autorów (20), który w testach zajął 3. miejsce. Posiadaja parametr α pozwalający określać jaki wpływ na wynik ma największa niespójność triad (α), a jaki średnia ($1 - \alpha$). W przeprowadzonych badaniach parametr α wynosił 0.4.

6. Podsumowanie

TODO

Literatura

[1] J. M. Colomer, Ramon llull: from ‘ars electionis’ to social choice theory, Social Choice and Welfare 40 (2) (2013) 317–328. doi:10.1007/s00355-011-0598-2.
URL `https://doi.org/10.1007/s00355-011-0598-2`

[2] K. Kułakowski, Notes on the existence of a solution in the pairwise comparisons method using the heuristic rating estimation approach, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 77 (1) (2016) 105–121. doi:10.1007/s10472-015-9474-6.
URL `https://doi.org/10.1007/s10472-015-9474-6`

[3] K. J. Arrow, A difficulty in the concept of social welfare, Journal of Political Economy 58 (4) (1950) 328–346.
URL `http://www.jstor.org/stable/1828886`

[4] A. Sen, Social choice theory: A re-examination, Econometrica 45 (1) (1977) 53–89.
URL `https://EconPapers.repec.org/RePEc:ecm:emetrp:v:45:y:1977:i:1:p:53-89`

[5] L. L. Thurstone, A law of comparative judgment, Psychological Review 101(2) (1994) 266–270.

[6] T. L. Saaty, Relative measurement and its generalization in decision making why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors the analytic hierarchy/network process, RACSAM - Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas 102 (2) (2008) 251–318. doi:10.1007/BF03191825.
URL `https://doi.org/10.1007/BF03191825`

[7] T. Saaty, G. Hu, Ranking by eigenvector versus other methods in the analytic hierarchy process, Applied Mathematics Letters 11 (4) (1998) 121 – 125. doi:https://doi.org/10.1016/S0893-9659(98)00068-8.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965998000688`

[8] M. Brunelli, L. Canal, M. Fedrizzi, Inconsistency indices for pairwise comparison matrices: a numerical study, Annals of Operations Research 211 (1) (2013) 493–509. doi:10.1007/s10479-013-1329-0.
URL `https://doi.org/10.1007/s10479-013-1329-0`

[9] T. L. Saaty, A scaling method for priorities in hierarchical structures, Journal of Mathematical Psychology 15 (3) (1977) 234 – 281. doi:https://doi.org/10.1016/0022-2496(77)90033-5.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022249677900335`

[10] G. Crawford, C. Williams, A note on the analysis of subjective judgment matrices, Journal of Mathematical Psychology 29 (4) (1985) 387 – 405. doi:https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022249685900021`

[11] J. Aguaron, J. M. Moreno-Jimenez, The geometric consistency index: Approximated thresholds, European Journal of Operational Research 147 (1) (2003) 137 – 145. doi:https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00255-2.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702002552`

[12] W. Koczkodaj, A new definition of consistency of pairwise comparisons, Mathematical and Computer Modelling 18 (7) (1993) 79 – 84. doi:https://doi.org/10.1016/0895-7177(93)90059-8.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0895717793900598`

[13] Z. Duszak, W. W. Koczkodaj, Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons, Information Processing Letters 52 (5) (1994) 273 – 276. doi:https://doi.org/10.1016/0020-0190(94)00155-3.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019094001553

[14] P. Kazibudzki, Redefinition of triad's inconsistency and its impact on the consistency measurement of pairwise comparison matrix 2016 (2016) 71–78.

[15] P. T. Kazibudzki, The quality of priority ratios estimation in relation to a selected prioritization procedure and consistency measure for a pairwise comparison matrix, CoRR abs/1704.01944. arXiv:1704.01944.
URL http://arxiv.org/abs/1704.01944

[16] J. PelĂĄez, M. Lamata, A new measure of consistency for positive reciprocal matrices, Computers & Mathematics with Applications 46 (12) (2003) 1839 – 1845. doi:https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)90240-9.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122103902409

[17] K. Kulakowski, J. Szybowski, The new triad based inconsistency indices for pairwise comparisons, Procedia Computer Science 35 (2014) 1132 – 1137, knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems 18th Annual Conference, KES-2014 Gdynia, Poland, September 2014 Proceedings. doi:https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.08.205.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050914011703

[18] W. E. Stein, P. J. Mizzi, The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research 177 (1) (2007) 488 – 497. doi:https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.057.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705009288

[19] M. Brunelli, Introduction to the Analytic Hierarchy Process, 2015.

[20] B. L. Golden, Q. Wang, An Alternate Measure of Consistency, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1989, pp. 68–81.

[21] A. A. Salo, R. P. Hamalainen, Preference programming through approximate ratio comparisons, European Journal of Operational Research 82 (3) (1995) 458 – 475. doi:https://doi.org/10.1016/0377-2217(93)E0224-L.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221793E0224L

[22] B. Cavallo, L. D'Apuzzo, A general unified framework for pairwise comparison matrices in multicriterial methods, International Journal of Intelligent Systems 24 (4) (2009) 377–398. doi:10.1002/int.20329.
URL http://dx.doi.org/10.1002/int.20329

[23] B. Cavallo, L. D'Apuzzo, Characterizations of consistent pairwise comparison matrices over abelian linearly ordered groups, Int. J. Intell. Syst. 25 (10) (2010) 1035–1059. doi:10.1002/int.20438.
URL https://doi.org/10.1002/int.20438

[24] B. Jonathan, Consistency measures for pairwise comparison matrices, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 7 (3) 123–132. doi:10.1002/(SICI)1099-1360(199805)7:3<123::AID-MCDA181>3.0.CO;2-8.

[25] P. Harker, Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process, Mathematical Modelling 9 (3) (1987) 353 – 360. doi:https://doi.org/10.1016/0270-0255(87)90492-1.
URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0270025587904921`