

bibliografia.bib



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**  
**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,**  
**INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ

Praca dyplomowa magisterska

*Niespójności niekompletnych macierzy porównań parami*  
*Inconsistency of incomplete pairwise comparisons matrices*

Autor:

Kierunek studiów:

Opiekun pracy:

*Dawid Talaga*

*Informatyka*

*dr hab. Konrad Kułakowski*

Kraków, 2018

*Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór; artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.*

*Serdecznie dziękuję Promotorowi Panu dr. hab.  
Konradowi Kułakowskiemu za zainteresowanie  
mnie tematem PC oraz życzliwe wsparcie.  
Dziękuję moim Rodzicom, dzięki którym mogłem  
rozwijać się i studiować oraz bliskim mi osobom,  
które dodawały mi wiary w moje siły.*



## **Contents**



# 1. Introduction

## 1.1. Pairwise Comparisons method

People have made decisions for ages. Some of them are very simple and come easily but others, more complicated, require deeper analysis. It happens when there are many compared objects, which are complex and the selection criterion is hard to measure clearly. Fortunately, the development of mathematics brought an interesting tool - *The Pairwise Comparisons (PC) Method*. The first case of using the method (in a very simple version) is the election system described by *Ramond Llull* (Colomer, 2013) in the thirteenth century. Its rules were based on the fact that the candidates were pairwise compared with each other and the winner was the one who won in the largest number of direct comparisons. The method was reinvented in the eighteenth century by *Condorcet* and *Borda* (Kuřakowski, 2016) as they proposed it in their voting system. In the twentieth century, the method found the application in the theory of social choice, the main representatives of which were the Nobel prize winners *Keneth Arrow* (Arrow, 1950) and *Amartya Sen* (Sen, 1977). The current shape of the method was influenced by the changes introduced by *Fechner* [Fechner 1966] and then refined by *Thurstone* (Thurstone, 1994). However, the breakthrough was the introduction to the method *The Analytic Hierarchy Process (AHP)* by *Saaty* (Saaty, 2008), which allowed to compare many more complex objects and create a hierarchical structure. The main aim of this paper is to check which method of calculating the inconsistency is the best in this case. In order to do it, a series of tests was carried out on various known inconsistency indexes, taking into account many different parameters: the matrix size, the amount of missing data, a level of inconsistency. The results of the research are included below.

The PC method is based on the assumption that it is not worth comparing all objects at the same time. It is better to compare them in pairs and then gather the results together. Such pairwise comparisons are much more intuitive and natural for a human being. How can one be sure that these judgments are consistent? Or what to do if some comparisons are missing? In such a case, is it worth taking the *PC method* at all?

The answer to the first question is the concept of inconsistency introduced into the method. This paper tries to answer the next two questions - meaning to examine whether available methods for determining inconsistencies give reliable results when a part of the comparisons are missing.



## **1.2. The aim of the work**

The main aim of this paper is to check which method of calculating the inconsistency is the best when some comparisons are missing. In order to do it, a series of tests was carried out on various known inconsistency indexes, taking into account many different parameters: the matrix size, the amount of missing data, a level of inconsistency. Testy zostały zaimplementowane w języku R, który dobrze nadaje się do obliczeń numerycznych.

Od początku pisania pracy nie było wiadome, jaki będzie rezultat prac. Rozważano, że któryś z istniejących współczynników niespójności okaże się odpowiedni również dla macierzy niepełnych lub testy wykażą, że nie istnieje taka metoda obliczania niespójności. The results of the research are included below.

## **1.3. Contents of the work**

Praca składa się z części teoretycznej oraz opisu przeprowadzonych badań i ich wyników. Łącznie daje to 6 rozdziałów.

W drugim rozdziale została zaprezentowana metoda porównywania parami oraz problem niespójności danych. Zrozumienie podstaw jest konieczne, aby przejść do kolejnych kroków.

W trzecim rozdziale zaprezentowano kilkanaście dostępnych metod liczenia współczynnika niespójności dla macierzy porównań parowych.

W kolejnym rozdziale przedstawiono pomysły, dzięki którym możliwe jest przeprowadzenie testów. Są to modyfikacje istniejących współczynników niespójności, które pozwalają dostosować je do macierzy niepełnych oraz algorytm wyznaczający jakość zmodyfikowanych współczynników.

W piątym rozdziale zaprezentowano wyniki badań oraz omówiono otrzymane rezultaty.

Ostatni rozdział to podsumowanie wykonanej pracy, wyciągnięte wnioski i pomysły na dalsze pogłębienie tematu.

## 2. Pairwise Comparisons method

### 2.1. PC matrix

The *PC method* is used to choose the best alternative from a set of concepts. However, this goal is achieved by comparing in pairs. A numerical value is assigned to each pair. It not only determines which alternative is preferred but also informs about the intensity of this preference. In this way, the finite set of concepts  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  is transformed into a *PC matrix*  $M = (m_{ij})$ , where  $m_{i,j} \in R$  and  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . The *PC matrix* for  $n$  concepts is following:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & 1 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

It is worth noting that the values  $m_{ij}$  and  $m_{ji}$  represent the same pair. Therefore, one should expect that  $m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}$ . If

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}, \quad (2.1)$$

the matrix is called a *reciprocal*.

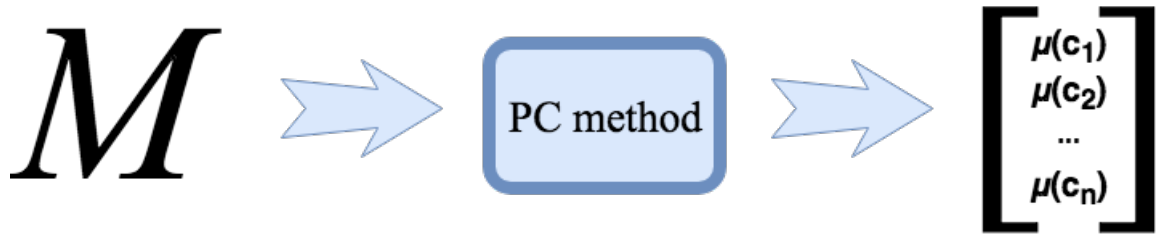
### 2.2. Weight vector

The PC matrix is the basis for calculating the method. It is used in a function  $\mu : C \rightarrow R$  that assigns a positive real number to each alternative in the set  $C$ . The vector

$$\mu = [\mu(c_1), \dots, \mu(c_n)]$$

formed in this way is called *the weight vector* or *the priority vector* (see Rys. 2.1). It informs which alternative has won.

There are many ways to calculate the vector  $\mu$ , among the popular ones are the method using the matrix's eigenvalues or the method based on geometric means (Saaty et al., 1998).



**Fig. 2.1.** Diagram of calculating *the weight vector*

### 2.3. Inconsistency

The second important parameter describing the *PC matrix* is *consistency*. The matrix is consistent if

$$\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} : m_{ik} = m_{ij}m_{jk}. \quad (2.2)$$

Three numbers that should meet this assumption are called a *triad*.

If the matrix is consistent and the weight vector  $\mu$  is computed, then for each variables  $i, j$ , where  $1 \leq i, j \leq n$  meets the equation:

$$ij = \frac{\mu_i}{\mu_j}. \quad (2.3)$$

In practice, it is very rare for a matrix  $M$  to be completely consistent. In the long history of the PC method, many methods have been developed to calculate inconsistencies. Many of them are based directly on the definition of consistency ([eq:consistent]), some methods use the eigenvalues of the matrix, others are based on the assumption that each fully consistent matrix fulfills the condition ([eq:consistent2]).

## 3. Inconsistency indexes

### 3.1. Inconsistency indexes for complete matrixes

This subsection presents sixteen common inconsistency indexes. Their detailed description, including the formulas, is necessary to modify them in the next step so that they can also work for incomplete matrices. Many of them have been described and tested numerically in (Brunelli et al., 2013). In all methods, it is assumed that the *PC matrix* is reciprocal.

#### 3.1.1. Saaty index

This is one of the most important and popular indexes and was introduced by *Saaty* (Saaty, 1977). In order to determine inconsistency, the matrix's eigenvalue should be computed. The author used the dependence that the largest eigenvalue of the matrix is equal to its dimension if and only if the given matrix is completely consistent. On this assumption, he based his thoughts and proposed the formula:

$$CI(A) = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \quad (3.1)$$

where  $\lambda_{max}$  is the principal eigenvalue of the PC matrix and  $n$  is its dimension.

#### 3.1.2. Geometric consistency index

This index on the assumption ([eq:consistent2]) was proposed by *Crawford* and *Williams* (Crawford et al., 1985) and then refined by *Aguaròn* and *Moreno-Jiménez* (Aguaron et al., 2003). In this case the priority vector should be calculated using the geometric mean method. Consider ([eq:consistent2]) one can create a matrix:

$$E = \left[ e_{ij} \mid e_{ij} = a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right], \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

The inconsistency index is calculated as follows:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \ln^2 e_{ij}. \quad (3.3)$$

### 3.1.3. Koczkodaj index

One of the most popular inconsistency indexes was proposed by *Koczkodaj* (Koczkodaj, 1993). It is based directly on the definition of consistency ([eq:consistent]). The value of the inconsistency index for one triad ([triad]) was defined as:

$$K_{i,j,k} = \min\left\{\frac{1}{a_{ij}} \left| a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \right|, \frac{1}{a_{ij}} \left| a_{ik} - a_{ij}a_{jk} \right|, \frac{1}{a_{jk}} \left| a_{jk} - \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \right| \right\}. \quad (3.4)$$

This formula has been simplified by Duszak and Koczkodaj (Duszak et al., 1994) and is given as:

$$K(\alpha, \beta, \gamma) = \min\left\{\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha\gamma} \right|, \left| 1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta} \right| \right\}, \quad \text{where } \alpha = a_{ij}, \beta = a_{ik}, \gamma = a_{jk} \quad (3.5)$$

Then it was generalized (Duszak et al., 1994) for  $n > 2$ . Finally, the inconsistency index has the following form:

$$K = \max\{K(\alpha, \beta, \gamma) | 1 \leq i < j < k \leq n\}. \quad (3.6)$$

It is worth noting that not only does the coefficient find the greatest inconsistency but also indicates the place in which it occurs.

### 3.1.4. Kazibudzki indexes

Based on the Koczkodaj inconsistency index and observation that  $\ln(\frac{\alpha\gamma}{\beta}) = -\ln(\frac{\beta}{\alpha\gamma})$ , *Kazibudzki* proposed several additional inconsistency indexes (Kazibudzki, 2016). Instead of the formula for inconsistency of the triad [eq:k-abg], he introduced two new formulas:

$$LTI(\alpha, \beta\gamma) = \left| \ln\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right) \right|, \quad (3.7)$$

$$LTI * (\alpha, \beta\gamma) = \ln^2\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right). \quad (3.8)$$

Based on the above equations, *Kazibudzki* proposed new indexes. The simplest ones use the geometric mean of the triads. Thus, new indexes could be written in the form:

$$MLTI(LTI) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [LTI_i(\alpha, \beta\gamma)], \quad (3.9)$$

$$MLTI(LTI*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [LTI * _i (\alpha, \beta\gamma)]. \quad (3.10)$$

After further research *Kazibudzki* introduces another inconsistency index (Kazibudzki, 2017), again based on ([eq:liti\*]). It was defined as  $CM(LTI*) = \frac{MEAN[LTI*(\alpha, \beta, \gamma)]}{1 + MAX[LTI*(\alpha, \beta, \gamma)]}$ . Hence,

$$CM(LTI*) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [LTI * _i (\alpha, \beta, \gamma)]}{1 + \max\{LTI * _i (\alpha, \beta, \gamma)\}}. \quad (3.11)$$

### 3.1.5. Index of determinants

This index was proposed by *text*Pelaez and *Lamata* (Peláez et al., 2003) and is also based on the concept of triad. The authors noticed that *PCM matrices* can be construct on the basis of triads. Their determinant is closely related to the consistency of the matrix.

For every triad  $(a_{ik}, a_{ij}, a_{jk})$  one can build a matrix in the form:

$$T_{ijk} = \begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 & a_{jk} \\ \frac{1}{a_{ik}} & \frac{1}{a_{jk}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{where } i < j < k. \quad (3.12)$$

The determinant of this matrix is:

$$\det(A) = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2. \quad (3.13)$$

If the matrix is fully consistent, then  $\det(A) = 0$ , else  $\det(A) > 0$ . Based on the above considerations, the authors introduced the new inconsistency index that can be formulated as follows:

$$CI^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2 \right). \quad (3.14)$$

### 3.1.6. Kułakowski and Szybowski indexes

*Kułakowski* and *Szybowski* proposed two further inconsistency indexes (Kulakowski et al., 2014), which are also based on triads. They use the fact that the number of triads that can be found in a *PCM matrix* is

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (3.15)$$

The index is formulated as follows:

$$I_1 = \frac{6 \sum_{t \in T} K(t)}{n(n-1)(n-2)}, \quad (3.16)$$

where  $K(t)$  is the Koczkodaj index for triad  $t = (\alpha, \beta, \gamma)$  of the set of all triads  $T$ .

The second inconsistency index is similar:

$$I_2 = \frac{6 \sqrt{\sum_{t \in T} K^2(t)}}{n(n-1)(n-2)}. \quad (3.17)$$

Indexes can be combined with each other to create new coefficients. In this way *Kułakowski* and *Szybowski* proposed two new indexes. The first one is based on ([eq:K]) and ([eq:I1]). This index allows to choose what effect on the result should the greatest inconsistency found have and what the average

inconsistency of all triads. The new nconsistency index looks as follows:

$$I_{\alpha} = \alpha K + (1 - \alpha)I_1, \quad (3.18)$$

where  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

The second index expands the first one by ([eq:I2]):

$$I_{\alpha,\beta} = \alpha K + \beta I_1 + (1 - \alpha - \beta)I_2. \quad (3.19)$$

### 3.1.7. Harmonic consistency index

Index introduced by *Stein* and *Mizzi* and it presents a completely new method of inconsistency counting (Stein et al., 2007). At the beginning it requires the creation of an auxiliary vector  $s = (s_1, \dots, s_n)^T$ , where  $n$  is the dimension of the matrix  $A$ , for which the index will be calculated. Each element of the vector  $s$  is the sum of values in one column of the matrix  $A$ . Hence,

$$s_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \quad \forall j. \quad (3.20)$$

The authors proved that if the matrix  $A$  is consistent, then  $\sum_{j=1}^n s_j^{-1} = 1$ . The formula for the mean harmonic looks as follows (Brunelli, 2015):

$$HM = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j}}. \quad (3.21)$$

The final formula for inconsistency index was obtained by normalizing the above equation ([eq:hm']):

$$HCI = \frac{(HM(s) - n)(n + 1)}{n(n - 1)}. \quad (3.22)$$

### 3.1.8. Golden and Wang index

This index was introduced by *Golden* and *Wang* (Golden et al., 1989). It assumes that the priority vector was calculated using the geometric mean method, then normalized to add up to 1. In this way  $\text{vector}g^* = [g_1^*, \dots, g_n^*]$  was obtained, where  $n$  is the dimension of the matrix  $A$ . The next step is to normalize each column of the matrix  $A$ . After this, the sum of the elements of each column in matrix  $A$  is 1. The obtained matrix is marked with the symbol  $A^*$ . The inconsistency index is defined as follows:

$$GW = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}^* - g_i^*|. \quad (3.23)$$

### 3.1.9. Salo and Hamalainen index

The index proposed by *Salo* and *Hamalainen* (Salo et al., 1995; Kazibudski, 2016) uses the definition of inconsistency ([eq:consistent]), however it requires the creation of an auxiliary matrix, in which each element is the smallest and largest discrepancy from consistency based on formula ([eq:consistent]). The index takes all triads into account:

$$R = (r_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} [\underline{r}_{11}, \bar{r}_{11}] & \cdots & [\underline{r}_{1n}, \bar{r}_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{r}_{n1}, \bar{r}_{n1}] & \cdots & [\underline{r}_{nn}, \bar{r}_{nn}] \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

where  $\underline{r}_{ij} = \min \{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \dots, n\}$ ,  $\bar{r}_{ij} = \max \{a_{ik}a_{kj} \mid k = 1, \dots, n\}$  and  $n$  is the dimension of the tested matrix  $A$ . A numerical example was presented in (Brunelli, 2015). Based on the resulting matrix  $R$ , the authors proposed the following inconsistency index:

$$CM = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\bar{r}_{ij} - \underline{r}_{ij}}{(1 + \bar{r}_{ij})(1 + \underline{r}_{ij})}. \quad (3.25)$$

### 3.1.10. Cavallo and D'Apuzzo index

The authors *Cavallo* and *D'Apuzzo* based their index on triads but they conducted studies on a new path, generalizing them for linear, ordered abelian groups (Cavallo et al., 2009; Cavallo et al., 2010). Thanks to this, the index can be used also with other relations (Brunelli et al., 2013). Index for relation  $max$  can be presented in the form of a formula:

$$I_{CD} = \prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=i+1}^{n-2} \prod_{k=j+1}^n \left( \max \left\{ \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}, \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} \right\} \right)^{\frac{1}{\binom{n}{3}}}. \quad (3.26)$$

### 3.1.11. Relative error

This index, proposed by *Barzaili* (Jonathan, ??), requires calculation of the weight vector using the arithmetic mean method for each row and creation of two additional matrices. Thus, the weight vector is

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

where  $n$  is the dimension of the matrix. The two auxiliary matrices are calculated according to the formulas:

$$C = (c_{ij}) = (w_i - w_j)$$

$$E = (e_{ij}) = (a_{ij} - c_{ij})$$



Ultimately, the formula for the *Relative error* is following:

$$RE(A) = \frac{\sum_{ij} e_{ij}^2}{\sum_{ij} a_{ij}^2}. \quad (3.27)$$

### 3.2. Inconsistency indexes for incomplete matrixes

There are no inconsistency indexes for incomplete matrices. However, Those presented in chapter (3) could be use in such cases. It requires usually a slight modification of the index definition or calculation only for selected data. Below the ways in which the examined indexes have been adjusted to be able to deal with incomplete matrices are presented.

#### Saaty index

The input matrix is modified using the method proposed by *Harker* (Harker, 1987). It means that values  $c+1$ , where  $c$  is the number of non-empty elements in a given row, are places on the diagonal.

#### Geometric consistency index

During calculating the weight vector by the geometric mean, empty values are omitted. Additionally, in the formula ([eq:GCI]) only non-empty elements  $e_{ij}$  are used. The reason for this exclusion is that the domain of the logarithmic function is  $R^+$ .

#### Koczkodaj index, Kazibudzki indexes, Index of determinants:

Only those triads which do not contain empty values are taken into account.

#### Kulakowski and Szybowski indexes

Only those triads which do not contain empty values are taken into account. In addition, the number of triads is no longer calculated according to the formula ([eq:KulSzynPo3]) but determined directly by counting the number of triads.

#### Harmonic consistency index:

No modification.

#### Golden and Wang index:

During calculating the weight vector by the geometric mean empty values are omitted.

#### Salo and Hamalainen:

No modification.

#### Cavallo and D'Appuzo:

During calculating the product ([eq:CavDAp]) empty values are omitted.

**Relative index:**

No modification.

Zaproponowane sposoby modyfikacji współczynników pozwalają na użycie ich do macierzy niepełnych. Nie gwarantują jednak najlepszych rezultatów, do tego potrzebne są kolejne testy. Istniejące współczynniki można modyfikować na wiele różnych sposobów. W tej pracy skupiono się na tym, żeby modyfikacje nie były zbyt duże. Celem jest sprawdzenie istniejących współczynników, a nie utworzenie nowego współczynnika.



## 4. Studies of inconsistency indexes for incomplete matrices

The presented inconsistency indexes have been tested utilizing the Monte Carlo method. Their aim was to select those indexes which will give reliable results for incomplete matrices. Therefore, it was decided that the measure of the indexes' quality would be a *relative error* (expressed as a percentage), which took into account the value of the index for a full, inconsistent matrix and the value of the index for the same matrix after partial decomposition. To be sure that the results were fair, all indexes were tested on the same set of matrices. The different sizes of the matrices, the levels of incompleteness and the levels of inconsistency were taken into account. Then, in order to compare the indexes easily and to select the best ones, the results were averaged using the arithmetic mean. While building the algorithm to solve the problem (Kazibudzki, 2017) was used.

### 4.1. Algorithm

#### 4.1.1. Steps of the algorithm

**The algorithm of test of inconsistency indexes:**

1. Randomly generate a vector  $w = [w_1, \dots, w_n]$  and a consistent *PCM matrix* associated with it  $PCM = (m_{ij})$ , where  $m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ .
2. Disrupt the matrix by multiplying its elements (excluding the diagonal) by the value of  $d$ , randomly selected from the range  $(\frac{1}{x}, x)$ .
3. Replace values  $m_{ij}$ , where  $i < j$  by values  $m_{ji}$ .
4. Calculate values of index with all methods for the created matrix.
5. Remove some values from the matrix by removing some of values. The level of incompleteness should be  $g\%$ .
6. Calculate the values of inconsistencies by all methods for the decomposed matrix.
7. Calculate the relative error for each index.
8. Repeat steps 1 to 10  $X_1$  times.
9. Calculate the average relative error for each inconsistency index for the *PCM matrix*.

10. Repeat steps 1 to 10  $X_2$  times.

11. Calculate the average relative error for each index by averaging the values obtained in step 9.

#### 4.1.2. Details of algorithm

The above algorithm was carried out for values  $X_1 = 100$ ,  $X_2 = 100$ . Tests were started for values  $d$  in the range  $(1.1, 1.2, \dots, 4)$  and then the results were averaged. It means that the average relative error of one index was calculated on the basis of 4000 matrices, each of which decomposed randomly 100 times. It gave together 400000 tests how good the index was.

In addition, tests were carried out for various sizes of matrices.

**The results are divided into two parts:**

1. A constant degree of incompleteness, different size of the matrix.
2. Different degrees of incompleteness, constant size of the matrix.

The aim of such a division is to pay attention to how the inconsistency indexes behave when the size of the matrix and the degree of incompleteness are changing. The results of the research are presented below.

## 4.2. Implementation

### 4.2.1. Development environment

Testy współczynników zostały napisane w języku R, który idealnie nadaje się do obliczeń numerycznych. Posiada on szereg funkcji, które wspierają działania na macierzach i wektorach. W czasie implementacji wykorzystano integrated development environment (IDE) o nazwie RStudio. Narzędzie to pozwala na tworzenie własnych pakietów, które zawierają nie tylko właściwy, ale również dokumentację, czy informacje o licencji i autorze. Utworzono pakiet o nazwie *indexesForIncomplete*. Najważniejszą częścią pakietu jest plik *indexes.R*, który wykonuje obliczenia konieczne do zbadania współczynników. RStudio wspomaga pracę programisty poprzez kolorowanie składni, wbudowaną konsolę, łatwe przeszukiwanie funkcji i dokumentacji oraz wiele innych. Program dostępny jest na wszystkie popularne systemy operacyjne. Aby korzystać z RStudio należy wcześniej zainstalować język R.

### 4.2.2. Implementation of tests inconsistency indexes

Implementacja testów współczynników niespójności to składała się z dwóch kroków:

1. Implementacja funkcji, które obliczają współczynniki niespójności dla zadanej macierzy (pełnej lub niepełnej).
2. Implementacja testów, które zbadają współczynniki dla różnych macierzy i zbiorą wyniki tych testów.

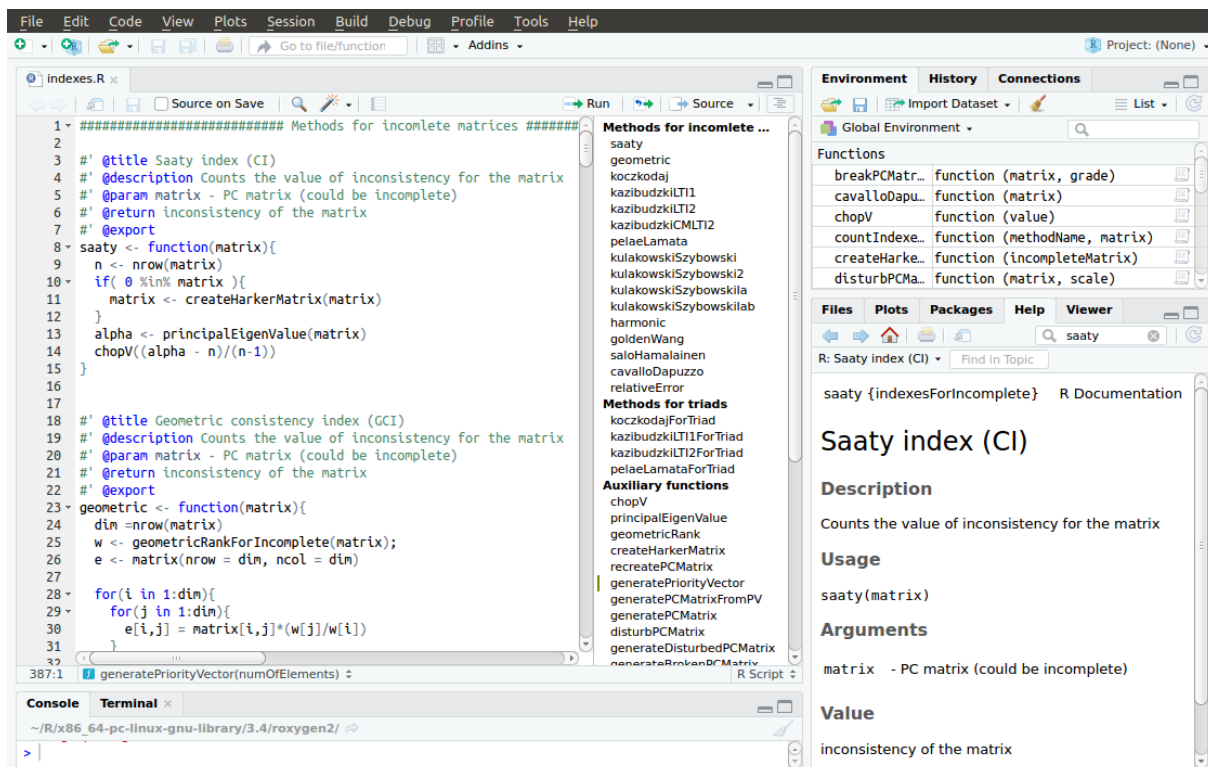


Fig. 4.1. Program RStudio

## Implementacja współczynników niespójności

Utworzono 16 funkcji, które obliczają współczynnik niespójności metodami, które zostały opisane powyżej. Funkcje zostały napisane w taki sposób, że potrafią poradzić sobie zarówno z macierzami pełnymi, jak również niepełnymi. Nie uwzględniono błędnych macierzy, a więc takich, które nie spełniają założeń symetrycznej, spójnej PC macierzy. Każda funkcja posiada tylko jeden argument, którym jest PC macierz. Wyjątkiem są dwie funkcje implementujące współczynniki Koczkodaja i Szybowskiego, które dodatkowo przyjmują parametry  $\alpha, \beta$ . Wynikiem działania funkcji jest wartość współczynnika niespójności. Każda funkcja została uzupełniona o komentarze, które informują m.in. o nazwie współczynnika, któremu funkcja odpowiada, parametrach i zwracanej wartości. Pozwala to z łatwością czytać kod i wprowadzać do niego poprawki. Kilka przykładów funkcji zostało zaprezentowanych poniżej.

Warto zwrócić uwagę na funkcję, która zostaje wywołana wewnątrz funkcji przeznaczonych dla współczynników opartych na triadach. Generuje triady z macierzy, a następnie oblicza niespójność dla każdej z nich. Sposób obliczenia niespójności dla triady jest jednak zależny od pierwszego argumentu funkcji, gdzie podawana jest nazwa funkcji, potrafiącej obliczyć niespójność triady konkretną metodą.

## Implementacja testów

W drugim kroku utworzono funkcje, które pozwalają obliczyć jakość współczynników dla macierzy niepełnych. W tym procesie ważną rolę odgrywają funkcje generujące określone macierze. PC macierze generowane są w zależności od wymiaru, wielkości niespójności i stopnia niekompletności.

```

#' @title Saaty index (CI)
#' @description Counts the value of inconsistency for the matrix
#' @param matrix - PC matrix (could be incomplete)
#' @return inconsistency of the matrix
#' @export
saaty <- function(matrix){
  n <- nrow(matrix)
  if( 0 %in% matrix ){
    matrix <- createHarkerMatrix(matrix)
  }
  alpha <- principalEigenValue(matrix)
  chopV((alpha - n)/(n-1))
}

```

**Fig. 4.2.** Implementacja współczynnika *Saaty'ego*

```

#' @title Koczkodaj matrix inconsistency
#' @description Counts the value of inconsistency for the matrix
#' @param matrix - PC matrix (could be incomplete)
#' @return inconsistency of the matrix
#' @export
koczkodaj <- function(matrix){
  triadsAndIdxs <- countIndexesForTriads("koczkodajForTriad", matrix)
  chopV(max(triadsAndIdxs))
}

```

**Fig. 4.3.** Implementacja współczynnika *Koczkodaja*

Ostatnia część funkcji dotyczy testowania jak duży błąd względny występuje dla współczynników niespójności po ich zdekompilowaniu. Najpierw utworzono funkcję, która testuje jeden współczynnik. Bierze pod uwagę rozmiar, wielkość niespójności, poziom niekompletności i ilość prób, które są przeprowadzane dla danej macierzy.

Następnie zostały utworzone funkcje, które przeprowadzają testy dla wszystkich współczynników, opierając się na tych samych macierzach. Dzięki temu zbiór macierzy, na których operują współczynniki są jest wspólny, zatem rezultaty są wiarygodne, a każdy współczynnik jest traktowany w ten sam sposób.

### 4.2.3. Documentation

Komentarze kodu zostały wykorzystane do wygenerowania dokumentacji. W tym celu użyto pakietu *roxygen2*. Pozwoliło to na łatwe przeglądanie funkcji przyjemne zapoznanie się z nimi. Przykładowe fragmenty dokumentacji przedstawione zostały poniżej.

```

#' @title Kulakowski and Szybowski consistency index (Ia)
#' @description Counts the value of inconsistency for the matrix
#' @param matrix - PC matrix (could be incomplete)
#' @return inconsistency of the matrix
#' @export
kulakowskiSzybowskiIa <- function(matrix, alfa, beta=0){
  triadsAndIdxs <- countIndexesForTriads("koczkodajForTriad", matrix)
  chopV(alfa*max(triadsAndIdxs) + (1-alfa)*mean(triadsAndIdxs))
}

```

Fig. 4.4. Implementacja współczynnika *Kulakowskiego i Szybowskiego*

```

#' @title Salo and Hamalainen consistency index (SH)
#' @description Counts the value of inconsistency for the matrix
#' @param matrix - PC matrix (could be incomplete)
#' @return inconsistency of the matrix
#' @export
salohamalainen <- function(matrix){
  n <- nrow(matrix)
  sum <- 0

  rMin <- matrix(nrow = n, ncol = n, data = 0)
  rMax <- matrix(nrow = n, ncol = n, data = 0)

  for(i in 1:n){
    for(j in 1:n){
      c <- rep(0,n)
      for(k in 1:n){
        c[k] = matrix[i,k]*matrix[k,j]
      }
      rMin[i,j] = min(c)
      rMax[i,j] = max(c)
    }
  }

  for(i in 1:(n-1)){
    for(j in (i+1):n){
      sum <- sum + (rMax[i,j]-rMin[i,j])/((1+rMax[i,j])*(1+rMin[i,j]))
    }
  }

  cm <- 2/(n*(n-1))*sum
  chopV(cm)
}

```

Fig. 4.5. Implementacja współczynnika *Salo i Hamalainen*



```

#' @title Generates inconsistency indexes for each triad from the matrix
#' @param methodName - name of the method which computes inconsistency index for triad
#' @param matrix - PC matrix
#' @return vector of inconsistency indexes for triads
countIndexesForTriads <- function(methodName, matrix){
  triads <- generateTriads(matrix)
  if(is.null(dim(triads)) && length(triads) == 3){
    triads <- matrix(triads, 3, 1)
  }
  triadIdxs <- apply(triads, 2, methodName)
  triadIdxs
}

```

**Fig. 4.6.** Implementacja metody *countIndexesForTriads*, która oblicza wartość niespójności dla każdej triady zadanej macierzy

```

#' @title Generates PC Matrix on the basis of the size
#' @param numElements - number of elements of the matrix
#' @return reciprocal PC matrix
generatePCMatrix<- function(numElements){
  priorityVector <- generatePriorityVector(numElements)
  generatePCMatrixFromPV(priorityVector)
}

```

**Fig. 4.7.** Implementacja funkcji *generatePCMatrix*, która generuje PC macierz w zależności od rozmiaru

```

#' @title Disturbs the PC matrix
#' @description Disturbs the PC matrix in order to obtain inconsistency
#' @param matrix - PC matrix
#' @param scale - extend of disorders. This parametr is the upper limit
#' of the interval that is used to scale the elements. The lower limit
#' is defined as 1 / scale
#' @return disturbed PC matrix
disturbPCMatrix<- function(matrix, scale){
  dim = nrow(matrix)

  for(r in 1:dim-1)
    for(c in (r+1):dim)
      matrix[r,c] <- runif(1, min = 1/scale, max = scale) * matrix[r,c]

  diag(matrix) <- 1
  recreatePCMatrix(matrix)
}

```

**Fig. 4.8.** Implementacja funkcji *disturbPCMatrix*, która zaburza macierz powodując niespójność w zależności od zadanej skali

```

#' @title Breaks PC Matrix
#' @description Breaks PC Matrix to obtain reciprocal, incomplete matrix
#' @param matrix - PC matrix
#' @param grade - percentage of the value to be removed (not applicable to the diagonal)
#' @return incomplete PC matrix
breakPCMatrix<- function(matrix, grade){

  dim <- nrow(matrix)
  numOfEmptyElements <- grade*0.01*(dim*(dim-1))

  while(numOfEmptyElements > 1){
    rowToClear <- sample(1:dim, 1)
    colToClear <- sample(c(1:dim)[-rowToClear], 1)

    if(matrix[rowToClear, colToClear] != 0) {
      matrix[rowToClear, colToClear] <- matrix[colToClear, rowToClear] <- 0
      numOfEmptyElements <- numOfEmptyElements - 2
    }
  }

  matrix
}

```

**Fig. 4.9.** Implementacja funkcji *breakPCMatrix*, która dekompletuje macierz powodując niekompletność w zależności od zadanej skali

```

#' @title Explore the incomplete PC matrix
#' @description Examines what is the relative error between the full matrix and indomplete matrix
#' @param methodName - a name of the method which is tested
#' @param scale - extend of disorders. This parametr is the upper limit of the interval that is used
#' to scale the elements. The lower limit is defined as 1 / scale
#' @param numOfElements - dimension of tested matrix
#' @param gradeOfIncomplete - percentage of the value to be removed (not applicable to the diagonal)
#' @param numOfAttempts - number of test cases
#' @param alfa - a parameter for kulakowskiSzybowskiIa and kulakowskiSzybowskiIab method
#' @param beta - a parameter for kulakowskiSzybowskiIab method
#' @return average value of the relative error between the full matrix and indomplete matrix
exploreMatrix <- function(methodName, scale, numOfElements, gradeOfIncomplete, numOfAttempts, alfa=0, beta=0) {

  matrix <- generateDisturbedPCMatrix(numOfElements, scale)
  n <- ncol(matrix)
  if(alfa==0 && beta==0){
    realIdx <- methodName(matrix)
  } else {
    realIdx <- methodName(matrix, alfa, beta)
  }

  vectorOfIdxs <- integer(numOfAttempts)

  for( i in 1:numOfAttempts ) {
    brokenMatrix <- matrix(nrow = n, ncol = n, data = 0)
    numOfTriads <- length(generateTriads(brokenMatrix))/3

    while( (0 %in% (matrix %^(n-1))) || numOfTriads==0){
      brokenMatrix <- breakPCMatrix(matrix, gradeOfIncomplete)
      numOfTriads <- length(generateTriads(brokenMatrix))/3
    }

    if(alfa==0 && beta==0){
      idx <- methodName(brokenMatrix)
    } else {
      idx <- methodName(brokenMatrix, alfa, beta)
    }

    vectorOfIdxs[i] <- abs(realIdx - idx)
  }

  incompleteIdx <- mean(vectorOfIdxs)

  abs(incompleteIdx/realIdx*100)
}

```

**Fig. 4.10.** Implementacja funkcji *exploreMatrix*, która testuje wybrany współczynnik niespójności

```

#' @title Explore the incomplete PC matrixes for every method and scale <1.1, 1.2, ... , 4.0>
#' @description Examines what is the relative error between the full matrixes and indomplete matrixes.
#' @param numElements - dimension of tested matrix
#' @param gradeOfIncomplete - percentage of the value to be removed (not applicable to the diagonal)
#' @param numAttempts - number of tested matrixes
#' @param numAttemptsForOneMatrix - number of test cases for each matrix
#' @param alfa - a parameter for kulakowskiSzybowskiIa method
#' @param beta - a parameter for kulakowskiSzybowskiIab method
#' @return average value of the relative error between the full matrix and indomplete matrix
test <- function(numElements, gradeOfIncomplete, numAttempts, numAttemptsForOneMatrix, alfa=0, beta=0){

  results <- matrix(nrow=31, ncol=16, data=0)
  counter <- 1

  for(i in seq(1.1, 4, 0.1)){
    print(counter)
    results[counter,] <- monteCarloOnTheSameMatrix(numElements, i, gradeOfIncomplete, numAttempts,
                                                    numAttemptsForOneMatrix, alfa, beta)
    counter <- counter+1
  }

  for(i in 1:16){
    results[31, i] = sum(results[,i])/30
  }

  results
}

```

**Fig. 4.11.** Implementacja funkcji *test*, która testuje wszystkie współczynniki, uwzględniając zadany rozmiar macierzy i stopień niekompletności

---

## Studies inconsistency indexes for incomplete matrixes



### Documentation for package 'indexesForIncomplete' version 0.1.0

- [DESCRIPTION file.](#)

### Help Pages

<a href="#">breakPCMatrix</a>	Breaks PC Matrix
<a href="#">cavalloDapuzzo</a>	Cavallo D'Apuzzo consistency index (CD)
<a href="#">chopV</a>	Checks if the number is much greater than 0
<a href="#">countIndexesForTriads</a>	Generates inconsistency indexes for each triad from the matrix
<a href="#">createHarkerMatrix</a>	Create Harker matrix
<a href="#">disturbPCMatrix</a>	Disturbs the PC matrix
<a href="#">exploreMatrix</a>	Explore the incomplete PC matrix
<a href="#">exploreMatrixOnTheSameMatrix</a>	Explore the incomplete PC matrixes
<a href="#">generateBrokenPCMatrix</a>	Generate broken PC Matrix
<a href="#">generateDisturbedPCMatrix</a>	Generates disturbed PC Matrix
<a href="#">generatePCMatrix</a>	Generates PC Matrix on the basis of the size
<a href="#">generatePCMatrixFromPV</a>	Generates PC Matrix on the basis of the priority vector
<a href="#">generatePriorityVector</a>	Generates random priority vector
<a href="#">generateTriads</a>	Generates triades from the matrix
<a href="#">geometric</a>	Geometric consistency index (GCI)
<a href="#">geometricRank</a>	Rank list given as geometric means
<a href="#">geometricRankForIncomplete</a>	Rank list for the incomplete matrix given as geometric means
<a href="#">goldenWang</a>	Golden and Wand consistency index (GW)
<a href="#">harmonic</a>	Harmonic consistency index (HCI)
<a href="#">kazibudzkiCMLT12</a>	Kazibudzki matrix inconsistency (CMLT12)
<a href="#">kazibudzkiLT11</a>	Kazibudzki matrix inconsistency (LT11)
<a href="#">kazibudzkiLT11ForTriad</a>	kazibudzki (LT11) innconsistency for one triad
<a href="#">kazibudzkiLT12</a>	Kazibudzki matrix inconsistency (LT12)
<a href="#">kazibudzkiLT12ForTriad</a>	kazibudzki (LT12) innconsistency for one triad
<a href="#">koczkodaj</a>	Koczkodaj matrix inconsistency
<a href="#">koczkodajForTriad</a>	Koczkodaj innconsistency for one triad
<a href="#">kazibudzkiLT11ForTriad</a>	Kazibudzki matrix inconsistency (LT11) for one triad
<a href="#">kazibudzkiLT12ForTriad</a>	Kazibudzki matrix inconsistency (LT12) for one triad

Fig. 4.12. Fragment dokumentacji: widok ogólny

## Saaty index (CI)

### Description

Counts the value of inconsistency for the matrix

### Usage

```
saaty(matrix)
```

### Arguments

**matrix** - PC matrix (could be incomplete)

### Value

inconsistency of the matrix

---

[Package *indexesForIncomplete* version 0.1.0 [Index](#)]

**Fig. 4.13.** Fragment dokumentacji: funkcja *saaty*

## Explore the incomplete PC matrix

### Description

Examines what is the relative error between the full matrix and indomplete matrix

### Usage

```
exploreMatrix(methodName, scale, numOfElements, gradeOfIncomplete,
  numOfAttempts, alfa = 0, beta = 0)
```

### Arguments

<b>methodName</b>	- a name of the method which is tested
<b>scale</b>	- extend of disorders. This parametr is the upper limit of the interval that is used to scale the elements. The lower limit is defined as $1 / \text{scale}$
<b>numOfElements</b>	- dimension of tested matrix
<b>gradeOfIncomplete</b>	- percentage of the value to be removed (not applicable to the diagonal)
<b>numOfAttempts</b>	- number of test cases
<b>alfa</b>	- a parameter for kulakowskiSzybowski method
<b>beta</b>	- a parameter for kulakowskiSzybowskiLab method

### Value

average value of the relative error between the full matrix and indomplete matrix

---

[Package *indexesForIncomplete* version 0.1.0 [Index](#)]

**Fig. 4.14.** Fragment dokumentacji: funkcja *exploreMatrix*



## 5. Results and discussion

### 5.1. Results

The results of the tests are presented below.

#### 5.1.1. Testy uwzględniające różne rozmiary macierzy

**Table 5.1.** Relative error of inconsistency indexes for incomplete matrices with constant degrees of incompleteness  $g = 15\%$  and variable matrix size.

Index	n = 4	n = 7	n = 8	n = 10	n = 15	mean	rank
saaty	33,41	19,82	18,78	19,16	17,37	21,71	10
geometric	616,68	124,73	77,94	68,62	39,13	185,42	13
koczkodaj	<b>13,86</b>	<b>3,69</b>	<b>2,14</b>	<b>1,62</b>	<b>0,80</b>	<b>4,42</b>	<b>1</b>
kazibudzkiLTI1	24,80	10,21	6,62	4,97	2,73	9,87	6
kazibudzkiLTI2	42,31	17,93	11,88	9,03	5,03	17,24	8
kazibudzkiCMLTI2	35,40	17,07	13,26	11,20	6,81	16,75	7
pelaLamata	44,65	19,90	13,46	10,36	5,84	18,84	9
kulakSzyb	20,34	7,68	4,88	3,63	1,96	7,70	5
kulakSzyb2	44,61	26,05	27,12	29,64	28,46	31,18	11
kulakSzybIa	16,47	5,18	3,09	2,27	1,16	5,63	3
kulakSzybIab	17,40	4,89	2,81	2,04	1,01	5,63	2
harmonic	9 573,02	1 577,49	1 127,33	1 066,35	866,00	2 842,04	15
goldenWang	115,92	54,37	43,90	43,16	36,26	58,72	12
saloHamalainen	381,57	205,06	176,11	160,06	136,55	211,87	14
cavalloDapuzzo	16,94	6,85	4,46	3,36	1,87	6,70	4
relativeError	1 792,64	226 313,60	746,21	100,87	20,42	45 794,75	16

#### 5.1.2. Testy uwzględniające różne poziomy niekompletności

#### 5.1.3. Testy uwzględniające różne rozmiary niespójności

Spośród przebadanych współczynników poniżej zaprezentowano te, które dały najlepsze rezultaty. Kompletne wyniki testów zostały zamieszczone w Appendix.



**Table 5.2.** Relative error of inconsistency indexes for incomplete matrices with varying degrees of incompleteness and constant matrix size  $n = 8$ .

Index	$g = 4\%$	$g = 7\%$	$g = 14\%$	$g = 25\%$	$g = 50\%$	mean	rank
saaty	4,71	9,40	18,78	32,89	65,56	26,27	10
geometric	23,60	48,44	86,61	135,68	207,99	100,46	13
koczkodaj	<b>0,48</b>	<b>0,99</b>	<b>2,17</b>	<b>4,52</b>	16,41	4,92	2
kazibudzkiLTI1	2,90	4,31	6,64	10,05	23,09	9,40	6
kazibudzkiLTI2	5,12	7,71	11,91	18,08	40,77	16,72	7
kazibudzkiCMLTI2	5,16	8,05	13,34	22,03	61,16	21,95	9
pelaeLamata	5,73	8,72	13,52	20,54	45,64	18,83	8
kulakSzyb	2,17	3,18	4,91	7,43	17,30	7,00	5
kulakSzyb2	5,90	12,22	27,12	56,71	202,27	60,84	12
kulakSzybIa	1,20	1,88	3,12	5,13	13,97	5,06	3
kulakSzybIab	1,00	1,65	2,84	4,74	<b>12,97</b>	<b>4,64</b>	<b>1</b>
harmonic	291,74	544,60	1 152,26	1 962,25	3 995,58	1 589,29	16
goldenWang	14,23	25,23	46,18	68,83	98,24	50,54	11
saloHamalainen	88,40	137,70	180,17	182,54	148,74	147,51	14
cavalloDapuzzo	1,95	2,91	4,46	6,81	16,11	6,45	4
relativeError	18,99	20,81	206,74	68,98	1 056,96	274,50	15

## 5.2. Discussion

Analyzing the above results, one can draw several conclusions.

### 5.2.1. Testy uwzględniające różne rozmiary macierzy

Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, maleje badany błąd względny. Biorąc pod uwagę najlepsze współczynniki, dla małych macierzy (rozmiar 4), błąd względny wynosi minimum kilkanaście procent, a więc stosunkowo dużo. Szybko jednak spada, kiedy macierz rośnie. Dla wymiaru 7 istnieją współczynniki, które dają rezultaty w okolicy od 3-5%, co jest już wynikiem dobrym. Przy macierzach o znacznych rozmiarach (ponad 10 alternatyw) błąd wynosi zaledwie około 1-2%, co zdecydowanie jest wartością akceptowalną.

Zdecydowanie najlepszym współczynnikiem okazał się *Koczkodaj index*. Wygrywa w każdym teście, niezależnie od rozmiaru. Dla macierzy, które nie są bardzo małe, daje naprawdę satysfakcjonujące rezultaty. Dobre wartości izyskano także dla współczynników *kulakowskiSzybowskiIab*, *kulakowskiSzybowskiIa* oraz *cavalloDapuzzo* i wydaje się, że są one wiarygodne. Zdecydowanie należy odrzucić współczynniki *relativeError*, *harmonic*, *saloHamalainen*, *geometric*, *goldenWang*. Rezultaty uzyskane przez te współczynniki pokazują, że wynik badanej niespójności dla macierzy niepełnej może bardzo odbiegać od prawdziwej wartości.

Warto jednak pamiętać, że przedstawione wyniki dotyczą macierzy o poziomie niekompletności równym 15%. Oznacza to, że dla macierzy o rozmiarze  $n = 10$ , brakuje 7 porównań. Dla innych

**Table 5.3.** Relative error of inconsistency indexes for incomplete matrices with varying degrees of inconsistency, constant matrix size  $n = 8$  and constant level of incompleteness  $g = 15\%$ .

$d$	koczkodaj	kazibudzkiLTI1	kulakSzyb	kulakSzybIa	kulakSzybIab	cavalloDapuzzo
1.1	4.09	6.38	6.13	4.52	4.35	<b>0.49</b>
1.2	3.68	6.45	5.98	4.26	4.06	<b>0.96</b>
1.3	3.58	6.55	5.87	4.16	3.96	<b>1.37</b>
1.4	3.55	6.62	5.77	4.12	3.91	<b>1.80</b>
1.5	3.19	6.35	5.42	3.80	3.59	<b>2.02</b>
1.6	3.26	6.57	5.46	3.84	3.64	<b>2.39</b>
1.7	3.03	6.59	5.35	3.71	3.48	<b>2.81</b>
1.8	<b>2.47</b>	6.45	5.13	3.31	3.04	3.07
1.9	<b>2.47</b>	6.65	5.26	3.35	3.06	3.34
2.0	<b>2.20</b>	6.66	5.13	3.16	2.85	3.64
2.1	<b>2.38</b>	6.51	4.93	3.21	2.93	3.83
2.2	<b>2.16</b>	6.52	4.81	3.04	2.76	4.09
2.3	<b>2.14</b>	6.66	4.89	3.07	2.80	4.25
2.4	<b>2.00</b>	6.67	4.85	2.98	2.67	4.49
2.5	<b>1.96</b>	6.59	4.73	2.91	2.63	4.71
2.6	<b>1.73</b>	6.62	4.72	2.81	2.48	4.87
2.7	<b>1.94</b>	6.79	4.73	2.96	2.67	5.14
2.8	<b>1.75</b>	6.67	4.64	2.78	2.47	5.24
2.9	<b>1.56</b>	6.67	4.54	2.68	2.38	5.60
3.0	<b>1.82</b>	6.71	4.68	2.84	2.51	5.56
3.1	<b>1.47</b>	6.69	4.48	2.62	2.30	5.74
3.2	<b>1.46</b>	6.52	4.40	2.59	2.28	5.75
3.3	<b>1.48</b>	6.85	4.57	2.65	2.35	6.14
3.4	<b>1.38</b>	6.60	4.30	2.53	2.23	6.15
3.5	<b>1.17</b>	6.60	4.25	2.40	2.10	6.50
3.6	<b>1.25</b>	6.73	4.39	2.50	2.18	6.65
3.7	<b>1.18</b>	6.83	4.41	2.48	2.19	6.77
3.8	<b>1.24</b>	6.59	4.17	2.40	2.09	6.68
3.9	<b>1.28</b>	6.73	4.25	2.47	2.19	6.79
4.0	<b>1.11</b>	6.52	4.17	2.35	2.06	6.79
mean	<b>2.13</b>	6.61	4.88	3.08	2.81	4.45

poziomów niekompletności, wyniki będą inne. Wpływ poziomu niekompletności na badany błąd względny pokazują kolejne testy.

### 5.2.2. Testy uwzględniające różne poziomy niekompletności

Wraz ze wzrostem poziomu niekompletności, rośnie badany błąd względny. Biorąc pod uwagę najlepsze współczynniki, dla niewielkich niekompletności (4%), błąd względny wynosi zaledwie około 1-2%, co zdecydowanie jest wartością akceptowalną. Powoli jednak wzrasta, kiedy macierz rośnie. Dla niekompletności  $g = 14\%$ , istnieją współczynniki, które dają rezultaty w okolicy od 2-3%, co również

jest dobrym wynikiem. Przy macierzach o znacznych rozmiarach ( $g = 50\%$ ) błąd wynosi kilkanaście procent.

Zdecydowanie najlepszymi współczynnikami okazały się *Koczkodaj index* i *kulakowskiSzybowskiIaIb*. Pierwszy wygrywa w większości testów i daje naprawdę satysfakcjonujące rezultaty. Wraz ze wzrostem niekompletności stosunkowo coraz lepsze wyniki uzyskuje ten drugi współczynnik. W ostatnim teście uzyskuje już sporą przewagę nad resztą, co powoduje, że wartość jego średnia okazuje się najniższa. Dobre wartości uzyskano także dla współczynników *kulakowskiSzybowskiIa* oraz *cavalloDapuzzo* i wydaje się, że są one wiarygodne. Zdecydowanie należy odrzucić współczynniki *harmonic*, *relativeError*, *saloHamalainen*, *geometric*. Rezultaty uzyskane przez te współczynniki pokazują, że wynik badanej niespójności dla macierzy niepełnej może bardzo odbiegać od prawdziwej wartości.

Warto jednak pamiętać, że przedstawione wyniki dotyczą macierzy o rozmiarze równym 8. Przy tym poziomie niespójności, ale dla innych rozmiarów, wyniki będą inne. Wpływ rozmiaru macierzy na badany błąd względny pokazują wcześniejsze testy.

### 5.2.3. Testy uwzględniające różne rozmiary niespójności

Wszystkie testy dla różnych rozmiarów macierzy i poziomów niekompletności wykonano z uwzględnieniem różnego poziomu niespójności. Poziom tej niespójności jest proporcjonalny do wartości  $d$  zawartej w tabeli 5.3. W tej tabeli pokazano szczegółowe wyniki, których średnie są już częścią tabeli 5.1. Warto jednak szczegółowo przyjrzeć się wynikom. Pokazują one, że jakość współczynników jest także zależna od niespójności badanej macierzy.

Najniższe wartości błędów względnego średnio uzyskał współczynnik *Koczkodaj index*, co zostało już wcześniej podkreślone. Należy zauważyć, że uzyskuje on najlepsze rezultaty dopiero od pewnego momentu, kiedy poziom niespójności w macierzy zaczyna rosnąć. Wcześniej, dla małych niespójności najlepszym współczynnikiem okazuje się *Cavallo and D'Apuzzo index*. To ciekawa prawidłowość, która wskazuje, że wybór współczynnika do badania niespójności macierzy niepełnych warto także uzależnić od wielkości przewidywanej niespójności.

Co warto podkreślić, prawidłowość ta powtarza się w każdym z przeprowadzonych testów. Przy małej niespójności, niezależnie od rozmiaru macierzy oraz stopnia niekompletności, najlepszy okazuje się *Cavallo and D'Apuzzo index*. Potwierdzają to wyniki zawarte w Appendix.

### 5.2.4. Dyskusja ogólna

Certainly, the tests managed to show that the error increases with a growth of the level of incompleteness. At the same time, it decreases when the size of the matrix increases. However, the most important question was about which indexes cope well with incomplete matrices. The Koczkodaj index ([sub:Koczkodaj-index]) won in 9 out of 10 tests and its average error in both cases turn out to be the lowest (below 5%). The next places are occupied by two indexes introduced by Kułakowski and Szybowski ([eq:Ia], [eq:Iab]) and Cavallo and D'Apuzzo index ([sub:Cavallo-and-D'Apuzzo]). It is worth noting that all of these indexes are based on triads.

A question about what makes the Koczkodaj index giving such good results and whether is it worth using, may arise. One should return to the definition of this index ([eq:K]) and notice that it is equal to the value of the most inconsistency triad. Therefore, if the level of incompleteness is low, there is a good chance that after deletion some values from the matrix and recalculating the index the value of it will not change at all. It will only change if the element included in the most inconsistent triad is removed. However, in many cases, the examination of the full matrix and the matrix after incompleteness give exactly the same results (the error is 0%). This is the only index of this kind among those presented in the paper.

If one uses the Koczkodaj index, one may be worried that the removed comparison belonged to the most inconsistent triad. In such a case, it is difficult to predict what error will be contained in the index of the incomplete matrix. It seems that one should pay particular attention to the indexes proposed by Kułakowski and Szybowski. First of them ([eq:I1]) averages the inconsistencies of the triads. Therefore, it is safe and gives good results (in both tests it took the sixth place and achieved an error below 8%). From this perspective, another index suggested by the same authors ([eq:Ia]) turns out to be very interesting. In the tests it took the third place. It has the parameter  $\alpha$  allowing to determine the effect of the greatest inconsistency of the triad ( $\alpha$ ), and the average  $(1 - \alpha)$ . In the tests carried out, the parameter  $\alpha$  was 0.4.



## 6. Summary

Cel pracy, którym było przebadanie popularnych współczynników niespójności dla niepełnych macierzy PC, został osiągnięty. Przetestowano szesnaście różnych sposobów liczenia niespójności macierzy. Przeprowadzone badania uwzględniły wiele różnych czynników, które mogły mieć wpływ na wyniki. Wzięto pod uwagę macierze o różnych wymiarach oraz różnym poziomie niekomplementości. Sprawdzono je dla różnych stopni niekomplementości (od 4% do 50 %). Wszystkie wyniki zebrano, a wyniki zostały zaprezentowane w tabelach.

Wszystkie testy zostały zaimplementowane w języku R, który przeznaczony jest do obliczeń numerycznych i spełnił swoje zadanie. Funkcje, które odpowiadały za obliczenia szczegółowo opisano i udokumentowano. Potrafią obliczać współczynniki niespójności zarówno dla macierzy pełnych, jak też niekompletnych. W razie potrzeby można w stosunkowo łatwy sposób zaimplementować kolejne współczynniki.

Testy jednoznacznie pokazały, że niektóre z istniejących współczynników, po lekkiej modyfikacji, nadają się do obliczania niespójności macierzy niepełnych. Sposoby modyfikacji zostały przedstawione w pracy. Oczywiście istnieje wiele innych możliwości zmian w tych współczynnikach. Być może dadzą one nawet korzystniejsze rezultaty. Celem tej pracy było jednak zbadanie istniejących współczynników, dlatego zdecydowano nie dokonować w nich wielu zmian. Najlepsze rezultaty osiągają *Koczkodaj index*, *KulakowskiSzybowskiIa*, *KulakowskiSzybowskiIab*, *Cavallo DAapuzzo*. Wybór jednego, konkretnego współczynnika należy podjąć w oparciu o parametry macierzy, które zostały opisane w niniejszej pracy i które prezentują wyniki.

Bardzo ciekawe okazały się współczynniki wprowadzone przez *Kulakowskiego* i *Szybowskiego* zawierające parametry  $\alpha$  i  $\beta$ . W przeprowadzonych testach wykorzystano tylko jedno przypisanie tych parametrów, a współczynniki dały bardzo dobre rezultaty. Wydaje się, że kolejne badania tych współczynników warto poświęcić na dobór parametrów w taki sposób, aby wyniki były jeszcze lepsze. Jak wspomniano w pracy pozwalają one również na wybór między lepszym wynikiem, a pewnością, że rezultat będzie odpowiedni.

Ciekawym kierunkiem rozwoju może być właśnie stosowanie metody dla macierzy niepełnych, kiedy z jakiegoś powodu brakuje pewnych danych. Takie prace już się ukazują. Niniejsza praca pokazuje jednak, że także liczenie niespójności dla takich macierzy jest możliwe. Metoda porównywania parami rozwija się od wielu lat, ciągle odkrywa nowe możliwości i bada kolejne miejsca, gdzie może być stosowana. Ciągle jednak istnieją obszary, w których może się rozwijać, czego dowodem jest niniejsza praca.