# Funciones de una variable

Tatiana Gutiérrez

29 de abril de 2024

## 1. Introducción

Las funciones de una variable son objetos fundamentales en matemáticas y tienen diversas aplicaciones en diferentes áreas, como el análisis matemático, la física, la economía y la ingeniería. En esta sección, presentaremos una definición básica de una función y exploraremos algunas de sus propiedades y ejemplos. [3] Podemos ver algunas de ellas en la siguiente tabla:

Cuadro 1: Ejemplo de tabla de funciones de una variable

| **Función** | **Expresión** |
|---|---|
| Función lineal | $f(x) = mx + b$ |
| Función cuadrática | $f(x) = ax^2 + bx + c$ |
| Función exponencial | $f(x) = ae^{bx}$ |
| Función trigonométrica | $f(x) = A\sin(Bx + C)$ |

## 2. Definición de una función

Una función $f$ es una correspondencia entre dos conjuntos $A$ y $B$, donde a cada elemento $x$ en $A$ le corresponde un único elemento $y$ en $B$. Denotamos esto como $f : A \to B$.

## 3. Ejemplo de función

Ahora consideremos la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Podemos graficar esta función de la siguiente manera [3] :

## 4. Propiedades de las funciones

Las funciones de una variable tienen varias propiedades importantes. A continuación, mencionaremos algunas de ellas:

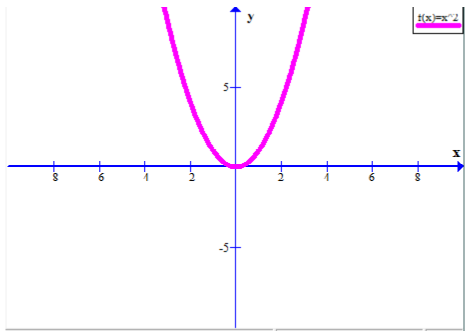


Figura 1: Gráfico de la función cuadrática $f(x) = x^2$.

- **Inyectividad**: Una función es inyectiva si cada elemento del conjunto de llegada tiene a lo sumo un elemento del conjunto de partida que le corresponde. En otras palabras, dos elementos diferentes del conjunto de partida no pueden tener el mismo valor de función [2] .
- **Sobreyectividad**: Una función es sobreyectiva si cada elemento del conjunto de llegada tiene al menos un elemento del conjunto de partida que le corresponde. En otras palabras, no hay elementos del conjunto de llegada que no sean alcanzados por la función [1] .
- **Biyectividad**: Una función es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. En otras palabras, cada elemento del conjunto de partida tiene un único elemento del conjunto de llegada que le corresponde y viceversa [2].

# 5. Teoremas y pruebas

A continuación, presentamos un teorema importante relacionado con las funciones cuadráticas:

**Teorema 1.** *Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un vértice en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.*

*Demostración.* Para demostrar este teorema, podemos completar el cuadrado de la función cuadrática y encontrar las coordenadas del vértice. La demostración es la siguiente:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado, obtenemos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Para que podamos completar el cuadrado, necesitamos agregar y restar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

dentro del paréntesis:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

Simplificando, tenemos:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

Expandiendo y simplificando nuevamente, obtenemos:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Vemos que la expresión $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ es siempre no negativa, por lo que la mínima o máxima ocurre cuando $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ es cero, es decir, cuando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Esto ocurre cuando $x = -\frac{b}{2a}$.

Por lo tanto, el vértice de la función cuadrática [1] $f(x) = ax^2 + bx + c$ está en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

$\square$

# 6. Conclusiones

En este tema, hemos explorado las funciones de una variable, presentando una definición básica, ejemplos, propiedades, teoremas y pruebas. Las funciones de una variable son una herramienta fundamental en matemáticas y ofrecen un marco para comprender y analizar una amplia variedad de fenómenos que pasan por nuestro mundo .

# Referencias


[1] Michael Spivak. *Cálculo.* Cambridge University Press, 2006.

[2] James Stewart and Andrés Sestier Bouclier. *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* Thomson, 2001.

[3] Maurice D Thomas, George Brinton y Weir. *Cálculo: una variable.* Pearson Educaciónón, 2005.

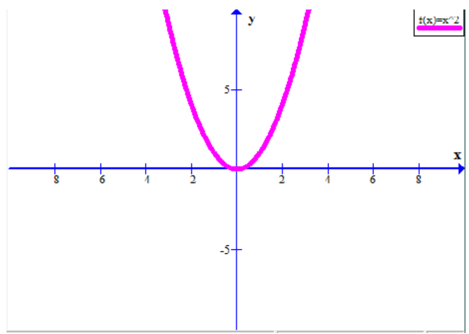


Figura 2: Enter Caption