

Nashovo ekvilibrium s tolerancí

Vojtěch Havlena, xhavle03

xhavle03@stud.fit.vutbr.cz

Abstrakt

Vzhledem k výpočetní náročnosti hledání Nashových ekvilibrií v nekooperativních hrách, se nabízí otázka, jestli je možné hledat pouze přibližná řešení (Nashova ekvilibria). Z tohoto důvodu byla zavedena Nashova ekvilibria s tolerancí (přibližná Nashova ekvilibria). Nashovo ekvilibrium s tolerancí je strategický profil, který přibližně splňuje podmínky kladené na Nashovo ekvilibrium. V této práci jsou zkoumány dva přístupy k problematice Nashova ekvilibria s tolerancí – ϵ -Nashovo ekvilibrium a okrajově také ϵ -well-supported Nashovo ekvilibrium. V práci je také ukázáno, jaký vliv má použití Nashových ekvilibrií s tolerancí na výpočetní složitost.

1 Úvod

Pravděpodobně nejdůležitější koncept nekooperativních her¹ je Nashovo ekvilibrium. Jedná se o strategický profil, při kterém žádný hráč nemá důvod jednostranně změnit svoji strategii. Jinými slovy je to strategický profil, ve kterém žádný hráč nezvýší svůj zisk tím, že by zvolil jinou strategii, zatímco ostatní hráči by si zachovali svoji stávající strategii.

Ačkoliv již J. F. Nash dokázal, že každá konečná nekooperativní hra má řešení ve formě smíšeného Nashova ekvilibria², samotné hledání Nashova ekvilibria je obecně velmi obtížný problém (existence polynomiálního algoritmu je otevřený problém). I přesto existují algoritmy pro hledání Nashových ekvilibrií. Jedním z nejznámějších je Lemke-Howsonův algoritmus pro hledání NE ve dvouhráčových hrách v normální formě (bimatrix games). Bylo ale ukázáno, že časová složitost tohoto algoritmu je v nejhorším případě exponenciální vzhledem k počtu ryzích strategií hráčů [10].

Možný způsob, jak se vypořádat se zmíněnou výpočetní složitostí, je hledat přibližná NE (tedy NE s určitou tolerancí). Jedním z konceptů přibližných Nashových ekvilibrií je ϵ -Nashovo ekvilibrium. Neformálně, smíšený profil je ϵ -NE pokud žádný

¹V této práci uvažuji implicitně pouze konečné hry.

²V dalším textu, pokud je řeč o Nashově ekvilibriu, myslím automaticky Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích.

hráč nemůže zvýšit svůj očekávaný zisk o více než ϵ v případě, že by jednostranně změnil svoji strategii.

Formálněji, uvažujme konečnou nekooperativní hru n hráčů v normální formě $\Gamma = (Q, \{S_i\}_{i \in Q}, \{U_i\}_{i \in Q})$ a její smíšené rozšíření $\Gamma^m = (Q, \{\Delta_i\}_{i \in Q}, \{\pi_i\}_{i \in Q})$. Potom můžeme ϵ -NE definovat následovně³.

Definice 1 ([7]). *Mějme $\epsilon > 0$. Smíšený strategický profil $\sigma \in \Delta$ je ϵ -Nashovo ekvilibrium ve hře Γ , pokud pro všechny $i \in Q$ a $\sigma'_i \in \Delta_i$ platí $\pi_i(\sigma) \geq \pi_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - \epsilon$.*

Pozn. V této práci se snažím co nejvíce využít notaci použitou na přednáškách (někdy se liší od notace, která se využívá v jednotlivých článcích). Pokud bychom v definici povolili $\epsilon = 0$, tak dostáváme definici Nashova ekvilibria. Každé Nashovo ekvilibrium je tedy i ϵ -NE. Vzhledem k tomu, že pro každou konečnou nekooperativní hru existuje Nashovo ekvilibrium, existuje i ϵ -NE. Každé NE je aproximováno ϵ -Nashovými ekvilibrii. Při výpočtu Nashových ekvilibrií na počítači je použití ϵ -NE poměrně přirozené. Díky tomu, že reálná čísla jsou reprezentována pouze s omezenou přesností, i algoritmy pro hledání Nashových ekvilibrií hledají ve skutečnosti ϵ -Nashova ekvilibria pro hodnotu ϵ , které odpovídá přesnosti práci s reálnými čísly [7].

	L	R
U	1,1	0,0
D	$1 + \frac{\epsilon}{2}, 1$	500,500

Obrázek 1: Hra v příkladu 1.

Příklad 1 ([7]). *Uvažujme hru na obr. 1 pro $\epsilon > 0$. Zde vidíme, že pro řádkového hráče jeho strategie D striktně dominuje nad jeho strategií U . Po odstranění striktně dominované strategie U , strategie R sloupcového hráče striktně dominuje nad jeho strategií L . Iterativním odstraňováním striktně dominovaných strategií jsme tedy zjistili, že hra má jediné Nashovo ekvilibrium (D, R) . Tento profil je rovněž ϵ -NE. Nicméně v této hře je také profil (U, L) ϵ -NE, protože žádný hráč si změnou strategie nepolepší o více než ϵ (řádkový hráč by si polepšil jen o hodnotu $\epsilon/2$).*

I když každé Nashovo ekvilibrium je „obklopeno“ ϵ -Nashovými ekvilibrii, tak ne každé ϵ -Nashovo ekvilibrium je, co se týče očekávaného užitku, „blízko“ očekávaného užitku NE (viz profil (U, L) ve hře z příkladu 1).

Na závěr ještě uvedeme další z konceptů přibližných Nashových ekvilibrií, ϵ -well-supported Nashovo ekvilibrium. Hlavní myšlenka je, že ϵ -well-supported Nashovo ekvilibrium je takový smíšený profil, ve kterém každý hráč přiřazuje nenulovou pravděpodobnost těm ryzím strategiím, jejichž očekávaný zisk při hraní této ryzí

³Uvedená definice je pro smíšené ϵ -Nashovo ekvilibrium, které je v této práci uvažováno implicitně. Velice podobným způsobem je možné definovat ϵ -Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích.

strategie je nejvýše ϵ od očekávaného zisku při hraní ryzí best response na smíšené strategie ostatních hráčů.

Definice 2 ([2]). *Mějme $\epsilon > 0$. Smíšený strategický profil $\sigma \in \Delta$ je ϵ -well-supported Nashovo ekvilibrium ve hře Γ , pokud pro všechny $i \in Q$ a $s_i, s'_i \in S_i$ takové, že $\sigma_i(s_i) > 0$, platí $\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, \sigma_{-i}) - \epsilon$.*

Pozn. Existuje více formulací definice ϵ -well-supported Nashova ekvilibria (např. jako je uvedeno v [3]).

Jak bylo již zmíněno na začátku kapitoly, výpočet Nashových ekvilibrií je náročný algoritmičtý problém, proto byla zavedena přibližná Nashova ekvilibria. V dalších kapitolách se proto budeme věnovat algoritmům pro výpočet ϵ -NE a budeme rovněž zkoumat vliv na algoritmičtí složitost.

2 Algoritmus pro výpočet ϵ -Nashova ekvilibria

V této části se blíže podíváme na algoritmus pro výpočet ϵ -Nashova ekvilibria ve dvouhráčové nekooperativní hře. Tato kapitola je založena na článku [8] a zaměřuji se zde na hlavní myšlenku (podrobné matematické důkazy jsou k dispozici ve zmíněném článku).

Kromě pojmů popsaných v předchozích kapitolách, je pro další výklad navíc nutné zavést pojem *k-uniformní* smíšená strategie. Uvažujme multimnožinu⁴ ryzích strategií S'_i hráče $i \in Q$. Smíšená strategie σ_i hráče $i \in Q$ je potom nazývána *k-uniformní* strategie, pokud σ_i je uniformní rozložení pravděpodobnosti na nějaké multimnožině S'_i , kde $|S'_i| = k$. To znamená, že pokud si pro libovolnou ryzí strategii $s_i \in S_i$ označíme α_{s_i} jako počet výskytů strategie s_i v multimnožině S'_i , potom $\sigma_i(s_i) = \frac{\alpha_{s_i}}{k}$ (všechny hodnoty vektoru σ_i jsou tedy násobky $1/k$).

Předtím, než se budeme věnovat samotnému algoritmu, uvedeme větu, která stojí za celým algoritmem. Uvažujme tedy dále konečnou dvouhráčovou nekooperativní hru v normální formě $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U_1, U_2)$ a její smíšené rozšíření Γ^m . Pro jednoduchost zatím uvažujeme, že $|S_1| = |S_2| = n$. Díky strategické ekvivalenci her můžeme navíc předpokládat, že hodnoty užiteků pro libovolného hráče a libovolnou ryzí strategii, jsou v rozmezí 0 – 1 (dále je taková hra označována jako normalizovaná). Potom platí následující věta.

Věta 1 ([8]). *Pro každé Nashovo ekvilibrium (σ_1^*, σ_2^*) a pro každé reálné číslo $\epsilon > 0$, existuje pro každé $k \geq \frac{12 \ln n}{\epsilon^2}$ dvojice k-uniformních strategií σ'_1, σ'_2 takových, že:*

1. (σ'_1, σ'_2) je ϵ -Nashovo ekvilibrium,
2. $|\pi_1(\sigma'_1, \sigma'_2) - \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)| < \epsilon$ a $|\pi_2(\sigma'_1, \sigma'_2) - \pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)| < \epsilon$.

Nyní již k samotnému algoritmu, který najde všechna *k-uniformní* ϵ -Nashova ekvilibria ve hře Γ a je založen na předchozí větě. Mějme danou hodnotu $\epsilon > 0$. Vstupem algoritmu je potom normalizovaná hra Γ . V prvním kroce nastavíme hodnotu

⁴může obsahovat několikrát stejnou ryzí strategii

$k = \frac{12 \ln n}{\epsilon^2}$. Dále budeme postupně iterovat přes všechny dvojice k -uniformních strategií. Hledání všech k -uniformních strategií hráče i odpovídá vytváření všech možných k prvkových multimnožin z jeho množiny strategií S_i . Ke každé nalezené multimnožině přísluší k -uniformní strategie (viz. definice). Všechny k prvkové multimnožiny nalezneme poměrně jednoduše hrubou silou. Pro každou dvojici k -uniformních strategií se provede ověření, zda se opravdu jedná o ϵ -Nashovo ekvilibrium. Pro ověření, zda se jedná o ϵ -NE stačí, stejně jako v případě smíšeného Nashova ekvilibria, zkoumat jen ty situace, kdy se hráč z profilu „odkloní“ ke hře nějaké své ryzí strategie (resp. smíšené strategie, která má na pozici $j \in \{1, \dots, n\}$ hodnotu 1).

Co se týče časové složitosti algoritmu, tak počet k prvkových multimnožin odpovídá počtu kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním. Pokud si počet k prvkových multimnožin (resp. počet všech k -uniformních strategií) označíme pomocí P , tak platí

$$P = \binom{n+k-1}{k} \sim n^k. \quad (1)$$

Vzhledem k tomu, že hledáme dvojice k -uniformních strategií, tak máme celkem až n^{2k} možností. Celková asymptotická složitost tedy je

$$n^{\mathcal{O}(k)} = n^{\mathcal{O}(\frac{\ln n}{\epsilon^2})}. \quad (2)$$

Ověření, zda dvojice k -uniformních strategií tvoří ϵ -NE, se na celkové asymptotické složitosti neprojeví. Tato složitost se nazývá kvazi-polynomiální.

Věta 1 nám také říká, že pro každé Nashovo ekvilibrium σ^* existuje k -uniformní ϵ -NE takové, že očekávaný užitek při tomto ϵ -NE pro každého hráče se od očekávaného užitku NE σ^* liší nejvýše o ϵ . Výše uvedený algoritmus je tedy možné upravit tak, aby pro zadané Nashovo ekvilibrium našel ϵ -NE při kterém se očekávaný užitek obou hráčů liší od oč. užitku zadaného NE nejvýše o ϵ (modifikace by spočívala v přidání omezující podmínky na nalezená ϵ -NE).

Zatím jsme uvažovali, že pro množiny ryzích strategií platí $|S_1| = |S_2| = n$. V případě, že hráči mají různé počty ryzích strategií ($n_1 = |S_1|$ a $n_2 = |S_2|$), platí výše uvedená věta, jen se změnou podmínky kladené na hodnotu k :

$$k \geq \frac{12 \ln \max\{n_1, n_2\}}{\epsilon^2}. \quad (3)$$

Algoritmus pro rozdílné počty ryzích strategií zůstává stejný. Asymptotická složitost by zůstala rovněž stejná při uvažování $n = \max\{n_1, n_2\}$.

3 Hledání přibližných Nashových ekvibrií pro konstantní ϵ

V předchozí kapitole jsme se zabývali algoritmem, který pro danou hodnotu ϵ a nekooperativní normalizovanou dvouhráčovou hru v normální formě Γ najde k -uniformní ϵ -Nashova ekvilibria. Tento algoritmus má kvazi-polynomiální časovou složitost. V této kapitole se na celou situaci podíváme z trochu jiného pohledu. Budeme se opět

zabývat pouze dvouhráčovými nekooperativními normalizovanými hrami v normální formě. Bude nás ale zajímat existence algoritmů, které v polynomiálním čase naleznou ϵ -Nashovo ekvilibrium pro nějakou pevnou hodnotu ϵ .

3.1 Výpočet $\frac{1}{2}$ -Nashova ekvilibria

Tato podkapitola je založena na článku [4]. V této podkapitole předpokládáme dvouhráčovou nekooperativní normalizovanou hru v normální formě, kde každý hráč má n strategií a zisky jsou zadány ve formě matic rozměru $n \times n$ (matice R pro řádkového hráče a C pro sloupcového). Ryzí strategie řádkového hráče odpovídají n řádkům matice a ryzí strategie sloupcového odpovídají n sloupcům matice. Očekávaný zisk řádkového hráče při hraní smíšeného strategického profilu (x, y) je potom tedy $x^\top Ry$ a podobně očekávaný zisk sloupcového je $x^\top Cy$.

Jak již bylo zmíněno dříve, při ověřování, zda se jedná o Nashovo ekvilibrium (resp. ϵ -NE), stačí kontrolovat zisk jednotlivých hráčů když se jednostranně odchýlí k hraní nějaké své ryzí strategie⁵. Pojem ϵ -Nashova ekvilibria tedy můžeme ekvivalentně, při použití předchozí notace definovat také následovně. Smíšený profil (x^*, y^*) je ϵ -Nashovo ekvilibrium pro $\epsilon > 0$ ve dvouhráčové nekooperativní hře v normální formě s maticemi zisků R, C , pokud platí [4]:

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad e_i^\top Ry^* \leq x^{*\top} Ry^* + \epsilon \quad (4)$$

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad x^{*\top} Ce_i \leq x^{*\top} Cy^* + \epsilon, \quad (5)$$

kde e_i ve vektor, jehož i -tý prvek je 1 ostatní prvky jsou nastaveny na 0 (odpovídá hraní ryzí strategie i). Algoritmus, který pro dvouhráčovou hru, danou maticemi zisků R a S najde $\frac{1}{2}$ -Nashovo ekvilibrium je dán následovně [4].

1. Zvol libovolný řádek i pro řádkového hráče (vzhledem k tomu, že ryzí strategie odpovídají řádkům/sloupcům matice, nerozlišuji mezi pojmem strategie a řádek/sloupec).
2. Nechť $j \in \arg \max_{j'} C_{ij'}$ – j je tedy strategie sloupcového hráče (sloupec matice), která je best response na strategii (řádek) i řádkového hráče.
3. Nechť $k \in \arg \max_{k'} R_{k'j}$ – k je tedy strategie řádkového hráče (řádek matice), která je best response na strategii (sloupec) j sloupcového hráče.
4. Ekvilibrium je (x^*, y^*) , kde $x^* = \frac{1}{2}e_i + \frac{1}{2}e_k$ a $y^* = e_j$.

Algoritmus pracuje s lineární časovou složitostí (vzhledem k počtu ryzích strategií) – hledá se jen maximum na řádku a sloupci matice.

⁵Pro zadanou smíšenou strategii y^* sloupcového hráče je výraz $x(Ry^*)$ v podstatě váženým průměrem hodnot vektoru Ry^* podle smíšené strategie x . A tedy výraz nabývá maxima pro x , které odpovídá nějaké ryzí strategii řádkového hráče (vektor má na určité pozici 1, na ostatních 0). Podobně pro hráče sloupcového.

Zbývá dokázat, že smíšený profil (x^*, y^*) je opravdu $\frac{1}{2}$ -Nashovo ekvilibrium. Očekávaný zisk řádkového hráče při hraní (x^*, y^*) je

$$\pi_1(x^*, y^*) = x^{*\top} R y^* = \left(\frac{1}{2} e_i + \frac{1}{2} e_k \right)^\top R e_j = \left(\frac{1}{2} e_i^\top + \frac{1}{2} e_k^\top \right) R e_j \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} e_i^\top R e_j + \frac{1}{2} e_k^\top R e_j = \frac{1}{2} R_{ij} + \frac{1}{2} R_{kj}. \quad (7)$$

Dále z 3. kroku algoritmu víme, že jedno z best response řádkového hráče na strategii y^* je hrát řádek (strategii) k . Očekávaný zisk řádkového hráče při hraní tohoto profilu je $\pi_1(e_k, y^*) = \pi_1(e_k, e_j) = R_{kj}$. Vzhledem k tomu, že k je best response na y^* , řádkový hráč nezíská více při hraní jiné ryzí strategie. Platí tedy

$$\pi_1(e_k, y^*) - \pi_1(x^*, y^*) = R_{kj} - \left(\frac{1}{2} R_{ij} + \frac{1}{2} R_{kj} \right) = \frac{1}{2} R_{kj} - \frac{1}{2} R_{ij}. \quad (8)$$

Vzhledem k tomu, že hra je normalizovaná, předchozí výraz nabývá maxima v případě, kdy $R_{ij} = 0$ a $R_{kj} = 1$. Dále tedy dostáváme

$$\pi_1(e_k, y^*) - \pi_1(x^*, y^*) \leq \frac{1}{2} R_{kj} \leq \frac{1}{2}. \quad (9)$$

První podmínka (4) z definice ϵ -NE je tedy splněna. Nyní budeme dokazovat druhou podmínku. Zisk sloupcového hráče při hraní (x^*, y^*) je

$$\pi_2(x^*, y^*) = x^{*\top} C y^* = \frac{1}{2} C_{ij} + \frac{1}{2} C_{kj}. \quad (10)$$

Dále nechť j' je ryzí best response sloupcového hráče na smíšenou strategii x^* . Zisk sloupcového hráče při hraní tohoto smíšeného profilu potom je

$$\pi_2(x^*, e_{j'}) = \frac{1}{2} C_{ij'} + \frac{1}{2} C_{kj'}. \quad (11)$$

Podobně jako v předchozím případě spočítáme rozdíl očekávaného zisku $\pi_2(x^*, e_{j'})$ od $\pi_2(x^*, y^*)$. Dostáváme tedy

$$\pi_2(x^*, e_{j'}) - \pi_2(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2} C_{ij'} + \frac{1}{2} C_{kj'} \right) - \left(\frac{1}{2} C_{ij} + \frac{1}{2} C_{kj} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} (C_{ij'} - C_{ij}) + \frac{1}{2} (C_{kj'} - C_{kj}). \quad (13)$$

Díky tomu, že j je best response sloupcového hráče na strategii i , platí $C_{ij} \geq C_{ij'}$. Opět se snažíme výraz omezit zhora (což je tedy případ, kdy $C_{ij} = C_{ij'}$) a konečně dostáváme

$$\pi_2(x^*, e_{j'}) - \pi_2(x^*, y^*) \leq 0 + \frac{1}{2} (C_{kj'} - C_{kj}) \leq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Druhá podmínka (5) z definice ϵ -NE je tedy rovněž splněna. Smíšený profil (x^*, y^*) je tedy $\frac{1}{2}$ -NE.

3.2 Přehled známých výsledků

V předchozí podkapitole jsme ukázali jednoduchý polynomiální algoritmus pro výpočet $\frac{1}{2}$ -NE. Nicméně existují polynomiální algoritmy, které naleznou přibližná Nashova ekvilibria pro ještě menší hodnoty ϵ . V literatuře se mi podařilo nalézt tyto výsledky. V případě ϵ -Nashova ekvilibria existuje pro dvouhráčové nekooperativní normalizované hry v normální formě polynomiální algoritmus, který nalezne 0.3393-NE [11]. V případě ϵ -well-supported Nashova ekvilibria existuje pro dvouhráčové nekooperativní normalizované hry v normální formě polynomiální algoritmus, který nalezne $\frac{2}{3}$ -WSNE [6] (modifikovaná verze algoritmu dokonce umožňuje nalézt $(\frac{2}{3} - 0.005913759)$ -WSNE [5]).

4 Závěr

V této práci jsem se věnoval problematice Nashova ekvilibria s tolerancí (přibližného Nashova ekvilibria). Zaměřil jsem se hlavně na ϵ -Nashovo ekvilibrium, okrajově také na ϵ -well-supported Nashovo ekvilibrium. Tato práce je založena na několika článcích, přičemž jsem se v nich zaměřil převážně na hlavní části a samotné výsledky. Podrobnější informace včetně důkazů lze najít v originálních článcích.

První část práce byla věnována základním definicím. Ve druhé části byl popsán algoritmus včetně odvození složitosti algoritmu pro výpočet ϵ -NE v normalizovaných dvouhráčových nekooperativních hrách v normální formě. Třetí část byla potom věnována otázce pro jaké hodnoty ϵ existuje polynomiální algoritmus, který nalezne ϵ -NE, resp. ϵ -WSNE. Na závěr poznamenejme, že kromě zmíněných algoritmů, je možné pro výpočet ϵ -NE použít například i evoluční algoritmy [1].

Ačkoliv má použití ϵ -NE i nevýhody, které byly zmíněny v úvodní kapitole, má použití ϵ -NE pozitivní vliv na výpočetní složitost, ve srovnání s výpočtem NE. Nicméně i přes všechny dosažené výsledky zůstávají stále některé problémy otevřeny, např. existence polynomiálního algoritmu pro výpočet ϵ -NE, pro libovolné hodnoty ϵ [9].

Reference

- [1] BORYCZKA, U. a JUSZCZUK, P. *Differential Evolution as a New Method of Computing Nash Equilibria*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. S. 192–216. ISBN 978-3-642-36815-8.
- [2] DASKALAKIS, C. *MIT Lecture notes: Games, Decision, and Computation*. February 2015. Dostupné na: <https://stellar.mit.edu/S/course/6/sp15/6.891/courseMaterial/topics/topic1/lectureNotes/lec2/lec2.pdf>.
- [3] DASKALAKIS, C., GOLDBERG, P. W. a PAPADIMITRIOU, C. H. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. In *STOC*. 2006.

- [4] DASKALAKIS, C., MEHTA, A. a PAPADIMITRIOU, C. A note on approximate Nash equilibria. *Theoretical Computer Science*. 2009, roč. 410, č. 17. S. 1581 – 1588. ISSN 0304-3975.
- [5] FEARNLEY, J., GOLDBERG, P. W., SAVANI, R. et al. Approximate Well-supported Nash Equilibria below Two-thirds. *CoRR*. 2014, abs/1204.0707v2. Dostupné na: <<http://arxiv.org/abs/1204.0707v2>>.
- [6] KONTOGIANNIS, S. C. a SPIRAKIS, P. G. Well Supported Approximate Equilibria in Bimatrix Games. *Algorithmica*. Srpen 2010, roč. 57, č. 4. S. 653–667. ISSN 0178-4617.
- [7] LEYTON BROWN, K. a SHOHAM, Y. *Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction*. 1st. [b.m.]: Morgan and Claypool Publishers, 2008. ISBN 1598295934, 9781598295931.
- [8] LIPTON, R. J., MARKAKIS, E. a MEHTA, A. Playing Large Games Using Simple Strategies. In *Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce*. New York, NY, USA: ACM, 2003. S. 36–41. EC '03. ISBN 1-58113-679-X.
- [9] NISAN, N., ROUGHGARDEN, T., TARDOS, E. et al. *Algorithmic Game Theory*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-87282-9.
- [10] SAVANI, R. a STENGEL, B. von. Hard-to-Solve Bimatrix Games. *Econometrica*. 2006, roč. 74, č. 2. S. 397–429. ISSN 1468-0262.
- [11] TSAKNAKIS, H. a SPIRAKIS, P. G. *An Optimization Approach for Approximate Nash Equilibria*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. S. 42–56. ISBN 978-3-540-77105-0.