Úkol č. 4 do předmětu Teoretická informatika

Vojtěch Havlena (xhavle03)

1. Příklad

Při vyjadřování funkce $sqrt3$ vycházím z toho, že $sqrt3(x) \leq x$ a toho, že pokud $z^3 \leq x$ potom i $(z-1)^3 \leq x$. Pro výpočet funkce $sqrt3(x)$ stačí rekurzivně v klesajícím pořadí zkoušet čísla z intervalu $z \in \{1, \dots x\}$ a spočítám počet čísel, pro které platí $z^3 \leq x$. Pro vyjádření funkce $sqrt3$ využiji pomocné funkce leq ($leq(x, y) = 1$ pokud $x \leq y$, jinak $leq(x, y) = 0$) a $exp3(x) = x^3$ definované následovně:

$$\begin{aligned} leq &: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \quad leq \equiv monus \circ (\sigma \circ \xi \circ \pi_0^2 \times monus \circ (\pi_1^2 \times \pi_2^2)) \\ exp3 &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad exp3 \equiv mult \circ ((mult \circ (\pi_1^1 \times \pi_1^1)) \times \pi_1^1) \end{aligned}$$

Primitivní rekurze využívaná pro definici $sqrt3$ je potom definována následovně:

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad g \equiv \xi \circ \pi_0^1 \\ h &: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \quad h \equiv plus \circ (leq \circ ((exp3 \circ \sigma \circ \pi_2^3) \times \pi_1^3) \times \pi_3^3) \\ f &: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \quad f(x, 0) = g(x) \\ & \qquad\qquad\quad f(x, y+1) = h(x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

Nakonec samotná funkce $sqrt3$ je definována

$$sqrt3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad sqrt3 \equiv f \circ (\pi_1^1 \times \pi_1^1)$$

2. Příklad

Kódování symbolů páskové abecedy $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$: $\Delta \approx 0, a \approx 1, b \approx 2$. Obrácený počáteční obsah pásky zakódovaný do čísla o základu $|\Gamma| = 3$: $w = 0210$. Kódování stavů: $q_F = 0, q_0 = 1, q_1 = 2, q_3 = 3$.

(a) $cursym(210, 1, 1) = quo(210, 3^0) \dot{-} mult(3, quo(210, 3^1)) = 210 \dot{-} mult(3, 21) = 210 \dot{-} 210 = 0$
$step(210, 1, 1) = (210, 2, 2)$

(b) $cursym(210, 2, 2) = quo(210, 3^1) \dot{-} mult(3, quo(210, 3^2)) = 21 \dot{-} 20 = 1$
$step(210, 2, 2) = (210, 3, 3)$

(c) $cursym(210, 3, 3) = quo(210, 3^2) \dot{-} mult(3, quo(210, 3^3)) = 2 \dot{-} 0 = 2$
$step(210, 3, 3) = (210, 3, 4)$

(d) $cursym(210, 3, 4) = quo(210, 3^3) \dot{-} mult(3, quo(210, 3^4)) = 0 \dot{-} 0 = 0$
$step(210, 3, 4) = (210, 0, 5)$

Rekurzivní vyčíslení funkce run:
$run(210, 1, 1, 0) = (210, 1, 1)$
$run(210, 1, 1, 1) = step(210, 1, 1) = (210, 2, 2)$
$run(210, 1, 1, 2) = step(210, 2, 2) = (210, 3, 3)$
$run(210, 1, 1, 3) = step(210, 3, 3) = (210, 3, 4)$
$run(210, 1, 1, 4) = step(210, 3, 4) = (210, 0, 5)$
$stoptime(210) = \mu t[\pi_2^3(run(210, 1, 1, t)) = 0] = 4$

Vyčíslení funkce $f(210)$ je potom tedy

$$f(210) = \pi_1^3(run(210, 1, 1, stoptime(210))) = \pi_1^3(run(210, 1, 1, 4)) = 210$$

3. Příklad

Nechť L je bezkontextový jazyk. Potom k němu existuje gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ v Chomského normální formě taková, že $L(G) = L$. Sestavíme 3-páskový NTS M, který bude simulovat provádění pravidel v CNF z množiny P.

- První páska obsahuje vstupní řetězec w.
- Druhá páska slouží pro simulaci nejlevější derivace. V průběhu výpočtu obsahuje řetězec, který je celý tvořen symboly z Σ a poslední symbol je z N.
- Třetí páska slouží jako zásobník pro neterminály, které jsou součástí větné formy, ale nejsou nejlevější. Kompletní větnou formu lze sestavit konkatenací užitečného obsahu 2. pásky s užitečným obsahem 3. pásky v reverzním pořadí.

NTS M potom pracuje tak, že se nejprve na 2. pásku vloží symbol S.

- Nechť A je neterminál na 2. pásce. Potom se opakovaně nedeterministicky zvolí pravidlo $A \to \alpha \in P$. Pokud $\alpha = BC$, $B, C \in N$, tak se aktuální neterminál na 2. pásce přepíše na B a do zásobníku na 3. pásce se vloží neterminál C. Pokud $\alpha = b$, $b \in \Sigma$, tak se přepíše symbol neterminálu na 2. pásce za b, hlava se posune o pozici doprava a zapíše se neterminál, který je na vrcholu zásobníku na 3. pásce (symbol, který je na pozici hlavy na 3. pásce). Na 3. pásce je potom tento symbol vymazán.
- NTS M nakonec zkontroluje, zda obsah 2. pásky je shodný s obsahem 1. pásky (tedy jestli byl vygenerován řetězec w). Pokud ano, zastaví přechodem do q_F. V opačném případě abnormálně zastaví.

Co se týče časové složitosti (počtu kroků NTS M), tak přepis symbolů, vkládání a výběr ze zásobníku lze provést v konstantním počtu kroků (omezeno nějakou kladnou konstantou k, nezávislé na velikosti vstupního řetězce). Pro kontrolu, zda je obsah 2. pásky shodný s obsahem 1. pásky je potřeba $\mathcal{O}(n)$ kroků (toto se ale provede pouze jednou během výpočtu). Vzhledem k tomu, že gramatika je CNF, tak počet použitých pravidel p pro vygenerování věty o délky n je $p = 2n - 1 = \mathcal{O}(n)$. Celkový počet kroků je tedy vzhledem k výše uvedenému $\mathcal{O}(n)$ a tedy $L \in NTIME(n)$.

4. Příklad

Pro důkaz toho, že problém „postačuje k barev pro obarvení turistických tras“ je NP-těžký použiji redukci z hranového barvení grafu, který je NP-úplný. Hranové barvení neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je přiřazení barev hranám tak, že žádné dvě incidentní hrany nemají stejnou barvu. Turistické trasy lze reprezentovat neorientovaným grafem, kde vrcholy jsou rozcestí a hrany jsou části nějaké trasy. Formálněji značení cest může být dvojice $Z = (R, T)$, kde R je konečná množina rozcestí a T je množina konečných posloupností $r_1 r_2 \dots r_n$, kde $r_i \in R$ pro $1 \leq i \leq n$. Tyto jednotlivé posloupnosti reprezentují trasy, které vedou mezi rozcestími. Barvení tras je potom přiřazení každé trase barvu tak, že trasy, které mají společné nějaké rozcesí, mají různou barvu.

Polynomiální redukce f přiřazuje instanci hranového barvení $(G = (V, E), k)$ instanci problému značení tras (Z_G, k). Zde $Z_G = (V, T)$, kde

$$T = \{uv | u, v \in V \wedge \{u, v\} \in E\}.$$

Tedy instanci hranového barvení zobrazujeme na instanci problému značení tras, kde uvažujeme pouze trasy délky 1. Z uvedeného popisu redukce f plyne, že vstupní graf G je obarvitelný k barvami právě tehdy když trasy jsou obarvitelné k barvami (tedy dostačuje k barev pro obarvení tras).

Uvedenou redukci lze implementovat úplným deterministickým Turingovým strojem. Předpokládejme, že vstupní graf je kódován jako řetězec (stejně jako hodnota k – např. v bin. kódu). Kódovanou instanci problému značení tras lze pro vhodné kódování vytvořit v čase $\mathcal{O}(n)$ (kopírování vstupu na pomocnou pásku, úprava do kódu značení cest a okopírování zpět na první pásku). Celková složitost DTS je tedy polynomiální.