

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Katarina Brilej, Sara Kovačič

**Uporaba metahevrstike GRASP na problemu potujočega  
trgovca**

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Mentor: prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2019

## KAZALO

|   |    |
|---|----|
| 1. Uvod   | 3  |
| 2. Problem potujočega trgovca                           | 3  |
| 3. Grasp  | 3  |
| 3.1. Greedy randomized construction                     | 3  |
| 3.2. Local search                                       | 4  |
| 4. Celoštevilski linearni program in primerjava z GRASP | 7  |
| 5. Primerjave   | 9  |
| 5.1. Primerjava ILP in GRASP                            | 9  |
| 5.2. Primerjava parametra alpha                         | 9  |
| 5.3. Primerjava s skupino 7                             | 10 |
| 6. Zaključek  | 11 |
| Literatura  | 12 |

## 1. UVOD

Metahevrstika je algoritemski način reševanja kombinatoričnega optimizacijskega problema, pri katerem na začetku izberemo množico kandidatov za rešitev, in jo iterativno izboljšujemo (glede na neko vnaprej izbrano funkcijo zaželenosti), ter po dovolj korakih vrnemo najboljši element iz te množice. Metahevrstike torej vrnejo približne rešitve, a veliko hitreje kot eksaktni postopki. V projektu bova na problem potujočega trgovca implementirali metahevrstiko GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*). Problem potujočega trgovca bova rešili tudi kot celoštevilski linearni program in primerjali rešitve. Generirali bova nekaj zanimivih grafov in na njih preizkusili algoritem. Rezultate bova primerjali tudi z rezultati iz spleta in rezultati skupine 7, ki bo na problem potujočega trgovca implementirala genetski algoritem.

## 2. PROBLEM POTUJOČEGA TRGOVCA

Problem potujočega trgovca ("travelling salesman problem"/TSP) se glasi:

- **Formulacija v vsakdanjem jeziku:** danih je  $n$  mest in razdalja med poljubnim parom mest (od mesta do mesta lahko potujemo po zgolj eni poti). Najdi najkrajšo (najcenejšo) pot, ki se začne in konča v istem mestu ter obišče vsako mesto natanko enkrat.
- **Formulacija v matematičnem jeziku:** v (neusmerjenem enostavnem) polnem grafu  $K_n$  z uteženimi povezavami (pozitivne vrednosti) najdi najkrajši cikel, ki vsebuje vsa vozlišča. Ciklom, ki vsebujejo vsa vozlišča grafa, pravimo Hamiltonovi cikli.

## 3. GRASP

GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*) je metahevrstika, ki sestoji iz dveh faz: *greedy randomized construction* in *local search*. V prvi fazi na pameten način (odvisno od problema) izberemo izmed vseh možnih rešitev CL (candidate list) množico začetnih približkov RCL (restricted candidates list). To storimo deloma deterministično in deloma stohastično, da zagotovimo, da so začetni približki obetavni, a dovolj razpršeni po celotni množici CL, da bo druga faza pregledala čimvečji del CL. V drugi fazi za vsako izmed teh rešitev  $s \in RCL$  pregledamo elemente  $s' \in CL$  v njeni okolici (kaj je okolica je od problema in načina reševanja odvisno). Če najdemo boljšo rešitev  $s'$ , jo dodamo v RCL ter  $s$  odstranimo. To ponavljamo dokler zaustavitveni pogoj (npr. št. iteracij, zahtevana natančnost) ni izpolnjen.

**3.1. Greedy randomized construction.** Kot smo že omenili je GRASP sestavljen iz dveh delov. Najprej bomo predstavili tako imenovan greedy randomized construction. Tu parameter  $\alpha$  predstavlja moč množice začetnih približkov (RCL), v našem primeru torej dolžino seznama RCL. Za vhodni podatek imamo tudi incidenčno matriko cen povezav velikosti  $n \times n$ .  $g$  je simetrična matrika, z ničlami po diagonali. Na začetku jo s pomočjo funkcije `slovar_cen` spremenimo v slovar, sestavljen iz elementov, ki jo imajo za ključ povezavo oblike  $(x_i, x_j)$ , za vrednost pa ceno/razdaljo, ki ji pripada. Vsak začetni približek  $t = (l, 1, v_2, \dots, v_n)$  iz RCL konstruiramo tako, da določimo  $v_1 := 1$  nato iterativno za  $i = 2, \dots, n$  za  $v_i$  izberemo naključno med  $p\%$  najbližjih vozlišč do  $v_{i-1}$ , ki še niso v  $t$ . Na koncu še izračunamo dolžino poti s prej definirano funkcijo `dolzina_poti` in jo postavimo na ničto mesto. Take cikle  $t$  konstruiramo toliko `2casa`, da RCL napolnimo. Če delamo z matrikami velikosti

manj kot 5, moramo nastaviti tudi parameter `delez`, saj mora vrednost `n` // `delez` presegati število 1.

```

1 def greedy_construction(g, alpha, delez = 5):
2     RCL = [0] * alpha
3     slovar = slovar_cen(g)
4     n = len(g)
5     p = n // delez
6     for j in range(0, alpha):
7         t = [0] * (n+1)
8         t[1] = 1
9         mesta = [h for h in range(2, n+1)]
10        for i in range(2, n+1):
11            povezave = [(t[i-1], m) for m in mesta]
12            cene = { key: value for key, value in slovar.items() if key
13                    in povezave }
14            urejene_povezave = sorted(cene, key=cene.__getitem__)
15            (_, vi) = random.choice(urejene_povezave[:p])
16            t[i] = vi
17            mesta.remove(vi)
18            t[0] = dolzina_poti(g, t)
19            RCL[j] = t
20    return RCL

```

**3.2. Local search.** V tem delu se bomo posvetili drugemu delu algoritma imenovanemu `local search`. Obravnavali bomo dve metodi `2opt` in `3opt`. Funkcija `local_search` zato poleg matrike `g`, parametra `alpha` in števila iteracij sprejme še parameter metodo. Na začetku definiramo RCL, ki predstavlja začetni seznam približkov. Te nato uredimo po dolžini, primerjamo jih po prvem elementu, ki predstavlja dolžino poti. Nato naključno izberemo `t` iz RCL, toda z linerano padajočo verjetnostjo. Najverjetneje izberemo cikel na vrhu RCL, torej najkrajši. Ko imamo izbran `t` se na podlagi parametra metoda odločimo za `2opt` ali pa `3opt`. Obe metodi poizkušata približek izboljšati, če jima uspe, vrneta novi `t`. Neodvisno od metode nato v primeru, da je izboljšava uspela v RCL dodamo izboljšan približek in starega odstranimo. Kasneje si bomo ogledali še kako posamezna metoda deluje. Ponavljamo tolikokrat kot je predpisano, to nam določa `iter`.

```

1 def local_search(g, k, iter, metoda):
2     RCL = greedy_construction(g, k)
3     n = len(g)
4     slovar = slovar_cen(g)
5     #urejen seznam zacetnih priblizkov
6     RCL.sort(key=lambda x: x[0])
7     stevec = 0
8     while stevec < iter:
9         utezi = [i * 2 / ((k+1)*k) for i in range(k, 0, -1)]
10        indeks = np.random.choice(len(RCL), size = 1, p = utezi)
11        t = RCL[indeks[0]]
12        if metoda == "dva_opt":
13            novi_t = dva_opt(n, t, g)
14        elif metoda == "tri_opt":

```

```

15     novi_t = tri_opt(n,t,g)
16     if novi_t:
17         RCL.append(novi_t)
18         RCL.remove(t)
19         stevec += 1
20         RCL.sort(key=lambda x: x[0])
21     RCL.sort(key=lambda x: x[0])
22     return RCL[0]

```

Če si zdaj ogledamo še kako delujeta posamezni metodi. Začnimo s preprostejšo, 2opt. Ko naključno izberemo cikel  $t$ , ga želimo izboljšati. Krajši cikel iščemo v okolici, ki je definirana kot monožica vseh ciklov  $t'$  iz CL, ki jih dobimo iz  $t$  tako, da mu zamenjamo dve vozišči, torej naključno zamenjamo dve vozlišči  $t$ . Namesto, da bi shranjevali vse možne  $t'$  in na koncu preverili, če je najkrajši krajši od trenutnega  $t$ , je bolj učinkovito, če sproti preverjamo, če posamezna menjava prinese izboljšavo. Na začetku zato definiramo spremenljivko razlika, ta meri, če je dana menjava boljša. Nato moramo v zanki ločiti dva primera, saj v primeru, da je  $j = n$ , razdremo povezavo s prvim elementom. Nato izračunamo change, če je ta manjši od trenutne razlike, jo posodobimo, saj smo dobili krajši cikel. Shranimo si tudi optimalni  $i$  in  $j$ , da bomo na koncu vedeli s katero menjavo smo dosegli najkrajši cikel. Če smo uspeli izboljšati  $t$ , bo razlika negativna in dobili bomo novi\_t. Tega konstruiramo tako, da na starem  $t$  izvedemo menjavo določeno z optimalnim  $i$  in  $j$ . Namesto, da znova računamo celotno dolžino cikla, samo prištejemo razliko, ki je negativna.

```

1 def dva_opt(n,t,g):
2     slovar = slovar_cen(g)
3     razlika = 0
4     for i in range(2,n):
5         for j in range(i+1,n+1):
6             if j != n:
7                 change = slovar[(t[i-1],t[j])] + slovar[(t[i],t[j+1])]
8                     - slovar[(t[i-1],t[i])] - slovar[(t[j],t[j+1])]
9             else:
10                 change = slovar[(t[i-1],t[j])] + slovar[(t[i],t[1])] -
11                     slovar[(t[i-1],t[i])] - slovar[(t[j],t[1])]
12             if change < razlika:
13                 razlika = change
14                 opt_i = i
15                 opt_j = j
16         if razlika < 0:
17             novi_t = [t[m] for m in range(0,n+1)]
18             novi_t[opt_i:opt_j+1] = novi_t[opt_i:opt_j+1][::-1]
19             novi_t[0] = t[0] + razlika
20             return novi_t
21         else:
22             return None

```

3opt je nekoliko bolj dodelana različica local searcha, zamenjamo namreč kar tri vozlišča. Tako kot 2opt sprejme velikost matrike, matriko in cikel  $t$ . Zaradi preglednosti na začetku definiramo spremenljivke  $X1$ ,  $X2$ ,  $Y1$ ,  $Y2$ ,  $Z1$ ,  $Z2$ . Sedaj imamo 7 možnih menjav. Tri od teh so 2opt, štiri pa 3opt. Za vsako od možnih menjav nato izračunamo razliko. Ker pri 3opt menjavah odstranimo enake povezave,

lahko to shranimo pod spremenljivko `odstej`. Ko izračunamo vse razlike, poiščemo minimum, s tem ko si zabeležimo, pri katerem indeksu je bila minimalna razlika dosežena, bomo kasneje vedeli katero menjavo izvesti, saj so te urejene po vrsti v seznamu spremembe. Če je `change` manjša od trenutne razlike, pomeni, da lahko `t` izboljšamo. Posodobimo razliko, indeks in si zabeležimo optimalne `i,j` in `k`, ki jih bomo potem potrebovali, da izvedemo ustrezno menjavo. Torej če je na koncu razlika manjša kot 0 lahko zgradimo novi `t`. Ta je odvisen od vrste menjave, ki jo moramo izvršiti, ta pa je določena z indeksom in optimalnimi `i,j` in `k`. Tako kot pri `2opt` tudi tukaj novo dolžino cikla izračunamo tako, da prištejemo razliko.

```

1 def tri_opt(n, t, g):
2     slovar = slovar_cen(g)
3     razlika = 0
4     for i in range(2,n-1):
5         for j in range(i+1,n):
6             for k in range(j+1,n+1):
7                 X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2 = t[i-1], t[i], t[j-1], t[j], t[
                    k-1], t[k]
8     # 2 opt moves
9         change1 = slovar[(X1,Z1)] + slovar[(X2,Z2)] - slovar[(
                X1,X2)] - slovar[(Z1,Z2)]
10        change2 = slovar[(Y1, Z1)] + slovar[(Y2, Z2)] - slovar
                [(Y1, Y2)] - slovar[(Z1, Z2)]
11        change3 = slovar[(X1, Y1)] + slovar[(X2, Y2)] - slovar
                [(X1, X2)] - slovar[(Y1, Y2)]
12    # 3 opt moves
13        odstej = slovar[(X1, X2)] + slovar[(Y1, Y2)] + slovar[(
                Z1, Z2)]
14    # v vseh treh primerih odstranimo enake povezave
15        change4 = slovar[(X1, Y1)] + slovar[(X2, Z1)] + slovar
                [(Y2, Z2)] - odstej
16        change5 = slovar[(X1, Z1)] + slovar[(Y2, X2)] + slovar
                [(Y1, Z2)] - odstej
17        change6 = slovar[(X1, Y2)] + slovar[(Z1, Y1)] + slovar
                [(X2, Z2)] - odstej
18        change7 = slovar[(X1, Y2)] + slovar[(Z1, X2)] + slovar
                [(Y1, Z2)] - odstej
19    # izracunamo najmanjso vrednost razlike
20        spremembe = [change1, change2, change3, change4, change5
                , change6, change7]
21        change = min(spremembe)
22        ind = np.argmin(spremembe) + 1
23        if change < razlika:
24            razlika = change
25            indeks = ind
26            opt_i = i
27            opt_j = j
28            opt_k = k
29    if razlika < 0:
30        novi_t = menjava(indeks, n, t, opt_i, opt_j, opt_k)
31        novi_t[0] = t[0] + razlika

```

```

32         return novi_t
33     else:
34         return None

```

V naslednji funkciji so opisane menjave, ki jih moramo narediti na trenutnem ciklu  $t$ , odvisne pa so od indeksa.

```

1 def menjava(indeks, n, t, opt_i, opt_j, opt_k):
2     novi_t = [t[m] for m in range(0, n+1)]
3     if indeks == 1:
4         novi_t[opt_i:opt_k] = novi_t[opt_i:opt_k][::-1]
5     if indeks == 2:
6         novi_t[opt_j:opt_k] = novi_t[opt_j:opt_k][::-1]
7     if indeks == 3:
8         novi_t[opt_i:opt_j] = novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
9     if indeks == 4:
10        novi_t[opt_i:opt_j] = novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
11        novi_t[opt_j:opt_k] = novi_t[opt_j:opt_k][::-1]
12    if indeks == 5:
13        tmp = novi_t[opt_j:opt_k][::-1] + novi_t[opt_i:opt_j]
14        novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
15    if indeks == 6:
16        tmp = novi_t[opt_j:opt_k] + novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
17        novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
18    if indeks == 7:
19        tmp = novi_t[opt_j:opt_k] + novi_t[opt_i:opt_j]
20        novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
21    return novi_t

```

#### 4. CELOŠTEVILSKI LINEARNI PROGRAM IN PRIMERJAVA Z GRASP

Problem potujočega trgovca lahko predstavimo kot *celoštevilski linearni program*. Označimo mesta s števili  $1, \dots, n$ . Strošek (ali razdalja) potovanja iz mesta  $i$  v mesto  $j$  je  $c_{i,j}$ , ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Minimiziramo strošek potovanja. Definiramo:

$$X_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{potnik gre iz mesta } i \text{ v mesto } j, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

$y_i$  ... katero po vrsti obiščemo mesto  $i$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} \cdot c_{i,j} \\
\text{p. p.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1, \text{ za vsak } j \\
& \sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1, \text{ za vsak } i \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\}, \text{ za vsak } i \text{ in vsak } j \\
& y_i \in \{1, \dots, n\}; \text{ za vsak } i \\
& y_i + 1 - n + n \cdot x_{i,j} \leq y_j; \text{ za vsak } i \text{ in vsak } j > 1
\end{aligned}$$

Problem potujočega trgovca se da v Pythonu elegantno zapisati kot celoštevilski linearni program s pomočjo knjižnice PuLP. PuLP za reševanje problema izbere enega od vgrajenih algoritmov. V našem primeru je PuLP za reševanje izbral PULP\_CBC\_CMD. S pomočjo knjižnice PuLP sva napisali funkcijo, ki sprejme matriko cen povezav, izpiše minimalno ceno potovanja in vrne urejen seznam obiskanih mest.

```

1 from pulp import *
2 def tsp_as_ilp(g):
3     razdalje = slovar_cen_ilp(g) # slovar razdalj
4     mesta = [x+1 for x in range(len(g))] # seznam mest (od 1 do n)
5     prob = LpProblem("salesman", LpMinimize) # definiramo problem
6     x = LpVariable.dicts('x', razdalje, 0, 1, LpBinary)
7     cena = lpSum([x[(i,j)]*razdalje[(i,j)] for (i,j) in razdalje])
8     prob += cena
9     for k in mesta: # pri pogojih:
10         prob += lpSum([ x[(i,k)] for i in mesta if (i,k) in x]) == 1
11         prob += lpSum([ x[(k,i)] for i in mesta if (k,i) in x]) == 1
12     u = LpVariable.dicts('u', mesta, 0, len(mesta)-1, LpInteger)
13     N = len(mesta)
14     for i in mesta:
15         for j in mesta:
16             if i != j and (i != 1 and j != 1) and (i,j) in x:
17                 prob += u[i] - u[j] <= (N)*(1-x[(i,j)]) - 1
18     prob.solve() # PuLP sam izbere metodo
19     sites_left = mesta.copy()
20     org = 1
21     potovanje = []
22     potovanje.append(sites_left.pop(sites_left.index(org)))
23     while len(sites_left) > 0:
24         for k in sites_left:
25             if x[(org,k)].varValue == 1:
26                 potovanje.append(sites_left.pop(sites_left.index(k)))
27                 org = k
28     potovanje.append(1)
29     print("Optimalna cena potovanja = ", value(prob.objective))
30     return potovanje

```



## 5. PRIMERJAVE

Za različne primerjave smo se osredotočili na pet grafov, vendar pa ne bomo povsod primerjali vseh. Poleg grafov skupine 7, ti so ulysses22, berlin52 in kroA100 smo si izbrali še swiss42 in st70. Vse smo dobili iz TSPLIB, kjer so zapisane tudi trenutne znane optimalne rešitve, ki jih bomo tekom naslednjega poglavja tudi primerjali. Ker pa so podatki za TSP podani v različnih oblikah, smo napisali še tri različne funkcije za uvoz. Za primerjavo GRASP in ILP pa smo sami generirali nekoliko manjše matrike. Te so simetrične s celoštevilskimi vrednostmi od 1 pa do maksimalne vrednosti, ki jo določimo sami.

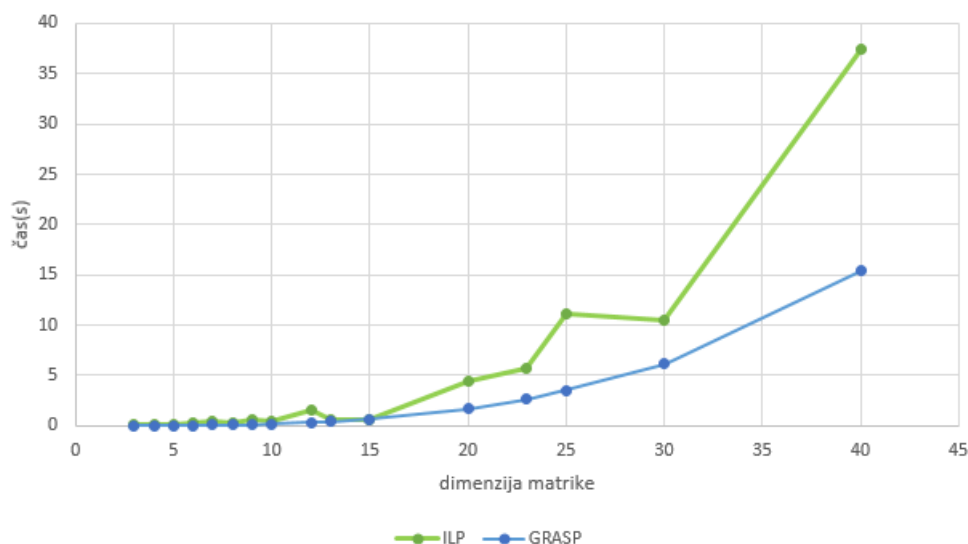
```
1 def TSP(N, max_pot, min_pot = 1):
2     " funkcija vrne naključno matriko cen povezav, ki predstavlja
   problem potujočega trgovca"
3     a = np.random.randint(min_pot, max_pot, size= (N,N))
4     m = np.tril(a) + np.tril(a, -1).T
5     for i in range(N):
6         m[i][i] = 0
7     return m
```

### 5.1. Primerjava ILP in GRASP.

Z merjenjem časa reševanja določenih primerov različnih velikosti ugotovimo, da napisana funkcija *ilp* porabi več časa za reševanje, kot metahevrstika *GRASP*.

SLIKA 1. Časovna primerjava ILP in GRASP

Čas izvajanja v odvisnosti od velikosti matrike



### 5.2. Primerjava parametra alpha.

Za primerjavo parametra alpha smo se osredotočili na štiri parametre in sicer 3, 5, 10 in 15. Parameter alpha nam določa velikost RCL (restricted client list) na začetku algoritma GRASP v sklopu greedy randomized construction. Torej če je alpha enak 5, bo algoritem skonstruiral 5 začetnih rešitev problema. Te bo nato local search izboljševal. Primerjavo smo naredili za obe metodi na 100 iteracijah,

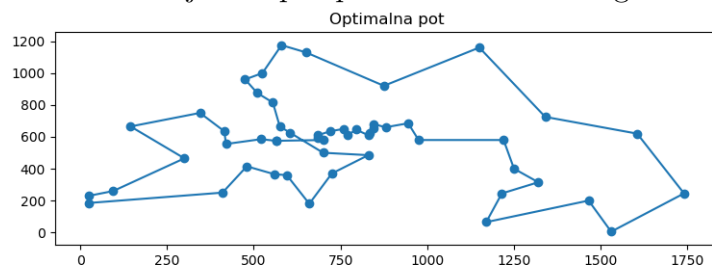
razen v zadnjem primeru na desetih, saj je bila matrika že prevelika. Prav tako smo naredili deset ponovitev algoritma. Če si najprej ogledamo najmanjši graf Ulysses22, lahko vidimo, da izbira parametra ne vpliva na rezultat, saj v vseh primerih vrne znan optimalni rezultat 1273. Pri malo večjem grafu Swiss42 že opazimo, da se rezultat oddaljuje od optimuma, večji kot je alpha. Vendar pa je pri 2-opt slabšanje očitno hitrejše. Pri 3-opt celo kljub slabšem rezultatu pri  $\alpha = 10$ , pri  $\alpha = 15$  vrne optimalen rezultat. Optimalen rezultat za Berlin52 je 7544, mi pa smo dobili 7616, kar je precej blizu. Se pa tu rezultat še hitreje poslabša z včanjem alpha. Spet pri 2-opt bolj kot pri 3-opt. Tudi pri St70 najboljši rezultat vrne 3-opt, zopet pri najmanjšem izbranem alpha. Za KroA100 so rezultati že močno oddaljeni od optimuma in vse bolj kot se povečuje alpha. Če zaključimo. Opazimo da razen v primeru zelo majhnih grafov

| TSP       |       | 3     | 5     | 10    | 15    | opt   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Ulysses22 |       |       |       |       |       | 7013  |
|           | 2-opt | 7013  | 7013  | 7013  | 7013  |       |
|           | 3-opt | 7013  | 7013  | 7013  | 7013  |       |
| Swiss42   |       |       |       |       |       | 1273  |
|           | 2-opt | 1273  | 1273  | 1420  | 1592  |       |
|           | 3-opt | 1273  | 1273  | 1316  | 1273  |       |
| Berlin52  |       |       |       |       |       | 7542  |
|           | 2-opt | 7716  | 8130  | 8629  | 10464 |       |
|           | 3-opt | 7616  | 7684  | 7735  | 8705  |       |
| St70      |       |       |       |       |       | 675   |
|           | 2-opt | 714   | 888   | 1211  | 1386  |       |
|           | 3-opt | 684   | 754   | 878   |       |       |
| KroA100   |       |       |       |       |       | 21282 |
|           | 2-opt | 37162 | 54119 | 74951 | 74462 |       |
|           | 3-opt |       |       |       |       |       |

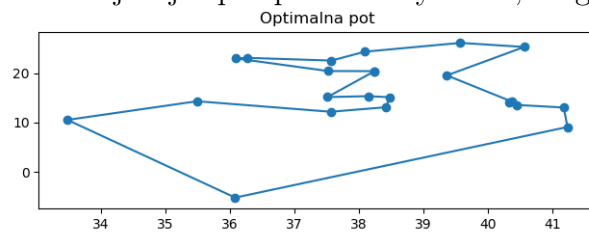
### 5.3. Primerjava s skupino 7.

|           | GRASP | GA    |
|-----------|-------|-------|
| Ulysses22 | 7013  | 7112  |
| Berlin52  | 7616  | 8737  |
| KroA100   | 21761 | 36408 |

SLIKA 2. Najkrajša pot primera berlin52 dolga 7692



SLIKA 3. Najkrajša pot primera ulysses22, dolga 7013



## 6. ZAKLJUČEK

blabla

## LITERATURA

- [1] Travelling salesman problem  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling\\_salesman\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem)