UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Katarina Brilej, Sara Kovačič

Uporaba metahevristike GRASP na problemu potujočega trgovca

Projekt OR pri predmetu Finančni praktikum

Mentor: prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2019

Kazalo

1. Uvod

Metahevristika je algoritemski način reševanja kombinatoričnega optimizacijskega problema, pri katerem na začetku izberemo množico kandidatov za rešitev, in jo iterativno izboljšujemo (glede na neko vnaprej izbrano funkcijo zaželenosti), ter po dovolj korakih vrnemo najboljši element iz te množice. Metahevristike torej vrnejo približne rešitve, a veliko hitreje kot eksaktni postopki. V projektu bova na problem potujočega trgovca implementirali metahevristiko GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*). Problem potujočega trgovca bova rešili tudi kot celoštevilski linearni program in primerjali rešitve. Generirali bova nekaj zanimivih grafov in na njih preizkusili algoritem. Rezultate bova primerjail tudi z rezultati iz spleta in rezultati skupine 7, ki bo na problem potujočega trgovca implementirala genetski algoritem.

2. Problem potujočega trgovca

Problem potujočega trgovca ("travelling salesman problem"/TSP) se glasi:

- **Formulacija v vsakdanjem jeziku:** danih je n mest in razdalja med poljubnim parom mest (od mesta do mesta lahko potujemo po zgolj eni poti). Najdi najkrajšo (najcenejšo) pot, ki se začne in konča v istem mestu ter obišče vsako mesto natanko enkrat.
- **Formulacija v matematičnem jeziku**: v (neusmerjenem enostavnem) polnem grafu K_n z uteženimi povezavami (pozitivne vrednosti) najdi najkrajši cikel, ki vsebuje vsa vozlišča. Ciklom, ki vsebujejo vsa vozlišča grafa, pravimo Hamiltonovi cikli.

3. Grasp

GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*) je metahevristika, ki sestoji iz dveh faz: *greedy randomized construction* in *local search*. V prvi fazi na pameten način (odvisno od problema) izberemo izmed vseh možnih rešitev CL (candidate list) množico začetnih približkov RCL (restricted candidates list). To storimo deloma deterministično in deloma stohastično, da zagotovimo, da so začetni približki obetavni, a dovolj razpršeni po celotni množici CL, da bo druga faza pregledala čimvečji del CL. V drugi fazi za vsako izmed teh rešitev $s \in RCL$ pregledamo elemente $s' \in CL$ v njeni okolici (kaj je okolica je od problema in načina reševanja odvisno). Če najdemo boljšo rešitev s', jo dodamo v RCL ter s odstranimo. To ponavljamo dokler zaustavitveni pogoj (npr. št. iteracij, zahtevana natančnost) ni izpolnjen.

3.1. **Greedy randomized construction.** Kot smo že omenili je GRASP sestavljen iz dveh delov. Najprej bomo predstavili tako imenovan greedy randomized construction. Tu parameter alpha predstavlja moč množice začetnih približkov (RCL), v našem primeru torej dolžino seznama RCL. Za vhodni podatek imamo tudi incidenčno matriko cen povezav velikosti $n \times n$. g je simetrična matrika, z ničlami po diagonali. Na začetku jo s pomočjo funkcije slovar_cen spremenimo v slovar, sestavljen iz elementov, ki imajo za ključ povezavo oblike $(x_i,\ x_j)$, za vrednost pa ceno/razdaljo, ki ji pripada. Vsak začetni približek $t = (l, 1, v_2, \ldots, v_n)$ iz RCL konstruiramo tako, da določimo $v_1 := 1$ nato iterativno za $i = 2, \ldots, n$ za v_i izberemo naključno med p % najbližjih vozlišč do v_{i-1}, ki še niso v t. Na koncu še izračunamo dolžino poti s prej definirano funkcijo dolzina_poti in jo postavimo na

ničto mesto. Take cikle t konstruiramo toliko časa, da RCL napolnimo. Če delamo z matrikami velikosti manj kot 5, moramo nastaviti tudi parameter *delez*, saj mora vrednost n // delez presegati število 1.

```
def greedy_construction(g, alpha, delez = 5):
    RCL = [0] * alpha
    slovar = slovar_cen(g)
    n = len(g)
    p = n // delez
    for j in range(0, alpha):
        t = [0] * (n+1)
        t[1] = 1
        mesta = [h for h in range(2,n+1)]
        for i in range(2,n+1):
            povezave = [(t[i-1],m) for m in mesta]
            cene = { key:value for key, value in slovar.items() if key
   in povezave }
            urejene_povezave = sorted(cene, key=cene.__getitem__)
            (_,vi) = random.choice(urejene_povezave[:p])
            t[i] = vi
            mesta.remove(vi)
        t[0] = dolzina_poti(g,t)
        RCL[j] = t
    return RCL
```

3.2. **Local search.** V tem delu se bomo posvetili drugemu delu algoritma imenovanemu local search. Obravnavali bomo dve metodi: 2opt in 3opt. Funkcija local_search zato poleg matrike g, parametra alpha in števila iteracij sprejme še parameter *metoda*. Na začetku definiramo RCL, ki predstavlja začetni seznam približkov. Te nato uredimo po dolžini, primerjamo jih po prvem elementu, ki predstavlja dolžino poti. Nato naključno izberemo t iz RCL, toda z linerano padajočo verjetnostjo. Najverjetneje izberemo cikel na vrhu RCL , torej najkrajši. Ko imamo izbran t, se na podlagi parametra *metoda* odločimo za 2opt ali 3opt. Obe metodi poizkušata približek izboljšati, če jima uspe, vrneta novi_t. Neodvisno od metode nato v primeru, da je izboljšava uspela, v RCL dodamo izboljšan približek in starega odstranimo. Kasneje si bomo ogledali še kako posamezna metoda deluje. Ponavljamo tolikokrat kot je predpisano, to nam določa parameter *iter*.

```
def local_search(g,k,iter,metoda):
    RCL = greedy_construction(g,k)
    n = len(g)
    slovar = slovar_cen(g)
    #urejen seznam zacetnih priblizkov
    RCL.sort(key=lambda x: x[0])
    stevec = 0
    while stevec < iter:
        utezi = [i * 2/((k+1)*k) for i in range(k,0,-1)]
        indeks = np.random.choice(len(RCL), size = 1, p = utezi)
        t = RCL[indeks[0]]
        if metoda == "dva_opt":
            novi_t = dva_opt(n,t,g)
```

```
        elif metoda == "tri_opt":
            novi_t = tri_opt(n,t,g)
        if novi_t:
            RCL.append(novi_t)
            RCL.remove(t)
        stevec += 1
        RCL.sort(key=lambda x: x[0])
    RCL.sort(key=lambda x: x[0])
    return RCL[0]
```

Sedaj si oglejmo kako delujeta posamezni metodi. Začnimo s preprostejšo, 2opt. Ko naključno izberemo cikel t, ga želimo izboljšati. Krajši cikel iščemo v okolici, ki je definirana kot množica vseh ciklov t' iz CL, ki jih dobimo iz t tako, da mu zamenjamo dve vozišči, torej naključno zamenjamo dve vozlišči t. Namesto, da bi shranjevali vse možne t' in na koncu preverili, če je najkrajši krajši od trenutnega t, je bolj učinkovito, če sproti preverjamo, če posamezna menjava prinese izboljšavo. Na začetku zato definiramo spremenljivko *razlika*, ta meri, če je dana menjava boljša. Nato moramo v zanki ločiti dva primera, saj v primeru, da je $j = n$, razdremo povezavo s prvim elementom. Nato izračunamo *change*, če je ta manjši od trenutne razlike, jo posodobimo, saj smo dobili krajši cikel. Shranimo si tudi optimalni i in j, da bomo na koncu vedeli s katero menjavo smo dosegli najkrajši cikel. Če smo uspeli izboljšati t, bo razlika negativna in dobili bomo novi_t. Tega konstruiramo tako, da na starem t izvedemo menjavo določeno z optimalnim i in j. Namesto, da znova računamo celotno dolžino cikla, samo prištejemo razliko, ki je nagativna.

```
def dva_opt(n,t,g):
    slovar = slovar_cen(g)
    razlika = 0
    for i in range(2,n):
        for j in range(i+1,n+1):
            if j != n:
                change = slovar[(t[i-1],t[j])] + slovar[(t[i],t[j+1])]
   - slovar[(t[i-1],t[i])] - slovar[(t[j],t[j+1])]
            else:
                change = slovar[(t[i-1],t[j])] + slovar[(t[i],t[1])] -
   slovar[(t[i-1],t[i])] - slovar[(t[j],t[1])]
            if change < razlika:
                razlika = change
                opt_i =  i
                opt_j = j
    if razlika < 0:
        novi_t = [t[m] for m in range(0,n+1)]
        novi_t[opt_i:opt_j+1] = novi_t[opt_i:opt_j+1][::-1]
        novi_t[0] = t[0] + razlika
        return novi_t
    else:
        return None
```

3opt je nekoliko bolj dodelana različica local searcha, zamenjamo namreč kar tri vozlišča. Tako kot 2opt sprejme velikost matrike, matriko in cikel t. Zaradi preglednosti na začetku definiramo spremenljivke X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2. Sedaj imamo 7 možnih menjav. Tri od teh so 2opt, štiri pa 3opt. Za vsako od možnih

menjav nato izračunamo razliko. Ker pri 3opt menjavah odstranimo enake povezave, lahko to shranimo pod spremenljivko *odstej*. Ko izračunamo vse razlike, poiščemo minimum, s tem ko si zabeležimo, pri katerem indeksu je bila minimalna razlika dosežena, bomo kasneje vedeli katero menjavo izvesti, saj so te urejene po vrsti v seznamu spremembe. Če je *change* manjša od trenutne razlike, pomeni, da lahko t izboljšamo. Posodobimo razliko, indeks in si zabeležimo optimalne i,j in k, ki jih bomo potem potrebovali, da izvedemo ustrezno menjavo. Torej če je na koncu razlika manjša kot 0, lahko zgradimo novi_t. Ta je odvisen od vrste menjave, ki jo moramo izvršiti, ta pa je določena z indeksom in optimalnimi i,j in k. Tako kot pri 2opt tudi tukaj novo dolžino cikla izračunamo tako, da prištejemo razliko.

```
1  def tri_opt(n, t, g):
2      slovar = slovar_cen(g)
3      razlika = 0
4      for i in range(2,n-1):
5          for j in range(i+1,n):
6              for k in range(j+1,n+1):
7                  X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2 = t[i-1], t[i], t[j-1], t[j], t[
       k-1], t[k]
8  # 2 opt moves
9                  change1 = slovar[(X1,Z1)] + slovar[(X2,Z2)] -  slovar[(
       X1,X2)] - slovar[(Z1,Z2)]
10                 change2 = slovar[(Y1, Z1)] + slovar[(Y2, Z2)] -  slovar
       [(Y1, Y2)] - slovar[(Z1, Z2)]
11                 change3 = slovar[(X1, Y1)] + slovar[(X2, Y2)] -  slovar
       [(X1, X2)] - slovar[(Y1, Y2)]
12 # 3 opt moves
13                 odstej = slovar[(X1, X2)] + slovar[(Y1, Y2)] + slovar[(
       Z1, Z2)]
14 # v vseh treh primerih odstranimo enake povezave
15                 change4 = slovar[(X1, Y1)] + slovar[(X2, Z1)] + slovar
       [(Y2, Z2)] -  odstej
16                 change5 = slovar[(X1, Z1)] + slovar[(Y2, X2)] + slovar
       [(Y1, Z2)] -  odstej
17                 change6 = slovar[(X1, Y2)] + slovar[(Z1, Y1)] + slovar
       [(X2, Z2)] -  odstej
18                 change7 = slovar[(X1, Y2)] + slovar[(Z1, X2)] + slovar
       [(Y1, Z2)] -  odstej
19 # izracunamo najmanjso vrednost razlike
20                 spremembe = [change1,change2, change3, change4, change5
       ,change6,change7]
21                 change = min(spremembe)
22                 ind = np.argmin(spremembe) + 1
23                 if change < razlika:
24                     razlika = change
25                     indeks = ind
26                     opt_i =  i
27                     opt_j = j
28                     opt_k = k
29     if razlika < 0:
30         novi_t = menjava(indeks,n,t,opt_i,opt_j,opt_k)
```

```
31          novi_t[0] = t[0] + razlika
32          return novi_t
33      else:
34          return None
```

V naslednji funkciji so opisane menjave, ki jih moramo narediti na trenutnem ciklu t, odvisne pa so od indeksa.

```
1  def menjava(indeks,n,t,opt_i,opt_j,opt_k):
2      novi_t = [t[m] for m in range(0,n+1)]
3      if indeks == 1:
4          novi_t[opt_i:opt_k] = novi_t[opt_i:opt_k][::-1]
5      if indeks == 2:
6          novi_t[opt_j:opt_k] = novi_t[opt_j:opt_k][::-1]
7      if indeks == 3:
8          novi_t[opt_i:opt_j] = novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
9      if indeks == 4:
10         novi_t[opt_i:opt_j] = novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
11         novi_t[opt_j:opt_k] = novi_t[opt_j:opt_k][::-1]
12     if indeks == 5:
13         tmp = novi_t[opt_j:opt_k][::-1] + novi_t[opt_i:opt_j]
14         novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
15     if indeks == 6:
16         tmp = novi_t[opt_j:opt_k] + novi_t[opt_i:opt_j][::-1]
17         novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
18     if indeks == 7:
19         tmp = novi_t[opt_j:opt_k] + novi_t[opt_i:opt_j]
20         novi_t[opt_i:opt_k] = tmp
21     return novi_t
```

4. Celoštevilski linearni program

Problem potujočega trgovca lahko predstavimo kot *celoštevilski linearni program.* Označimo mesta s števili $1, \ldots, n$. Strošek (ali razdalja) potovanja iz mesta i v mesto j je $c_{i,j}$, ($1 \leq i, j \leq n$). Minimiziramo strošek potovanja. Definiramo:

$$X_{i,j} := \begin{cases} 1\ ; & \text{potnik gre iz mesta } i \text{ v mesto } j, \\ 0\ ; & \text{sicer,} \end{cases}$$

y_i ... katero po vrsti obiščemo mesto i

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\cdot c_{i,j} \\
\text{p. p.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \text{ za vsak } j \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \text{ za vsak } i \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, \text{ za vsak } i \text{ in vsak } j \\
& y_i \in \{1,\ldots,n\}; \text{za vsak } i \\
& y_i + 1 - n + n\cdot x_{i,j} \leq y_j; \text{za vsak } i \text{ in vsak } j > 1
\end{aligned}
$$

Problem potujočega trgovca se da v Pythonu elegantno zapisati kot celoštevilski linearni program s pomočjo knjižnice PuLP. PuLP za reševanje problema izbere enega od vgrajenih algoritmov. V našem primeru je PuLP za reševanje izbral PULP_CBC_CMD. S pomočjo knjižnice PuLP sva napisali funckijo, ki sprejme matriko cen povezav, izpiše minimalno ceno potovanja in vrne urejen seznam obiskanih mest. V nadaljevanju je prikazan del funkcije *tsp_as_ilp*, v katerem definiramo problem in ga rešimo. Na repozitoriju se nahaja celotna funckija, ki vrne urejen seznam obiskanih mest.

```
from pulp import *
def tsp_as_ilp(g):
    razdalje = slovar_cen_ilp(g)   # slovar razdalj
    mesta = [x+1 for x in range(len(g))]  # seznam mest (od 1 do n)
    prob = LpProblem("salesman", LpMinimize) # definiramo problem
    x = LpVariable.dicts('x', razdalje, 0,1, LpBinary)
    cena = lpSum([x[(i,j)]*razdalje[(i,j)] for (i,j) in razdalje])
    prob += cena
    for k in mesta:  # pri pogojih:
        prob += lpSum([ x[(i,k)] for i in mesta if (i,k) in x]) == 1
        prob += lpSum([ x[(k,i)] for i in mesta if (k,i) in x]) == 1
    u = LpVariable.dicts('u', mesta, 0, len(mesta)-1, LpInteger)
    N = len(mesta)
    for i in mesta:
        for j in mesta:
            if i != j and (i != 1 and j!= 1) and (i,j) in x:
                prob += u[i] - u[j] <= (N)*(1-x[(i,j)]) - 1
    prob.solve() # PuLP sam izbere metodo
    print("Optimalna cena potovanja = ", value(prob.objective))
```

5. Primerjave

Za različne primerjave sva se osredotočili na pet grafov, vendar pa ne bova povsod primerjali vseh. Poleg grafov skupine 7, ti so ulysses22, berlin52 in kroA100 sva si izbrali še swiss42 in st70. Vse sva dobili iz TSPLIB, kjer so zapisane tudi trenutne znane optimalne rešitve, ki jih bova tekom naslednjega poglavja tudi primerjali. Ker pa so podatki za TSP podani v različnih oblikah, sva napisali še tri različne funkcije za uvoz. Za primerjavo GRASP in ILP pa sva sami generirali nekoliko

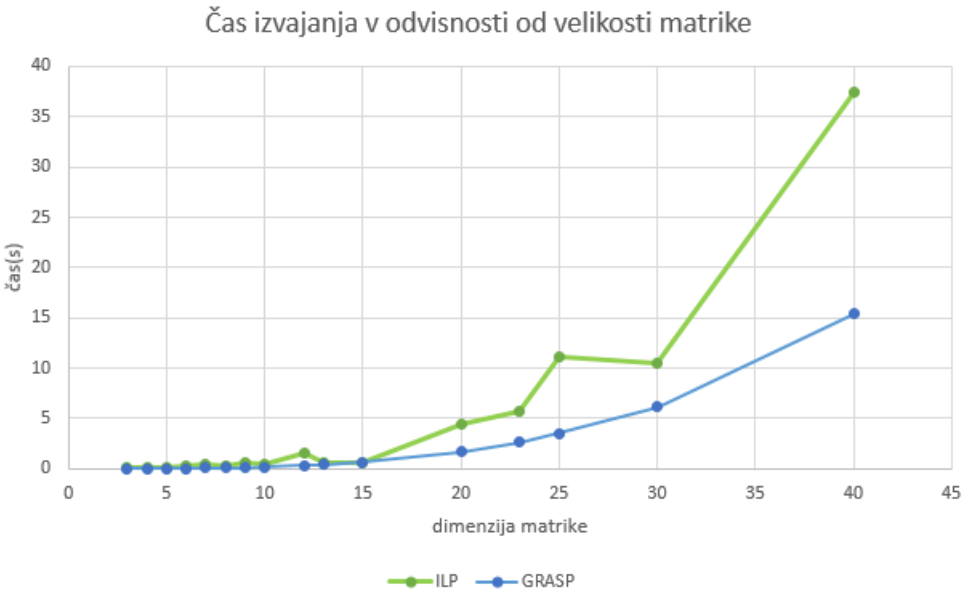
manjše matrike. Te so simetrične s celoštevilskimi vrednostmi od 1 pa do maximalne vrednosti, ki jo določimo sami.

```
def TSP(N, max_pot, min_pot = 1):
    " funkcija vrne nakljucno matriko cen povezav, ki predstavlja
    problem potujocega trgovca"
    a = np.random.randint(min_pot, max_pot, size= (N,N))
    m = np.tril(a) + np.tril(a, -1).T
    for i in range(N):
        m[i][i] = 0
    return m
```

5.1. **Primerjava ILP in GRASP.**

Z merjenjem časa reševanja določenih primerov različnih velikosti ugotovimo, da napisana funkcija *ilp* porabi več časa za reševanje, kot metahevristika *GRASP*. Za potrebe primerjave, sva za parametre pri *GRASP* vzeli alpha=3, število iteracij=100 in metodo 3*opt*. V nadaljevanju bomo ugotovili, da na čas izvajanja local_search-a vplivata tudi število iteracij in predvsem metoda, zato časovna primerjava funkcij *tsp_as_ilp* in *GRASP* ni najbolj točna. Ker za majhne grafe *GRASP* tudi pri 100 iteracijah vrne pravilno (optimalno) rešitev, lahko vseeno sklepamo, da deluje hitreje kot *tsp_as_ilp*.

Slika 1. Časovna primerjava ILP in GRASP



5.2. **Primerjava parametra alpha.**

Za primerjavo parametra alpha sva se osredotočili na štiri parametre in sicer 3, 5, 10 in 15. Parameter alpha nam določa velikost RCL (restricted client list) na žacetku algoritma GRASP v sklopu greedy randomized construction. Torej če je alpha enak 5, bo algoritem skonstruiral 5 začetnih rešitev problema. Te bo nato local search izboljševal. Primerjavo sva naredili za obe metodi na 100 iteracijah, razen v zadnjem primeru na desetih, saj je bila matrika že prevelika. Prav tako sva naredili deset ponovitev algoritma. Če si najprej ogledamo najmanjši graf Ulysses22, lahko vidimo,

da izbira parametra ne vpliva na rezultat, saj v vseh primerih vrne znan optimalni rezultat 1273. Pri malo večjem grafu Swiss42 že opazimo, da se rezultat oddaljuje od optimuma, večji kot je alpha. Vendar pa je pri 2-opt slabšanje očitno hitrejše. Pri 3-opt celo kljub slabšem rezultatu pri alpha = 10, pri alpha = 15 vrne optimalen rezultat. Optimalen rezultat za Berlin52 je 7544, mi pa smo dobili 7616, kar je precej blizu. Se pa tu rezultat še hitreje poslabša z večanjem alpha. Spet pri 2-opt bolj kot pri 3-opt. Tudi pri St70 najboljši rezultat vrne 3-opt, zopet pri najmanjšem izbranem alpha. Za KroA100 so rezultati že močno oddaljeni od optimuma vse bolj kot se povečuje alpha. Če zaključimo. Opazimo, da razen v primeru zelo majnih grafov, z uporabo manjšega alpha (npr. 3), dobimo boljši rezultat.

TSP		3	5	10	15	opt
Ulysses22						7013
	2-opt	7013	7013	7013	7013	
	3-opt	7013	7013	7013	7013	
Swiss42						1273
	2-opt	1273	1273	1420	1592	
	3-opt	1273	1273	1316	1273	
Berlin52						7542
	2-opt	7716	8130	8629	10464	
	3-opt	7616	7684	7735	8705	
St70						675
	2-opt	714	888	1211	1386	
	3-opt	684	754	878	941	
KroA100						21282
	2-opt	37162	54119	74951	74462	
	3-opt	22917	26938	41953	46026	

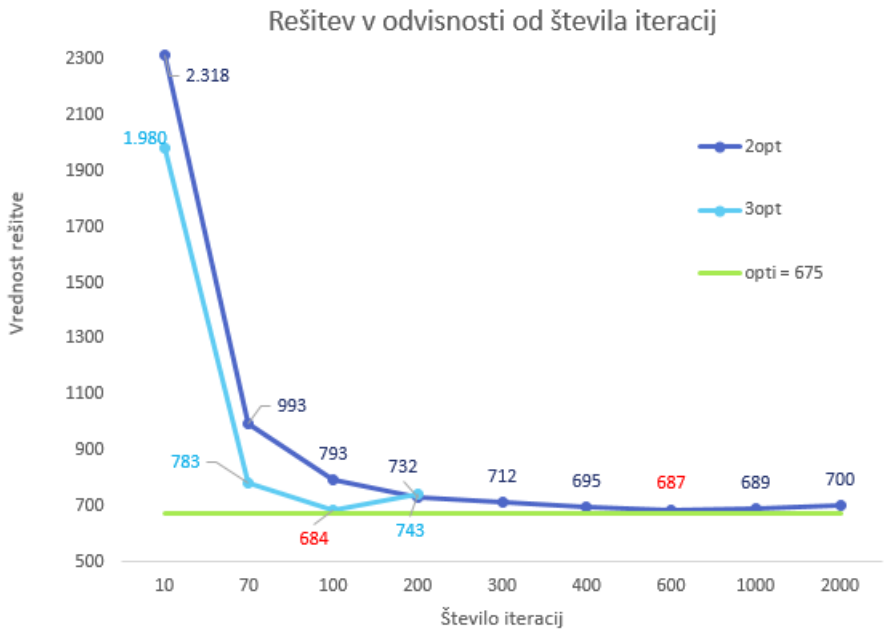
Primerjava parametra alpha še za iter = 1000.

TSP		3	5	10	15	30	opt
Swiss42							1273
	opt-2	1273	1273	1273	1273	1273	
Berlin52							7542
	opt-2	7544	7544	7544	7544	7560	
St70							675
	opt-2	678	685	678	682	685	
KroA100							21282
	opt-2	21381	21709	21642	22009	24275	

5.3. **Primerjava glede na število iteracij.**

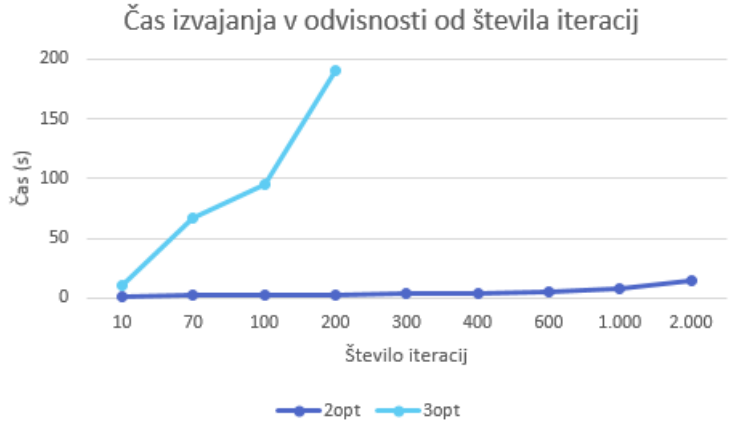
Pri določanju parametrov algoritma ima pomembno vlogo tudi število iteracij. Odvisnost vrednosti rešitve od števila iteracij sva preizkusili na primeru St70 (velikosti 70). Iz prejšnjega podpoglavja ugotovimo, da je za ta primer najboljši parameter alpha = 3. Zaradi velike časovne zahtevnosti metode 3opt, sva za ta primer naredili le 200 iteracij. Ugotovimo, da se vrednost rešitve izboljšuje z večanjem iteracij. Metoda 3opt je pri preizkušanju dosegla najboljši rezultat (684) že pri 100 iteracijah. Podobno rešitev pri metodi 2opt dobimo še le pri 600 iteracijah.

Slika 2. Odvisnost rešitve od števila iteracij



Zaradi manjše časovne zahtevnosti metode 2opt, lahko pri izvajanju GRASP-a uporabimo več iteracij kot pri metodi 3opt. Metoda 3opt uporabi $\mathcal{O}(n^3)$ operacij, 2opt pa ima kvadratično časovno zahtevnost oz. $\mathcal{O}(n^2)$.

Slika 3. Odvisnost časa izvajanja od števila iteracij



5.4. **Primerjava s skupino 7.**

	GRASP	GA
Ulysses22	7013	7112
Berlin52	7544	8737
KroA100	21381	36408

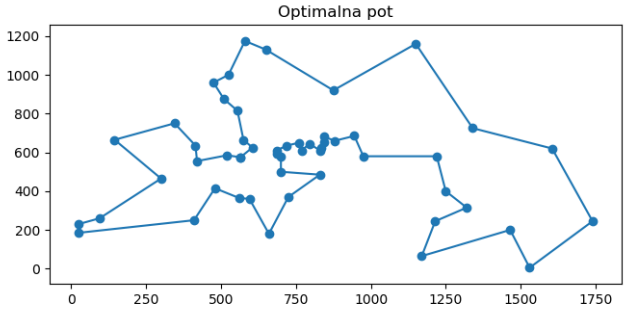
Skupina 7 je na problem potujočega trgovca implementirala Genetski Algoritem (GA). V njihovem poročilu sva poiskali najboljše rezultate posameznega grafa in jih

zapisali v tabelo. Iz tabele razberemo, da se je algoritem GRASP odrezal bolje od genetskega algoritma. Tudi iz vira [6] razberemo, da je genetski algoritem sicer natančnejši, vendar se na primerih iz prakse pokaže, da natančnost ni tako pomembna, in zato GRASP deluje bolje od GA.

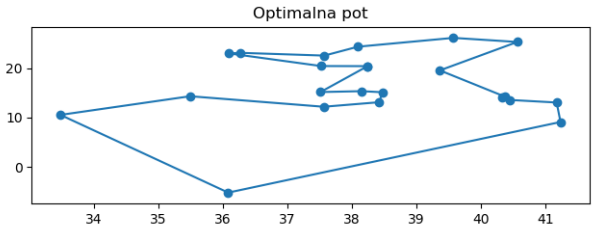
5.5. **Vizualizacija.**

Za boljšo predstavo sva napisali še dve funkciji, ki narišeta podano omrežje in rešitev na njem. Če imamo podane koordinate, funkcija *narisi* nariše točke kot koordinate v 2D in jih poveže glede na dano rešitev.

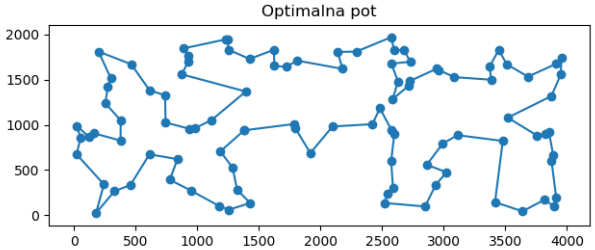
Slika 4. Najkraša pot primera berlin52 dolga 7544



Slika 5. Najkrajša pot primera ulysses22, dolga 7013

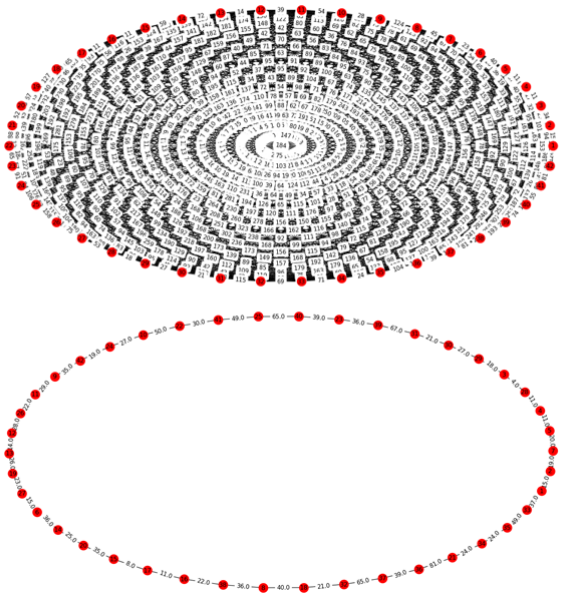


Slika 6. Najkrajša pot primera kroA100, dolga 21381



Če pa koordinat nimamo podanih, pa funckija $narisigraf(matrika)$ sprejme matriko uteži povezav in nariše usmerjen graf z utežmi na povezavah. Napisali sva še funkcijo, ki rešitev algoritma GRASP spremeni v matriko, tako da še lahko narišemo rešitev. Opomba: pri velikih grafih je risanje vseh povezav nesmiselno, zato te funkcije nisva izboljševali.

Slika 7. Poln graf in primer rešitve za swiss42



6. Zaključek

Problem potujočega trgovca je NP-težak problem v kombinatorični optimizaciji, ki je pomemben v operacijskih raziskavah in računalniških znanostih. Problem je bil prvič oblikovan leta 1930 in je eden izmed najbolj intenzivno proučevanih problemov optimizacije. Na problem sva implementirali metahevristiko GRASP, ki sestoji iz dveh faz (Greedy randomized construction in Local search). V Local search-u sva obravnavali metodi 2opt in 3 opt, kjer je glavna razlika to, da pri 2opt zamenjamo dve vozlišči, pri 3opt pa tri. Metoda 3opt vsebuje tri for zanke, zato je njena časovna zahtevnost kar $\mathcal{O}(n^3)$. Vsak 3-opt premik je bodisi enak 2-opt premiku ali je enak zaporedju dveh ali treh 2-opt potez. Čeprav je 3-opt bolj zapleten in počasnejši, se uporablja, ker je možno, da obstaja zaporedje 2-opt premikov, ki izboljšajo pot vendar se začne z 2-opt premikom, ki poveča dolžino poti, zaradi česar to zaporedje premikov ne bo izvedeno. V Pythonu lahko problem potujočega trgovca zapišemo kot celoštevilski linearni program (ILP) s pomočjo knjižnice PULP, ki za reševanje problema izbere enega od vgrajenih algoritmov. Z merjenjem časa izvajanja funkcij, sva ugotovili, da GRASP (100 iteracij, metoda 3opt) deluje hitreje kot ILP. Primerjave različnih parametrov metode GRASP sva izvedli na grafih ulysses22, berllin52, kroA100, swiss42 in st70. Najprej sva primerjali parameter alpha, ki določa koliko različnih začetnih rešitev problema bo skonstruiral algoritem. Na rešitve manjših grafov parameter alpha ni vplival, pri večjih grafih pa je manjši alpha pomenil boljšo rešitev. Zato sva v nadaljevanju uporabljali vrednost alpha = 3. Vrednost rešitve se izboljšuje z večanjem števila iteracij, vendar se s tem veča tudi časovna zahtevnost. Metoda 3opt je na primeru st70 za 200 iteracij potrebovala že skoraj 200 sekund, vendar je že pri 100 iteracijah vrnila boljši rezultat kot 2opt pri 1000 ali 2000. Metoda 2opt tudi za 2000 iteracij potrebuje manj kot 30 sekund. Rezultate algoritma GRASP sva na primerih ulysses22, berlin52 in kroA100 primerjali tudi s skupino 7, ki je izvajala Genetski algoritem (GA). Ugotovili sva, da so se najinim rezultatom najbolje približali pri najmanjšem grafu ulysses22, kjer GRASP zelo hitro vrne kar

optimalno rešitev (7013). Pri grafu velikosti 100 (KroA100), pa je GRASP deloval veliko bolje, saj se je od znane optimalne rešitve (21282) razlikoval za 99, rešitev genetskega algoritma pa se je od te rešitve razlikovala za kar 15126. Ugotovimo, da je algoritem zaradi svoje enostavnosti na splošno zelo hiter in je zmožen producirati kar dobre rezultate v kratkem času.

Literatura

[1] Travelling salesman problem
http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

[2] C. Blum, A. Roli, Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison, online.
https://www.iiia.csic.es/ christian.blum/downloads/blum_roli_2003.pdf

[3] S. Luke, Essentials of Metaheuristics: a set of undergraduate lecture notes, online.
https://cs.gmu.edu/ sean/book/metaheuristics/Essentials.pdf

[4] TSP Basics
https://tsp-basics.blogspot.com/2017/03/

[5] R. Škrekovski, Zbornik seminarjev iz hevristik [Elektronski vir]: izbrana poglavja iz optimizacijskih metod (2010-11) / Riste Škrekovski, Vida Vukašinovič - El. knjiga. - Ljubljana: samozal. R. Škrekovski, 2012.
https://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Gradiva/Zbornik_Hevristike.pdf

[6] B. Bernai, S. Deleplanque, A. Quilliot, Routing on Dynamic Networks: GRASP versus Genetic.
https://annals-csis.org/Volume_2/pliks/52.pdff