XIX konferencija polaznika Istraživačke stanice Petnica "Korak u nauku"

Problem izlaska iz šume

Katarina Krivokuća, katarinakrivokuca@outlook.com, MATF Beograd
Dimitrije Glukčević, dimchee90@gmail.com, Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
mentor: Bojan Bašić, PMF Novi Sad

Problem

Postavka problema: Izgubili ste se sa prijateljima u n-dimenzionoj šumi. Sve što znate su oblik i dimenzije šume. Kako najbrže neko od vas može da izađe po pomoć?

Koje šume mi posmatramo?

- traka
- k-traka
- šume čiji je konveksni omotač trougao

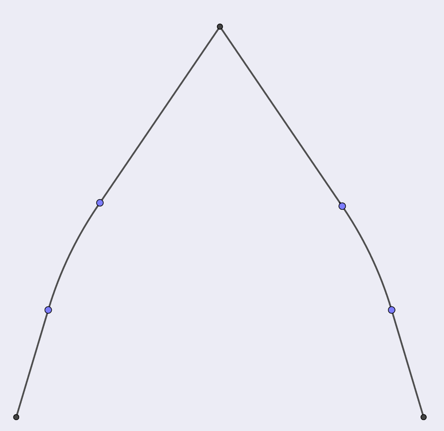
Bavili smo se i našim uopštenjem problema:

- Put za k ljudi je skup od k puteva koji kreću iz iste tačke.
- Dužina puta za k ljudi je suma dužina pojedinačnih puteva.
- Za put P_k za k ljudi kažemo da je izlazan put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od n puteva iz skupa izlazi iz F.

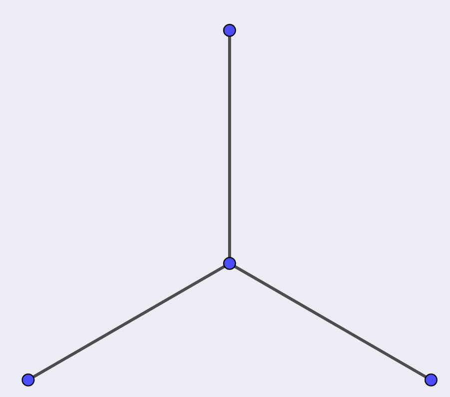
Zašto je bolje ići sa prijateljima?

U slučaju trake u ravni je dokazano da je najkraći izlazni put za jednog čoveka Zalgalerova kriva, koja je dužine oko 2.278291644.

Bolje je ići sa prijateljima jer je posmatrani put za tri čoveka dužine 2, a izlazan je iz ove šume!



Zalgalerova kriva



Put za tri osobe

Rezultati - k-trake

Šta ako drugačije uopštimo trake u višim dimenzijama?

Definicija. *Definišimo **k-traku u n dimenzija** za svako prirodno n i za svako $1 \leqslant k \leqslant n-1$ kao šumu odredjenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog potprostora $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 5. *Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Rezultati - donje ograničenje

Gomi je pokazao gornje organičenje za dužinu puta širine 1. On nas je inspirisao da uradimo slično za naše uopštenje sa n ljudi.

Teorema 1. *Neka je dužina najkraćeg izlaznog puta jedinične širine za $k \geqslant 2$ ljudi iz trake u $n \geqslant 2$ dimenzija S_k. Tada važi:*

$$S_k \geqslant \frac{k}{2k-2} \cdot \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

Hipoteza. *Kako naše konstrukcijski dobijena rešenja imaju ceo "red veličine" veću dužinu nego data donja ograničenja pretpostavljamo da je moguće pooštriti ove ocene.*

Rezultati - trake u $\mathbb{R}^n$

Ideja je bila pronaći neki, što „manji" objekat koji ne možemo da smestimo u traku u $\mathbb{R}^n$

Teorema 2. *Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice*

$$\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}$$

tako da ga ni jedna od ove dve hiperravni ne seče.

Dalje smo tražili što kraću šetnju po ovom objektu

Teorema 3. *Put koji formiraju po trojkama nekoplanarne ivice n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil \cdot (n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}.$$

Teorema 4. *Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil \cdot (n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}$$

.

Dalji rad

Posmatranjem objekata poput zarubljenih simpleksa, moguće je još poboljšati predstavljene rezultate. Recimo za 3 dimenzije.

Takođe prirodno je postaviti i sledeće pitanje: "Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Koliko optimalno treba da ih bude, i koliki put moraju da pređu, tako da znaju da će izaći iz šume?"

Hipoteza. *Ako je za n-to dimenzionu šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, tada je:*

$$S(F) = \lim_{n\to\infty} S_n(F) = L_{n,n+1}$$