XIX konferencija polaznika Istraživačke stanice Petnica "Korak u nauku"

Problem izlaska iz šume

Katarina Krivokuća, katarinakrivokuca@outlook.com, MATF Beograd
Dimitrije Glukčević, dimchee90@gmail.com, Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
mentor: Bojan Bašić, PMF Novi Sad

Problem

Definicija: Izgubili ste se sa prijateljima u n-dimenzionoj šumi. Sve što znate su oblik i dimenzije šume. Kako najbrže neko od vas može da izađe po pomoć?

Koje šume mi posmatramo?

- traka
- k-traka
- šume čiji je konveksni omotač trougao

Rezultati - trake u $\mathbb{R}^n$

Ideja je bila pronaći neki, što "manji" objekat koji ne možemo da smestimo u traku u $\mathbb{R}^n$

Teorema 1. *Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice*

$$\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$$

tako da ga ni jedna od ove dve hiperravni ne seče.

Dalje smo tražili što kraću šetnju po ovom objektu

Teorema 2. *Put koji formiraju po trojkama nekoplanarne ivice n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,1}=n\cdot\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}.$$

Teorema 3. *Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,n+1}=\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}$$

.

Zašto je bolje ići sa prijateljima?

Bavili smo se i našim uopštenjem problema:

- Put za n ljudi je skup k puteva koji kreću iz iste tačke.
- Dužina puta za n ljudi je suma dužina pojedinačnih puteva.
- Za put za k ljudi P_n kažemo da je izlazan put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od n puteva iz skupa izlazi iz F.

Rezultati - k-trake

Šta ako drugačije uopštimo trake u višim dimenzijama?

Definicija. *Definišimo **k-traku u n dimenzija** za svako prirodno n i za svako $1\leqslant k\leqslant n-1$ kao šumu odredjenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog potprostora $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4. *Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Rezultati - donje ograničenje

Gomi je pokazao gornje organičenje za dužinu puta širine 1. On nas je inspirisao da uradimo slično za naše uopštenje sa n ljudi.

Teorema 5. *Neka je dužina najkraćeg izlaznog puta jedinične širine za $k\geqslant 2$ ljudi iz trake u $n\geqslant 2$ dimenzija S_k. Tada važi:*

$$S_k\geqslant\frac{k}{2k-2}\cdot\sqrt{2.2782^2+9(n-2)}$$

Hipoteza. *Kako naše konstrukcijski dobijena rešenja imaju ceo "red veličine" veću dužinu nego data donja ograničenja pretpostavljamo da je moguće pooštritii ove ocene.*

Dalji rad

Posmatranjem objekata poput zarubljenih simpleksa, moguće je još poboljšati predstavljene rezultate. Recimo za 3 dimenzije:

Takođe prirodno je postaviti i sledeće pitanje: "Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Koliko optimalno treba da ih bude, i koliki put moraju da pređu, tako da znaju da će izaći iz šume?"

Hipoteza. *Ako je za n-to dimenzionu šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, tada je:*

$$S(F)=\lim_{n\to\infty}S_n(F)=L_{n,n+1}$$