Problem izlaska iz šume

Katarina Krivokuća
Matematička gimnazija, Beograd, Srbija
e-mail: katarinakrivokuca@outlook.com

Dimitrije Glukčević
Gimnazija ,,Svetozar Marković", Niš, Srbija
e-mail: dimchee90@gmail.com

October 12, 2019

Apstrakt

Belmanov problem traženja najkraćeg izlaznog puta iz šume poznatog oblika je rešen za mali broj šuma. Jedan od rešenih slučajeva je i traka ograničena sa dve paralelne prave na udaljenosti 1. Tačnije, još Zalgaler je pronašao najkraći put širine 1, dok je precizan dokaz optimalnosti ovog rešenja pronađen dosta kasnije. Takođe su istraživani i najkraći putevi širine 1 u višim dimenzijama. Gomi je pooštrio gornje ograničenje za dužinu takvog puta u $\mathbb{R}^3$ i pronašao donje ograničenje u $\mathbb{R}^n$. U ovom radu ćemo predstaviti gornje ograničenje za dužinu ovakvog puta u $\mathbb{R}^n$, kao i jednu modifikaciju Belmanovog problema u kojoj više ljudi kreće iz iste tačke te se posmatra skup puteva sa zajedničkim početkom. Dalje je pokazano jedno gornje ograničenje za dužinu najkraćeg puta širine 1 u $\mathbb{R}^n$, kao i jedno gornje ograničenje pri posmatranoj modifikaciji. Dosadašnji rad i intuicija ukazuju na to da je pri posmatranoj modifikaciji u $\mathbb{R}^n$ put za $n+1$ ljudi pokazan u ovom radu najkraći modifikovani put širine 1.

1 Uvod

1.1 Originalni problem

Originalni problem "Izgubljeni u šumi" je postavio Belman 1956. i on je glasio:

"Koji je najkraći put kojim čovek izgubljen u šumi poznatog oblika i dimenzija treba da ide tako da posle tog puta zna da će sigurno izaći iz nje?"

Formalnije, problem se definiše kao "Koji je najkraći izlazni put iz šume?", ako smo šumu i izlazni put definisali kao:

Definicija 1.1 *Šuma je zatvoren, konveksan planaran skup.*

Definicija 1.2 *Put je neprekidan i rektifiabilna planarna kriva.*

Definicija 1.3 *Za put P kažemo da je izlazni put iz šume F ako se put P ne može postaviti unutar šume P bez presecanja njenog ruba.*

1.2 Neki poznati rezultati

Rešenje ovog problema je poznato za mali broj šuma. Da bi se definisale neke klase šuma za koje je problem rešen, potrebne su sledeće definicije:

Definicija 1.4 *Za ograničenu šumu, dijametar se definiše kao najveća udaljenost između neke dve tačke šume.*

Definicija 1.5 *Širina puta je najmanja udaljenost između neke dve paralelne prave takve da se taj put nalazi između njih.*

Tri klase šuma za koje je problem rešen su:

1. **"Debele" šume** iz kojih je najbolji izlazni put oblika duži. Šuma je "debela" ako je ograničena i pokriva neki romb sa uglom od $60°$ i velikom dijagonalom dužine svog dijametra.
   Neki primeri "debelih" šuma su kružnica i svi pravilni mnogouglovi sa više od 3 stranice.

2. **"Tanke" šume** iz kojih je najbolji izlazni put oblika Zalgalerove putanje, koja je najkraća putanja širine 1. Šuma je "tanka" ako se u nju može upisati Zalgalerov pravougaonik, tako da njegove duže stranice leže na rubu posmatrane šume. Zalgalerov pravougaonik je pravougaonik čija je kraća stranica 1, a duža dužine Zalgalerove putanje.
   Najpoznatiji primer "tanke" šume je šuma koju obrazuju dve paralelne prave na udaljenosti 1.

3. **Neki jednakokraki trouglovi** iz kojih je najbolji izlazni put Besikovičeva "Z" kriva.

1.3 Uopštenje problema

Prvo, uopštimo ovaj problem na višedimenzione prostore. Za to je samo potrebno predefinisati šumu i put tako da više ne "žive" u $\mathbb{R}^2$, već u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6 *n-dimenziona šuma je zatvoren, konveksan skup u $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 1.7 *n-dimenzioni put je neprekidan i rektifiabilan luk u $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 1.8 *Za n-dimenzioni put kažemo da je izlazan iz n-dimenzione šume ako ne može biti postavljen unutar nje bez presecanja njenog ruba.*

Definicija 1.9 *Širina n-dimenzionog puta je najmanja udaljenost između dve paralelne hiperravni takve da se taj put nalazi između njih.*

Drugo uopštenje koje će biti posmatrano u ovom radu je problem više ljudi unutar šume. U kontekstu originalnog problema, pitanje bi bilo postavljeno kao:

"Grupa od n ljudi je zajedno izgubljena unutar šume poznatog oblika i dimenzija. Koja je najmanja suma dužina puteva koje oni moraju da pređu tako da znaju da će barem jedan od njih izaći iz šume?"

Formalno, to bi se definisalo kao:

Definicija 1.10 *Put za n ljudi je skup k puteva koji kreću iz iste tačke.*

Definicija 1.11 *Dužina puta za n ljudi je suma dužina pojedinačnih puteva.*

Definicija 1.12 *Za put za k ljudi P_n kažemo da je izlazan put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od n puteva iz skupa izlazi iz F.*

Na primer, iz šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve prave na udaljenosti 1 je za jednu osobu najkraći izlazni put Zalgalerova putanja, koja je dužine oko 2.278291644, a za tri čoveka je jedan od izlaznih puteva čine tri duži dužine $\frac{2}{3}$ pod uglovima od $120°$. Ovaj izlazni put za 3 osobe ima dužinu 2, te je kraći od Zalgalerove krive.

Prirodno se postavlja sledeće pitanje:

"Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Koliko optimalno treba da ih bude, i koliki put moraju da pređu, tako da znaju da će izaći iz šume?"

Formalnije, ako je za šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, traži se:

$$S(F) = \lim_{n\to\infty} S_n(F)$$

Ovaj limes je definisan jer je niz $S_n(F)$ nerastući, jer u izlaznom putu za $k+1$ ljudi, jedan čovek može da stoji i stoga $S_{k+1}(F) \leqslant S_k(F)$. Ovaj niz je takođe ograničen odozdo nulom jer označava sumu nekih dužina, te ovaj limes mora da postoji.

2 Traka u n dimenzija

Slično problemu šume oblika beskonačne trake, posmatraćemo šume u $\mathbb{R}^n$ ograničene sa dve paralelne hiperravni na rastojanju 1. Ovako definisanu šumu u $\mathbb{R}^n$ zovimo **trakom u** n **dimenzija** i označimo je sa T_n.

Šume ovog oblika su već posmatrane u kontekstu ispitivanja širina putanja, pošto važi ekvivalencija između toga da n-dimenzioni put ima širinu barem jedan i da je izlazna za šumu T_n. Gomi je 2018. pokazao da važhi:

Teorema 2.1 (Gomi) *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifiabilan luk i neka je L njena dužina i ω njena širina. Tada važi:*

$$\frac{L}{\omega} \geqslant \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

Stoga, donje ograničenje dužine izlaznog puta iz T_n je $\sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$.

Zalgaler je konstruisao put u $\mathbb{R}^3$ jedinične širine i dužine ne veće od 3.9215, što je blizu ograničenja 3.7669 dobijenog Teoremom 2.1.

Predlog 2.2 $S(T_n) = S_{n+1}(T_n) = \sqrt{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right)}$.

Intuicija iza postavljanja ovog predloga je to što se na primerima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ispostavlja da je put posmatran dalje u ovom poglavlju sa 3, odnosno 4 osobe kraći od najkraćeg mogućeg puta za jednog čoveka. Takođe, konveksni omotač posmatranih puteva je simpleks u odgovarajućoj dimenziji, što je telo sa najmanje temena koje "živi" u posmatranom prostoru i posmatrani put iz centra simpleksa smatramo da će se ispostaviti za najkraći put čiji je ovo konveksni omotač, ma koliko ljudi da ga obrazuje.

2.1 Minimalan simpleks

Sledeće tvrđenje daje gornje ograničenje za najmanje dimenzije pravilnog n-simpleksa koji se ne može postaviti unutar trake u n dimenzija. Iz njega sledi gornje ograničenje za izlaznu putanju iz ovakve šume u $\mathbb{R}^n$ za jednog čoveka, kao i gornje ograničenje tog puta za $n+1$ ljudi.

Tvrđenje 2.3 *Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ tako da ga ni jedna od ove dve hiperravni ne seče.*

Dokaz. Posmatrajmo u $\mathbb{R}^{n+1}$ simpleks određen temenima:

$$A_1 = (0,0,0,...,0,0)$$

$$A_2 = (-1,1,0,...,0,0)$$

$$...$$

$$A_{n+1} = (-1,0,0,...,0,1)$$

Ovaj simpleks, iako je definisan u $\mathbb{R}^{n+1}$ ima n dimenzija, tj. pripada potprostoru $\mathbb{R}^n$.

Pošto želimo da nađemo maksimalan n-simpleks koji možemo postaviti unutar trake u n dimenzija, to je ekvivalentno tome da za fiksan n-simpleks nađemo minimalnu udaljenost između dva paralelna potprostora dimenzije $n-1$ takvih da kako god da simpleks stoji između njih, neka od njih sigurno seče posmatrani simpleks.

Posmatrajmo neki $(n-1)$-dimenzioni potprostor koji sadrži teme A_1 i pripada potprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, takav da su tačke $A_2, A_3, ..., A_{n+1}$ sa iste strane ovog potprostora. Neka je $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ jedinični vektor normalan na ovaj potprostor. Za njega takođe važi da pripada potprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, te za njega važi da je linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$.

$$\lambda_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{A_1A_3} + ... + \lambda_{n+1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \overrightarrow{x}$$

Iz ovoga sledi da važi sistem jednačina:

$$-\lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_{n+1} = x_1$$

$$\lambda_2 = x_2$$

$$\lambda_3 = x_3$$

$$...$$

$$\lambda_{n+1} = x_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = 0$$

Takođe, pošto je $\vec{x}$ jediničan vektor normalan na posmatrani $(n-1)$-dimenzioni potprostor, za svako $i \in 2, 3, ..., n+1$, skalarni proizvod $\overrightarrow{A_1 A_i} \cdot \vec{x}$ predstavlja rastojanje između temena A_i i posmatranog $(n-1)$-dimenzionog potprostora. Neka su ova rastojanja redom $l_2, l_3, ..., l_{n+1}$.

$$l_2 = (-1, 1, 0, ..., 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}) = x_2 - x_1$$

$$l_3 = x_3 - x_1$$

$$...$$

$$l_{n+1} = x_{n+1} - x_1$$

Pošto su $A_2, A_3, ..., A_{n+1}$ sa iste strane potprostora na koji je normalan vektor $\vec{x}$, ovi skalarni proizvodi su svi istog znaka. Bez umanjenja opštosti, recimo da su nenegativni. Predstavimo $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ u funkciji od $l_2, l_3, ..., l_{n+1}$:

$$x_1 = -\frac{l_2 + l_3 + ... + l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_2 = \frac{n \cdot l_2 - l_3 - l_4 - ... - l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_3 = \frac{-l_2 + n \cdot l_3 - l_4 - ... - l_{n+1}}{n+1}$$

$$...$$

$$x_{n+1} = \frac{-l_2 - l_3 - l_4 - ... + n \cdot l_{n+1}}{n+1}$$

Pošto za vektor $\vec{x}$ znamo da je jediničan, važi:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-l_2 - l_3 - ... - l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot l_2 - l_3 - ... - l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + ... + \left(\frac{-l_2 - l_3 - ... + n \cdot l_{n+1}}{n+1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2}\left[(n^2+n) \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - (2n+2) \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j\right] = 1$$

$$\Rightarrow n \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - 2 \cdot \sum_{\substack{i=2 \\ i<j}}^{n+1} l_i \cdot l_j = n+1$$

Problem je ovime sveden na naženje najveće udaljenosi na koju možemo da postavimo drugi $(n-1)$-dimenzioni potprostor paralelan posmatranom, tako da on sigurno seče posmatrani simpleks. Primetimo da je tražena udaljenost tačno minimum po svim posmatranim $(n-1)$-dimenzionim potprostorima od $max\{l_2, l_3, ..., l_{n+1}\}$.

Ekvivalentan problem tome bi bio, za neko fiksno $t \in \mathbb{R}^+$ maksimizovati izraz:

$$n \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - 2 \cdot \sum_{\substack{i=2 \\ i<j}}^{n+1} l_i \cdot l_j,$$

pri uslovu $l_2, l_3, ..., l_{n+1} \in [0, t]$.

Fiksiranjem $l_2, l_3, ..., l_n$ dobijamo kvadratnu funkciju po l_{n+1}:

$$n \cdot l_{n+1}^2 - l_{n+1} \cdot 2 \sum_{i=2}^{n} l_i + \sum_{i=2}^{n} l_i^2 - 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i<j}}^{n} l_i \cdot l_j$$

Pošto je u ovoj kvadratnoj koeficijent uz l_{n+1}^2 pozitivan, grafik ove funkcije je konveksna parabola, te joj je na segmentu $[0, l]$ maksimalna vrednost na jednom od krajeva segmenta, tj. maksimizuje se kada je l_{n+1} ili 0 ili l.

Analogno, svaki od $l_2, l_3, ..., l_n$ takođe treba biti ili 0 ili l. Sada treba maksimizovati ovaj izraz, pri uslovu:

$$l_2, l_3, ..., l_{n+1} \in \{0, l\}.$$

Posmatrana suma može da se prezapiše kao:

$$\sum_{\substack{i=2 \\ i<j}}^{n+1} (x_i - x_j)^2 = n + 1$$

Neka od ovih dužina $a \in \mathbb{N}$ ima vrednost t, a $n - a$ ima vrednost 0. Ubacivanjem toga u prethodno, dobija se:

$$(n - a)a \cdot l = n + 1$$

Pošto se l minimizuje kada se $(n - a)a$ maksimizuje, a $(n - a)$ i a imaju konstantan zbir, prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, to se dešava kada je $n - a = a$. Ovo se može dostići kada je n parno, a kada je neparno, izraz se maksimizuje kada se a i $n - a$ razlikuju za jedan. Stoga, $a = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Time se dobija:

$$n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot l^2 - 2 \cdot \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \cdot l^2 = n + 1$$

$$\left(n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right)\right) \cdot l^2 = n + 1$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) \cdot l^2 = n + 1$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{n+1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right)}}$$

Pošto je stranica ovog simpleksa dužine $\sqrt{2}$, odnos stranice simpleksa i udaljenosti dva $(n-1)$-dimenziona potprostora između kojih se taj simpleks ne može postaviti između njih je:

$$\frac{\sqrt{2}}{l} = \sqrt{\frac{2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right)}{n+1}}$$

Stoga, između dva paralelna $(n-1)$-dimenziona potprostora na udaljenosti 1 ne može da se postavi n-simpleks stranice $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$.

□

2.2 Jedan čovek

Teorema 2.4 *Put koji formiraju po trojkama nekoplanarne ivice n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}.$$

Dokaz. Po Teoremi 2.1, ovaj simpleks se ne može postaviti između posmatranih potprostora, tj. rub šume seče simpleks, kako god ga postavili u šumi.

Pošto postoji put po nekomplanarnim ivicama simpleksa koji obilazi sva temena i on je neprekidan i konveksni omotač tog puta je baš ovaj simpleks. Zato što posmatrani simpleks izlazi iz ove šume, tj. jedan od ova dva $(n-1)$-dimenziona potprostora ga seče, on mora da seče i put čiji je taj simpleks konveksni omotač. Stoga, ova putanja je izlazna i ima dužinu:

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}.$$

□

Stoga, važi sledeće:

$$S_1(T_n) \leqslant L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$$

2.3 n+1 čovek

Teorema 2.5 *Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}$$

.

Dokaz. Slično dokazu Teoreme 2.2, pošto svaki od $n+1$ ljudi ide od centra posmatranog simpleksa do nekog od njegovih temena, tako da do svakog temena ide tačno jedan čovek, konveksni omotač skupa ovih puteva je baš taj simpleks. Pošto barem jedan od posmatranih $(n-1)$- dimenzionih potprostora seče konveksni omotač ovog puta, barem jedan od njih mora seći i taj put.

Odnos rastojanja između centra simpleksa i temena sa dužinom ivice je:

$$\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 + n\cdot\frac{1}{n+1}^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{2}\cdot(n+1)}$$

Onda je rastojanje između centra i temena u simpleksu stranice $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ je:

$$L_{n,n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}$$

Pošto svaki od $n+1$ ljudi koji kreću iz centra ovog simpleksa ima put dužine S, ukupna dužina puta je:

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}$$

□

Stoga, važi sledeće:

$$S_{n+1}(T_n) \leqslant L_{n,n+1} = \sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right)}$$

3 k-traka u n dimenzija

Traka u n dimenzija predstavlja upoštenje klasičnog primera šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve paralelne prave na udaljenosti 1. Ovo je uopštenje koje nastaje interpretacijom ove šume kao prostora ograničenog hiperravnima u nekom prostoru i u slučaju $\mathbb{R}^2$ je to jedina takva šuma koju ima smisla posmatrati. U prostorima viših dimenzija od $\mathbb{R}^2$ to nije slučaj.

Definišimo **k-traku u n dimenzija** za svako prirodno n i za svako $1 \leqslant k \leqslant n-1$ kao šumu odredjenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog potprostora $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1 *Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Dokaz. Posmatrajmo presek nekog potprostora dimenzije $k+1$ i k-trake u n dimenzija. Kada bilo koji objekat projektujemo na neki drugi, njihov presek mora pripadati toj projekciji. Stoga, kada bismo projektovali k-traku u n dimenzija na posmatrani $k+1$ podprostor, ovaj presek mora pripadati toj projekciji.

Neka je S jedinična sfera u $\mathbb{R}^{n-k}$ i neka je P podprostor $\mathbb{R}^k$ takvi da važi:

$$Lin(S) \cap Lin(P) = \emptyset,$$

gde za za skup vektora A i vektorski prostor B, sa $Lin(A)$ označavamo skup svih linearnih kombinacija vektora iz A, a sa $Lin(B)$ linearnu kombinaciju vektora baze.
Tada je k-traka u n dimenzija zapravo $Lin(S \cup P)$.

Pošto je S jedinične širine, a P ima samo k dimenzija, tj. projekcija P na $\mathbb{R}^{k+1}$ po $(k+1)$-voj dimenziji je širine 0, linearna kombinacija njihove unije je jedinične širine. Stoga, projekcija k-trake u n dimenzija na proizvoljan $\mathbb{R}^{k+1}$ potprostor je širine 1, te se ne može pokriti trakom u $(k+1)$-noj dimenziji. Zbog toga je svaki izlazni put iz trake u $(k+1)$-noj dimenziji takođe i izlazni put iz k-trake u n dimenzija.

S druge strane, ako za proizvoljan vektor $v \in S$ definišemo skup:

$$X_v = \{\lambda v + p | p \in P, |\lambda v| \leqslant \frac{1}{2}\},$$

tj. $X + v$ je skup dobijen tako što sve vektore iz P saberemo sa svim vektorima iz S koji imaju isti pravac kao vektor v. Ovaj skup predstavlja traku u $(k+1)$-noj dimenziji, stoga važi i da je izlazni put iz k-trake u n dimenzija takođe i izlazni put iz trake u $(k+1)$-noj dimenziji. □

4 Traka u $\mathbb{R}^2$ sa proizvoljnim brojem ljudi

Lema 4.1 *Za šumu F u $\mathbb{R}^n$ važi:*

$$S_1(F) = S_2(F).$$

Dokaz. Za svaki izlazni put za jednog čoveka postoji ekvivalentan izlazni put za dvojicu jer ako dva čoveka krenu iz bilo koje tačke tog puta i u suprotnim smerovima ga prate, obrazovaće isti put. Slično, za svaki izlazni put za dva čoveka postoji ekvivalentan put za jednog čoveka tako što jedan čovek ide putem koji bi formirao da krene iz krajnje pozicije na putu jednog od dva čoveka i prati taj put do krajnje pozicije drugog. □

Definicija 4.2 *Geometrijska medijana skupa tačaka $S = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$, gde su $X_i \in \mathbb{R}^n$ je tačka $M \in \mathbb{R}^n$ za koju važi:*

$$\arg\min_{M \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} d(X_i, M),$$

gde je za $A, B \in \mathbb{R}^n$ $d(A, B)$ Euklidska razdaljina između tačaka A i B.

Definicija 4.3 *Toričelijeva tačka je geometrijska medijana trougla.*

Za Toričelijevu tačku su poznata svojstva:

1. Ako je u $\triangle ABC$ jedan od uglova veći od $120°$, Toričelijeva tačka $\triangle ABC$ je teme tog ugla.
2. Ako su u $\triangle ABC$ svi uglovi ne veći od $120°$,Toričelijeva tačka $\triangle ABC$ je tačka X takva da važi:
$$\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120°$$

Teorema 4.4 *Najkraći izlazni put iz T_2 čiji je konveksni omotač trougao je dužine 2. Tačnije, to je put za troje ljudi koji kreću iz centra jednakostraničnog trougla i svaki čovek ide ka jednom od temena.*

Dokaz. Neka je konveksni omotač puta $\triangle ABC$ i neka je početna tačka puta tačka X (unutar $\triangle ABC$). Da bi ovo bio konveksni omotač posmatranog puta, neki od ljudi koji kreću iz X svakako moraju da u nekom trenutku prođu i kroz tačku A, B i C. Kada bi iz tačke X kretalo više od 3 osobe, svakako neka tri čoveka (ili manje) od njih moraju da prođu kroz ova tri temena trougla, a ostali nikako ne doprinose obliku konveksnog omotača, te su bespotrebni, tj. kada svi ljudi osim te trojice koji prolaze kroz temena ne bi krenuli, put bi bio kraći. Stoga, optimalno je da krene najviše tri osobe.

Ako za $\triangle ABC$ važi da su mu svi uglovi ne veći od $120°$, Toričelijeva tačka je unutar trougla i ,,gleda" sve stranice trougla pod uglom od $120°$. Put koji obrazuje troje ljudi koji kreću iz Toričelijeve tačke i svaki ide do jednog temena je kraći od bilo kog puta za jednog čoveka, jer bi taj put morao da prođe kroz sva temena, tj. najkraći put za jednog čoveka bi bio polazeći od jednog temena uz dve najkraće stranice, što je duže od puta iz Toričelijeve tačke (po definiciji geometrijske medijane).

Stoga, neka je X Toričelijeva tačka $\triangle ABC$. Neka su h_a, h_b, h_c redom visine iz temena A, B, C i neka je $x = |AX|, y = |BX|, z = |CX|$. Da bi put sa ovim konveksnim omotačem bio izlazan iz T_2, mora važiti $min\{h_a, h_b, h_c\} \geqslant 1$, s tim da se traži minimalna suma $x+y+z$ pri kojoj to važi.

Problem minimizacije $x + y + z$ pri uslovu $min\{h_a, h_b, h_c\} \geqslant 1$ je ekvivalentan problemu maksimizacije $min\{h_a, h_b, h_c\}$ ako fiksiramo $x + y + z = c$, za bilo koju pozitivnu konstantu c.

Bez umanjenja opšteg, neka je $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$, tj. $x \leqslant y \leqslant z$. Važi sledeće:

$$P(\triangle ABC) = \frac{h_a \cdot BC}{2} = P(\triangle ABX) + P(\triangle BCX) + P(\triangle CAX) =$$

$$= \frac{xy \cdot \sin(\angle AXB)}{2} + \frac{yz \cdot \sin(\angle BXC)}{2} + \frac{zx \cdot \sin(\angle CXA)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (xy + yz + zx)$$

$$\Longrightarrow h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{2BC}.$$

Kosinusna teorema primenjena na $\triangle BCX$ daje:

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2 - 2cos(\angle BXC) \cdot yz} = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}.$$

Ubacivanjem izraza za BC u izraz za h_a dobijamo izraz koji treba maksimizovati pri uslovu $x \leqslant y \leqslant z$:

$$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{y^2 + z^2 + yz}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{xy + yz + zx}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{xy + yz + zx}.$$

Pošto je $x+y+z = c$ i ovi brojevi predstavljaju dužine, tj. nenegativni su, prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine važi:

$$xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$$

$$\implies xy + yz + zx \leqslant \frac{1}{3} \cdot (x+y+z)^2 = \frac{1}{3} \cdot c^2$$

$$\implies \sqrt{xy + yz + zx} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c.$$

Maksimum se dostiže za $x = y = z$ i tada je:

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{xy + yz + zx} = \frac{1}{2} \cdot c,$$

tj. $c = 2$. Ovo je slučaj gde je $\triangle ABC$ jednakostraničan i X je njegov centar.

Ako je neki od uglova $\triangle ABC$ veći od $120°$, Toričelijeva tačka je ono teme u kom se spajaju dve najkraće stranice. Neka bez umanjenja opšteg važi $\angle BAC > 120°$.

Ponovo je uslov da ovaj put bude izlazan iz T_2 da su sve visine ovog trougla dužine barem 1, tj. da je $h_a \geqslant 1$ i važi:

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2} h_a \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin(\angle BAC)$$

$$\implies h_a = \frac{AB \cdot CA \cdot \sin(\angle BAC)}{BC} = sin(\angle CBA) \cdot AB \geqslant 1$$

Pošto je $\angle BAC > 120°$, tada je $\angle CBA < 30°$, tj. $\sin(\angle CBA) < \frac{1}{2}$, mora važiti $AB > 2$, te mora važiti i $AB + CA > 2$, te ovaj slučaj ne može biti bolji od prethodnog, čime je dokaz kompletan.
□

Literatura

[1] J. W. Ward, *Exploring the Bellman Forest Problem*, Spring (2008)

[2] S. R. Finch, J. E. Wetzel, *Lost in a forest*, The American Mathematical Monthly, 111(8) : 645-654 (2004)

[3] M. Ghomi, *The length, width, and inradius of space curves*, arXiv preprint(2018), arXiv: 1605.01144v3

[4] V. A. Zalgaller, *The problem of the shortest space curve of unit width*, Mat. Fiz. Anal. Geom,1(3-4):454–461 (1994)

[5] P. Gibbs, *Bellman's Escape Problem for Convex Polygons*, viXra:1606.0050 (2016)

[6] P. Gibbs, *Lost in a Isosceles Triangle*, viXra:1606.0015 (2016)

[7] Y. Movshovich, J. E. Wetzel, *Drapeable unit arcs fit in the unit* $30°$ *sector*, Adv. Geom. 17: 497–506 (2017)