Projekat

Katarina Krivokuća
Matematička gimnazija, Beograd, Srbija
e-mail: katarinakrivokuca@outlook.com

Dimitrije Glukčević
Gimnazija „Svetozar Marković”, Niš, Srbija
e-mail: dimchee90@gmail.com

September 4, 2019

Apstrakt

Rešenje Belmanovog problema traženja najkraćeg izlaznog puta iz šume zadatog oblika je poznato za mali broj šuma. Jedan od rešenih slučajeva je traka ograničena sa dve paralelne prave na udaljenosti 1, za koju je još Zalgaller pretpostavio rešenje, dok je precizan dokaz pronađen nešto kasnije. Ovo rešenje je ujedno i najkraći put jedinične širine. Takođe su istraživani i najkraći putevi širine 1 u višim dimenzijama. Ghomi je pokazao gornje ograničenje za dužinu takvog puta u $\mathbb{R}^3$ i donje ograničenje u $\mathbb{R}^n$. U ovom radu ćemo predstaviti gornje ogrničenje za dužinu ovakvog puta u $\mathbb{R}^n$, kao i jednu modifikaciju Belmanovog problema u kojoj više ljudi kreće iz iste tačke te se posmatra skup puteva sa zajedničkim početkom. Dalje je pokazano jedno gornje ograničenje za dužinu najkraćeg puta širine 1 u $\mathbb{R}^n$, kao i jedno gornje ograničenje pri posmatranoj modifikaciji. Dosadašnji rad i intuicija ukazuju na to da je pri posmatranoj modifikaciji u $\mathbb{R}^n$ put za $n+1$ ljudi pokazan u ovom radu najkraći modifikovani put širine 1.

1 Uvod

1.1 Originalni problem

Originalni problem ”Izgubljeni u šumi” je postavio Belman 1956. i on je glasio:

”Koji je najkraći put kojim čovek izgubljen u šumi poznatog oblika i dimenzija treba da ide tako da posle tog puta zna da će sigurno izaći iz nje?”

Formalnije, problem se definiše kao ”Koji je najkraći izlazni put iz šume?”, ako smo šumu i izlazni put definisali kao:

Definicija 1.1 *Šuma je zatvoren, konveksan planaran skup.*

Definicija 1.2 *Put je neprekidan i rektifiabilan planaran luk.*

Definicija 1.3 *Za put P kažemo da je izlazni put iz šume F ako se put P ne može postaviti unutar šume P bez presecanja njene granice.*

1.2 Neki poznati rezultati

Rešenje ovog problema je poznato za mali broj šuma. Da bi se definisale neke klase šuma za koje je problem rešen, potrebne su sledeće definicije:

Definicija 1.4 *Za ograničenu šumu, dijametar se definiše kao najveća udaljenost između neke dve tačke šume.*

Definicija 1.5 *Širina puta je najmanja udaljenost između neke dve paralelne prave takve da se taj put nalazi između njih.*

Tri klase šuma za koje je problem rešen su:

1. ***"Debele" šume*** *iz kojih je najbolji izlazni put oblika duži. Šuma je "debela" ako je ograničena i pokriva neki romb sa uglom od* 60° *i velikom dijagonalom dužine svog dijametra. Neki primeri "debelih" šuma su kružnica i svi pravilni mnogouglovi veći od trougla.*

2. ***"Tanke" šume*** *iz kojih je najbolji izlazni put oblika Zalgaller-ove putanje, koja je najkraća putanja širine 1. Šuma je "tanka" ako se u nju može upisati Zalgaller-ov pravougaonik, tako da njegove duže stranice leže na granici posmatrane šume. Zalgaller-ov pravougaonik je pravougaonik čija je kraća stranica 1, a duža dužine Zalgaller-ove putanje.*
   Najpoznatiji primer "tanke" šume je šuma koju obrazuju dve paralelne prave na udaljenosti 1.

3. ***Neki jednakokraki trouglovi*** *iz kojih je najbolji izlazni put Besicovitch-eva Z kriva.*

1.3 Uopštenje problema

Prvo, uopštimo ovaj problem na višedimenzione prostore. Za to je samo potrebno predefinisati šumu i put tako da više ne žive u $\mathbb{R}^2$, *već u* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6 *n-dimenziona šuma je zatvoren, konveksan skup u* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.7 *n-dimenzioni put je neprekidan i rektifiabilan luk u* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.8 *Za n-dimenzioni put kažemo da je izlazan iz n-dimenzione šume ako ne može biti postavljen unutar nje bez presecanja njenih granica.*

Definicija 1.9 *Širina n-dimenzionog puta je najmanja udaljenost između dve paralelne hiperravni takve da se taj put nalazi između njih.*

Drugo uopštenje koje će biti posmatrano u ovom radu je problem više ljudi unutar šume. U kontekstu originalnog problema, pitanje bi bilo postavljeno kao:

"Grupa od n ljudi je zajedno izgubljena unutar šume poznatog oblika i dimenzija. Koja je najkraća suma puteva koje oni moraju da pređu tako da znaju da će barem jedan od njih izaći iz šume?"

Formalno, to bi se definisalo kao:

Definicija 1.10 *Put za n ljudi je skup k puteva koji kreću iz iste tačke.*

Definicija 1.11 *Dužina puta za n ljudi je suma pojedinačnih puteva.*

Definicija 1.12 *Za put za k ljudi P_n kažemo da je izlazan put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od n puteva iz skupa izlazi iz F.*

Na primer, iz šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve prave na udaljenosti 1 je za jednu osobu najkraći izlazni put Zalgaller-ova putanja, koja je dužine oko 2.278291644, a za tri čoveka je jedan od izlaznih puteva cine tri duži dužine $\frac{2}{3}$ pod uglovima od $120°$. Ovaj izlazni put za 3 osobe ima dužinu 2, te je kraći od Zalgaller-ove krive.

Prirodno se postavlja sledeće pitanje:

"Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Koliko optimalno treba da ih bude, i koliki put moraju da pređu, tako da znaju da će izaći iz šume?"

Formalnije, ako je za šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, traži se:

$$S(F) = \lim_{n\to\infty} S_n(F)$$

Ovaj limes je definisan jer je niz $S_n(F)$ nerastući, jer u izlaznom putu za k+1 ljudi, jedan čovek može da stoji i stoga $S_{k+1}(F) \leqslant S_k(F)$. Ovaj niz je takođe ograničen odozdo sa nulom jer označava sumu nekih dužina, te ovaj limes mora da postoji.

2 Traka u n dimenzija

Slično problemu šume oblika beskonačne trake, tj. šume u ravni koja je ograničena sa dve paralelne prave na rastojanju 1 ćemo posmatrati šume u $\mathbb{R}^n$ ograničene sa dve paralelne hiperravni na rastojanju 1. Ovako definisanu šumu u $\mathbb{R}^n$ zovimo ***trakom u n dimenzija*** *i označimo je sa T_n.*

Šume ovog oblika su već posmatrane u kontekstu ispitivanja širina putanja, pošto važi ekvivalencija između toga da n-dimenzioni put ima širinu barem jedan i da je izlazna za šumu T_n. Ghomi je 2018. pokazao da važhi:

Teorema 2.1 (Ghomi) *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifiabilan luk i neka je L njena dužina i ω njena širina. Tada važi:*

$$\frac{L}{\omega} \geqslant \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

Stoga, donje ograničenje dužine izlaznog puta iz T_n je $\sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$.

Zalgaller je konstruisao put u $\mathbb{R}^3$ jedinične širine i dužine ne veće od 3.9215, što je blizu ograničenja 3.7669 dobijenog Teoremom 2.1.

Predlog 2.2 $S(T_n) = S_{n+1}(T_n) = \sqrt{n \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right)}$.

Intuicija iza postavljanja ovog predloga je to što se na primerima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ispostavlja da je put posmatran dalje u ovom poglavlju sa 3, odnosno 4 osobe kraći od najkraćeg mogućeg *puta za jednog čoveka. Takođe je konveksni omotač ovih puteva ,,najmanje" telo koje postoji u posmatranom prostoru, tj. simpleks i ovaj put deluje kao najkraći put čiji je ovo konveksni omotač.*

2.1 Minimalan simpleks

Sledeće tvrđenje daje gornje ograničenje za najmanje dimenzije pravilnog n-simpleksa koji se ne može postaviti unutar trake u n dimenzija. Iz njega sledi gornje ograničenje za izlaznu putanju iz ovakve šume u $\mathbb{R}^n$ za jednog čoveka, kao i gornje ograničenje tog puta za $n+1$ ljudi.

Tvrđenje 2.3 *Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice $\sqrt{\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil\cdot(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1)}{n+1}}$ tako da ga ni jedna od ove dve hiperravni ne seče.*

Dokaz. *Posmatrajmo u $\mathbb{R}^{n+1}$ simpleks određen temenima:*

$$A_1 = (0,0,0,...,0,0)$$

$$A_2 = (-1,1,0,...,0,0)$$

$$...$$

$$A_{n+1} = (-1,0,0,...,0,1)$$

Ovaj simpleks, iako je definisan u $\mathbb{R}^{n+1}$ ima n dimenzija, tj. pripada podprostoru $\mathbb{R}^n$.

Pošto želimo da nađemo maksimalan n-simpleks koji možemo postaviti unutar trake u n dimenzija, to je ekvivalentno tome da za fiksan n-simpleks nađemo minimalnu udaljenost između dva podprostora dimenzije $n-1$ takvih da kako god da simpleks stoji između njih, neka od njih ga sigurno seče posmatrani simpleks.

Posmatrajmo neki $(n-1)$-dimenzioni podprostor koji sadrži teme A_1 i pripada podprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, takav da su tačke $A_2, A_3, ..., A_{n+1}$ sa iste strane ovog podprostora. Neka je $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ jedinični vektor normalan na ovaj podprostor. Za njega takođe važi da pripada podprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, te za njega važi da je linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$.

$$\lambda_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{A_1A_3} + ... + \lambda_{n+1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{x}$$

Iz ovoga sledi da važi sistem jednačina:

$$-\lambda_2 - \lambda_3 - ... - \lambda_{n+1} = x_1$$

$$\lambda_2 = x_2$$

$$\lambda_3 = x_3$$

$$...$$

$$\lambda_{n+1} = x_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = 0$$

Takođe, pošto je $\vec{x}$ jediničan vektor normalan na posmatrani $(n-1)$-dimenzioni podprostor, za svako $i \in 2, 3, ..., n+1$, skalarni proizvod $\overrightarrow{A_1A_i} \cdot \vec{x}$ predstavlja rastojanje između temena A_i i posmatranog $(n-1)$-dimenzionog podprostora. Neka su ova rastojanja redom $l_2, l_3, ..., l_{n+1}$.

$$l_2 = (-1,1,0,...,0) \cdot (x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}) = x_2 - x_1$$

$$l_3 = x_3 - x_1$$

$$...$$

$$l_{n+1} = x_{n+1} - x_1$$

Pošto su $A_2, A_3, ..., A_{n+1}$ sa iste strane podprostora na koji je normalan vektor $\overrightarrow{x}$, ovi skalarni proizvodi su svi istog znaka. Bez umanjenja opšteg, recimo da su nenegativni. Predstavimo $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ u funkciji od $l_2, l_3, ..., l_{n+1}$:

$$x_1 = -\frac{l_2 + l_3 + ... + l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_2 = \frac{n \cdot l_2 - l_3 - l_4 - ... - l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_3 = \frac{-l_2 + n \cdot l_3 - l_4 - ... - l_{n+1}}{n+1}$$

$$...$$

$$x_{n+1} = \frac{-l_2 - l_3 - l_4 - ... + n \cdot l_{n+1}}{n+1}$$

Pošto za vektor $\overrightarrow{x}$ znamo da je jediničan, važi:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-l_2 - l_3 - ... - l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot l_2 - l_3 - ... - l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + ... + \left(\frac{-l_2 - l_3 - ... + n \cdot l_{n+1}}{n+1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2}\left[(n^2+n) \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - (2n+2) \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j\right] = 1$$

$$\Rightarrow n \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j = n+1$$

Problem koji pokuăvamo da rešimo je da nađemo najveću udaljenost na koju možemo da postavimo drugi $(n-1)$-dimenzioni podprostor paralelan posmatranom, tako da on sigurno seče posmatrani simpleks. Primetimo da je tražena udaljenost tačno minimum po svim posmatranim $(n-1)$-dimenzionim podprostorima od $max\{l_2, l_3, ..., l_{n+1}\}$.

U ovom izrazu figurišu samo $l_2, l_3, ..., l_{n+1}$, te iz njega želimo da pronadjemo ovu vrednost. Potrebno nam je bilo koje ogrničenje za ovu vrednost, ali smatramo da se optimalna vrednost dobija kada je polovina ovih udaljenosti 0, tj. polovina temena pripada posmatranom $(n-1)$-dimenzionom podprostoru, a druga polovina je na jednakoj udaljenosti od nje, tj. $l_2 = l_3 = ... = l_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} = l$. Time se dobija:

$$n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot l^2 - 2 \cdot \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \cdot l^2 = n+1$$

$$\left(n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right)\right) \cdot l^2 = n+1$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) \cdot l^2 = n+1$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{n+1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}}$$

Pošto je stranica ovog simpleksa dužine $\sqrt{2}$, odnos stranice simpleksa i udaljenosti dva $(n-1)$-dimenziona podprostora između kojih se taj tetraedar ne može postaviti između njih je:

$$\frac{\sqrt{2}}{l} = \sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$$

Stoga, između dva paralelna $(n-1)$-dimenziona podprostora na udaljenosti 1 ne može da se postavi n-simpleks stranice $\sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$. □

2.2 Jedan čovek

Teorema 2.4 *Put koji formiraju po trojkama nekoplanarne ivice $n-$ simpleksa čije su ivice dužine* $\sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$ *je izlazni put iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}.$$

Dokaz. *Po Teoremi 2.1, ovaj simpleks se ne može postaviti između posmatranih podprostora, tj. barem jedna od granica šume seče simpleks, kako god ga postavili u šumi.*

Pošto postoji put po nekoplanarnim ivicama simpleksa koji obilazi sva temena i on je neprekidan i konveksni omotač tog puta je baš ovaj simpleks. Zato što posmatrani simpleks izlazi iz ove šume, tj. jedan od ova dva $(n-1)$-dimenziona podprostora ga seče, on mora da seče i put čiji je taj simpleks konveksni omotač. Stoga, ova putanja je izlazna i ima dužinu:

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}.$$

□

Stoga, važi sledeće:

$$S_1(T_n) \leqslant L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$$

2.3 n+1 čovek

Teorema 2.5 *Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine* $\sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$ *je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)}$$

.

Dokaz. *Slično dokazu Teoreme 2.2, pošto svaki od $n+1$ ljudi ide od centra posmatranog simpleksa do nekog od njegovih temena, tako da do svakog temena ide tačno jedan čovek, konveksni omotač skupa ovih puteva je baš taj simpleks. Pošto barem jedan od posmatranih $(n-1)$- dimenzionih podprostora seče konveksni omotač ovog puta, barem jedan od njih mora seći i taj put.*

Odnos rastojanja između centra simpleksa i temena sa dužinom ivice je:

$$\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 + n \cdot \frac{1}{n+1}^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{2} \cdot (n+1)}$$

Onda je rastojanje između centra i temena u simpleksu stranice $\sqrt{\frac{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)}{n+1}}$ je:

$$L_{n,n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \sqrt{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)}$$

Pošto svaki od $n+1$ ljudi koji kreću iz centra ovog simpleksa ima put dužine S, ukupna dužina puta je:

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)}$$

□

Stoga, važi sledeće:

$$S_{n+1}(T_n) \leqslant L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)}$$

3 k-traka u n dimenzija

Traka u n dimenzija predstavlja upoštenje klasičnog primera šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve paralelne prave na udaljenosti 1. Ovo je uopštenje koje nastaje interpretacijom ove šume kao prostora ograničenog hiperravnima u nekom prostoru i u slučaju $\mathbb{R}^2$ je to jedina takva šuma koju ima smisla posmatrati. U prostorima viših dimenzija od $\mathbb{R}^2$ to nije slučaj.

Definišimo ***k-traku u n dimenzija*** *za svako prirodno n i za svako $1 \leqslant k \leqslant n-1$ kao šumu odredjenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog podprostora $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.1 *Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Dokaz. *Posmatrajmo presek nekog podprostora dimenzije k+1 i k-trake. Taj presek će očigledno pripadati projekciji k-trake na ovaj podprostor.*

Svaka tačka k-trake u $\mathbb{R}^n$ se može predstaviti kao zbir neke tačke koja pripada unutrašnjosti sfere jediničnog prečnika $\mathbb{S}^{n-k}$ i nekog vektora iz linearno nezavisnog podprostora $\mathbb{R}^k$. To znači da će projekcija k-trake na bilo koji podprostor dimenzije k+1 imati jediničnu širinu. Ovo znači da je izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$ dovoljna.

Ako uzmemo podprostor dimenzije k+1 ğenerisan istim k podprostorom kojim je generisana traka, i proizvoljnim vektorom sa sfere, projekcija k-trake na njega biće baš traka u podprostoru $\mathbb{R}^{k+1}$, čime je dokaz kompletan. $\square$

Literatura

[1] J. W. Ward, Eploring the Bellman Forest Problem, Spring (2008)

[2] S. R. Finch, J. E. Wetzel, Lost in a forest, The American Mathematical Monthly, 111(8) : 645-654 (2004)

[3] M. Ghomi, The length, width, and inradius of space curves, arXiv preprint(2018), arXiv: 1605.01144v3

[4] V. A. Zalgaller, The problem of the shortest space curve of unit width, Mat. Fiz. Anal. Geom,1(3-4):454–461 (1994)

[5] P. Gibbs, Bellman's Escape Problem for Convex Polygons, viXra:1606.0050 (2016)

[6] P. Gibbs, Lost in a Isosceles Triangle, viXra:1606.0015 (2016)

[7] Y. Movshovich, J. E. Wetzel, Drapeable unit arcs fit in the unit 30° *sector, Adv. Geom. 17: 497–506 (2017)*