Katarina Krivokuća i Dimitrije Glukčević

Problem izlaska iz šume

Belmanov problem traženja najkraćeg izlaznog puta iz šume poznatog oblika i dimenzija je rešen za mali broj šuma. Jedan od rešenih slučajeva je traka ograničena sa dve paralelne prave na jediničnoj udaljenosti. Tačnije, Zalgaler je pronašao najkraći put jedinične širine i pokazano je da je to najkraći izlazni put iz posmatrane šume. Takoe su istraživani i najkraći putevi jedinične širine u višim dimenzijama. Gomi je pooštrio gornje ograničenje za dužinu takvog puta u prostoru i pronašao donje ograničenje za dužinu takvog puta u $\mathbb{R}^n$*. U ovom radu ćemo predstaviti jedno gornje ograničenje za dužinu najkraćeg puta jedinične širine u* $\mathbb{R}^n$*, kao i modifikaciju Belmanovog problema u kojoj više ljudi kreće iz iste tačke i smatra se da su izašli iz šume ako barem jedan od njih izae, pri čemu se za dužinu puta uzima suma dužina pojedinačnih puteva. Dalje, u radu je pokazano jedno gornje i jedno donje ograničenje za dužinu najkraćeg puta jedinične širine u* $\mathbb{R}^n$ *pri posmatranoj modifikaciji problema, kao i dokaz optimalnosti jedne modifikovane putanje u ravni pri restrikciji konveksnog omotača puta na trougao. Dosadašnji rad i intuicija ukazuju na to da je pri posmatranoj modifikaciji u* $\mathbb{R}^n$ *najkraći put jedinične širine baš put za* $(n+1)$*-nog čoveka konstruisan u ovom radu.*

Uvod

Originalni problem *Izgubljeni u šumi* je postavio Belman 1956. i on je glasio (Bellman 1956):

> Koji je najkraći put kojim čovek izgubljen u šumi poznatog oblika i dimenzija treba da ide tako da posle tog puta zna da će sigurno izaći iz nje?

Formalnije, problem se definiše kao „Koji je najkraći izlazni put iz šume?”, ako smo šumu i izlazni put definisali ovako:

Definicija 1. Šuma je zatvoren konveksan planaran skup.

Definicija 2. Put je neprekidna i rektifikabilna kriva.

Definicija 3. Za put P kažemo da je izlazni put iz šume F ako se put P ne može postaviti unutar šume P bez presecanja njenog ruba.

Katarina Krivokuća (2000), Zemun, Jovana Subotića 11, učenica 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Dimitrije Glukčević (2001), Niš, Arhiepiskopa Danila Drugog 35, Niš, učenik N. razreda Gimnazije „Svetozar Marković” u Nišu

MENTOR: dr Bojan Bašić, van. profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Rešenje ovog problema je poznato za mali broj šuma. Da bi se definisale neke klase šuma za koje je problem rešen, potrebne su sledeći pojmovi:

Definicija 4. Za ograničenu šumu, dijametar se definiše kao najveća udaljenost između neke dve tačke šume.

Definicija 5. Širina puta je najmanja udaljenost između neke dve paralelne prave takve da se taj put nalazi između njih.

Tri klase šuma za koje je problem rešen su:

– *„Debele" šume*: to su šume koje su ograničene i pokrivaju neki romb sa uglom od 60° i velikom dijagonalom dužine dijametra šume. Najkraći izlazni put iz njih je duž čija je dužina jednaka dijametru posmatrane šume (REF). Neki primeri „debelih" šuma su kružnica i svi pravilni mnogouglovi sa više od tri stranice.

– *„Tanke" šume*: to su one šume u koje se može upisati tzv. Zalgalerov pravougaonik (Zalgaller 1961), tako da njegove duže stranice leže na rubu posmatrane šume. Zalgalerov pravougaonik je pravougaonik čija je kraća stranica 1, a duža dužine Zalgalerove putanje, koja je takođe najkraća izlazna putanja iz šuma ove klase. Najpoznatiji primer „tanke šume" je šuma koju obrazuju dve paralelne prave na udaljenosti 1.

– *Neki jednakokraki trouglovi,* tj. jednakokraki trouglovi čiji uglovi pripadaju nekom konkretnom rasponu, iz kojih je najbolji izlazni put Besikovičeva Z kriva (Besicovitch 1956).

Prvo, uopštimo ovaj problem na višedimenzione prostore. Za to je potrebno dati novu definiciju šume i puta tako da više ne „žive" u $\mathbb{R}^2$, već u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 6. n-dimenziona šuma je zatvoren, konveksan skup u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 7. n-dimenzioni put je neprekidna i rektifikabilna kriva u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 8. Za n-dimenzioni put kažemo da je izlazan iz n-dimenzione šume ako ne može biti postavljen unutar nje bez presecanja njenog ruba.

Definicija 9. Širina n-dimenzionog puta je najmanja udaljenost između dve paralelne hiperravni takve da se taj put nalazi između njih.

Drugo uopštenje koje će biti posmatrano u ovom radu je problem više ljudi unutar šume. U kontekstu originalnog problema, pitanje bi bilo postavljeno kao:

> Grupa od k ljudi je zajedno izgubljena unutar šume poznatog oblika i dimenzija. Koja je najmanja suma dužina puteva koje oni moraju da pređu tako da znaju da će barem jedan od njih izaći iz šume?

Formalno, to bi se definisalo kao:

Definicija 10. Put za k ljudi je skup k puteva koji kreću iz iste tačke.

Definicija 11. Dužina puta za k ljudi je suma dužina pojedinačnih puteva.

Definicija 12. Za put za k ljudi kažemo da je izlazni put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od k puteva iz skupa izlazi iz F.

Na primer, iz šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve prave na jediničnoj udaljenosti, za jednu osobu je najkraći izlazni put Zalgalerova putanja, koja je dužine oko 2.278291644, a za tri čoveka jedan od izlaznih puteva čine tri duži dužine $\frac{2}{3}$ pod uglovima od 120° (REF). Ovaj izlazni put za 3 osobe ima dužinu 2, te je kraći od Zalgalerove krive.

Prirodno se postavlja sledeće pitanje:

> Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Pretpostavljajući da je grupa dovoljno velika, koji je njihov najkraći izlazni put iz šume?

Formalnije, ako je za šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, traži se:

$$S(F) = \lim_{k\to\infty} S_k(F)$$

Ovaj limes je definisan jer je niz $S_k(F)$ nerastući, jer u izlaznom putu za $k+1$ ljudi, jedan čovek može da stoji, i stoga $S_{k+1}(F) \le S_k(F)$. Ovaj niz je takoe ograničen odozdo nulom jer predstavlja sumu nekih dužina, te ovaj limes mora da postoji.

U ovom radu posmatramo uopštenje Belmanovog problema u $\mathbb{R}^n$, u originalnoj formulaciji, kao i pri modifikaciji za više ljudi ~~navedeno u prethodnom odeljku.~~

U odeljku „Minimalni simpleks" pokazano je koja je najmanja dužina stranice pravilnog simpleksa u $\mathbb{R}^n$ koji se ne može smestiti između dve hiperravni na jediničnoj udaljenosti. Zatim su u nastavku poglavlja „Traka u n dimenzija" uočene „šetnje" po tom simpleksu koje su izlazne putanje iz šume ograničene sa dve paralelne hiperravni na jediničnoj udaljenosti u $\mathbb{R}^n$ redom za jednog i $(n+1)$-nog čoveka, čime su data dva gornja ograničenja za dužinu izlaznog puta iz ovih šuma – prvo važi za uopštenje originalnog problema, a drugo (koje je jače od prvog) važi za modifikaciju problema.

Nadalje se sve posmatrna pri modifikovanoj verziji problema.

Poglavlje „Donje ograničenje u n dimenzija" se bavi donjim ograničenjem za dužinu najkraćeg izlaznog puta iz šuma posmatranih u poglavlju „Minimalni simpleks", u zavisnosti od toga koliko ljudi pokušava da izađe iz šume.

U poglavlju „k-traka u $\mathbb{R}^n$ dimenzija" su posmatrane šume koje su uočene kao drugi način da se u $\mathbb{R}^n$ uopšti planarna šuma ograničena sa dve paralelne prave na jediničnoj udaljenosti. Pokazano je da je problem izlaska iz svake od tih šuma ekvivalentan problemu izlaska iz šume ograničene sa dve paralelne hiperravni na jediničnoj udaljenosti u prostoru neke druge (konkretno određene) dimenzije.

U poglavlju „Traka u $\mathbb{R}^2$ sa proizvoljnim brojem ljudi" je posmatran problem izlaska iz planarne šume ograničene sa dve paralelne prave na jediničnoj udaljenosti. Pokazano je da je, pri restrikciji konveksnog omotača puta na trougao, najkraći put sa ma koliko ljudi baš konstruisani put sa tri osobe dužine 2.

Traka u n dimenzija

Slično problemu šume oblika beskonačne trake (REF), posmatraćemo šume u $\mathbb{R}^n$ ograničene sa dve paralelne hiperravni na rastojanju 1. Ovako definisanu šumu u $\mathbb{R}^n$ zovimo trakom u n dimenzija i označimo je sa T_n.

Šume ovog oblika su već posmatrane u kontekstu ispitivanja širina putanja, pošto važi ekvivalencija između toga da n-dimenzioni put ima širinu barem jedan i da je izlazna za šumu T_n. Gomi je 2018. pokazao da važi:

Teorema 1. (Ghomi 2018). Neka je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ rektifikabilna kriva, neka je L njena dužina, a ω njena širina. Tada važi:

$$\frac{L}{\omega} \geq \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}\,.$$

Dalje, ako je γ zatvorena, važi:

$$\frac{L}{\omega} \geq \sqrt{\pi^2 + 16(n-2)}\,.$$

Stoga, donje ograničenje dužine izlaznog puta za jednog čoveka iz T_n je $\sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$.

Zalgaler je konstruisao put u $\mathbb{R}^3$ jedinične širine i dužine ne veće od 3.9215, što je blizu ograničenja 3.7669 dobijenog Teoremom 1.

Hipoteza 1. $S(T_n) = S_{n+1}(T_n) = \sqrt{n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)}$.

Intuicija iza postavljanja ove hipoteze je to što se na primerima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ispostavlja da je put posmatran dalje u ovom poglavlju sa 3, odnosno 4 osobe kraći od najkraćeg mogućeg puta za jednog čoveka. Takođe, konveksni omotač posmatranih puteva je simpleks u odgovarajućoj dimenziji, što je telo sa najmanje temena koje „živi” u posmatranom prostoru i posmatrani put iz centra simpleksa smatramo da će se ispostaviti za najkraći put čiji je ovo konveksni omotač, ma koliko ljudi da ga obrazuje.

Minimalni simpleks

Sledeće tvrđenje daje minimalnu dužinu stranice pravilnog n-simpleksa koji se ne može postaviti unutar trake u n dimenzija. Iz njega sledi gornje ograničenje za izlaznu putanju iz ovakve šume u $\mathbb{R}^n$ za jednog čoveka, kao i gornje ograničenje tog puta za $n+1$ ljudi.

Tvrđenje 1. Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice $\sqrt{\frac{2 \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1 \right)}{n+1}}$ tako da ga nijedna od ove dve hiperravni ne seče.

Dokaz. Posmatrajmo u $\mathbb{R}^{n+1}$ simpleks određen temenima:

$$A_1 = (0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$A_2 = (-1, 1, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$\ldots$$
$$A_{n+1} = (-1, 0, 0, \ldots, 0, 1)$$

Ovaj simpleks, iako je definisan u $\mathbb{R}^{n+1}$ ima n dimenzija, tj. pripada potprostoru $\mathbb{R}^n$.

Pošto želimo da naemo maksimalan n-simpleks koji možemo postaviti unutar trake u n dimenzija, to je ekvivalentno tome da za fiksan n-simpleks naemo minimalnu udaljenost između dva paralelna potprostora dimenzije $n-1$ između kojih se on ne može smestiti bez presecanja.

Posmatrajmo neki $(n-1)$-dimenzioni potprostor koji sadrži teme A_1 i pripada potprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, takav da su tačke A_2, $A_3, \ldots, A_{n+1}$ sa iste strane ovog potprostora. Neka je $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n+1})$ jedinični vektor normalan na ovaj potprostor i koji pripada potprostoru generisanom tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Iz tog uslova, vektor $\vec{x}$ možemo predstaviti kao linearnu kombinacija vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, …
$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$:

$$\lambda_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{A_1A_3} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{x}$$

Iz ovoga dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$-\lambda_2 - \lambda_3 - \ldots - \lambda_{n+1} = x_1$$
$$\lambda_2 = x_2$$
$$\lambda_3 = x_3$$
$$\ldots$$
$$\lambda_{n+1} = x_{n+1},$$

odnosno

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 0.$$

Takođe, pošto je $\vec{x}$ jedinični vektor normalan na posmatrani $(n-1)$-dimenzioni potprostor, za svako $i \in \{2, 3, \ldots, i+1\}$, skalarni proizvod $\overrightarrow{A_1A_i} \cdot \vec{x}$ predstavlja rastojanje između temena A_i i posmatranog $(n-1)$-dimenzionog potprostora. Neka su ova rastojanja redom $l_2, l_3, \ldots, l_{n+1}$. Tada je:

$$l_2 = (-1, 1, 0, \ldots, x_{n+1})$$
$$l_3 = x_3 - x_1$$
$$\ldots$$
$$l_{n+1} = x_{n+1} - x_1$$

Pošto su $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sa iste strane potprostora na koji je normalan vektor $\vec{x}$, ovi skalarni proizvodi su svi istog znaka. Bez umanjenja opštosti, recimo da su svi nenegativni. Predstavimo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ u funkciji od l_2, $l_3, \ldots, l_{n+1}$:

$$x_1 = -\frac{l_2 + l_3 + \ldots + l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_2 = \frac{n \cdot l_2 - l_3 - l_4 - \ldots - l_{n+1}}{n+1}$$

$$x_3 = \frac{-l_2 + n \cdot l_3 - l_4 - \ldots - l_{n+1}}{n+1}$$

$$\ldots$$

$$x_3 = \frac{-l_2 - l_3 - l_4 - \ldots - n \cdot l_{n+1}}{n+1}$$

Pošto za vektor $\vec{x}$ znamo da je jedinični, važi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$$

odakle je

$$\left(\frac{-l_2 - l_3 - \ldots l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot l_2 - l_3 - \ldots - l_{n+1}}{n+1}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{-l_2 - l_3 - \ldots + n \cdot l_{n+1}}{n+1}\right)^2 = 1$$

pa zaključujemo da je

$$\frac{1}{(n+1)^2}\left[(n^2 + n) \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - (2n+2) \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j\right] = 1$$

odnosno

$$n \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j = n+1$$

Problem je ovim sveden na nalaženje najveće udaljenosi na koju možemo da postavimo drugi $(n-1)$-dimenzioni potprostor paralelan posmatranom, tako da on sigurno seče posmatrani simpleks. Primetimo da je tražena udaljenost jednaka minimumu po svim posmatranim $(n-1)$-dimenzionim potprostorima od $\max\{l_2, l_3, \ldots, l_{n+1}\}$.

Ekvivalentan problem tome bi bio, za neko fiksno $l \in \mathbb{R}^+$ maksimizovati izraz:

$$n \cdot \sum_{i=2}^{n+1} l_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=2, i<j}^{n+1} l_i \cdot l_j = n+1$$

pri uslovu $l_2, l_3, \ldots, l_{n+1} \in [0, 1]$ (zahvaljujemo Pavlu Martinoviću na pomoći oko ovog dela dokaza).

Fiksiranjem $l_2, l_3, \ldots, l_n$ dobijamo kvadratnu funkciju po l_{n+1}:

$$n \cdot l_{n+1}^2 - l_{n+1} \cdot 2\sum_{i=2}^{n} l_i + \sum_{i=2}^{n} l_i^2 - 2\sum_{i=2, i<j}^{n} l_i \cdot l_j$$

Pošto je u ovoj kvadratnoj funkciji koeficijent uz l_{n+1}^2 pozitivan, njen grafik je konveksna parabola, te joj je na segmentu [0, l] maksimalna vrednost na jednom od krajeva segmenta, tj. maksimizuje se kada je l_{n+1} ili 0 ili *l*.

Analogno, svaki od $l_2, l_3, \ldots, l_n$ takođe treba biti ili 0 ili l. Sada treba maksimizovati ovaj izraz, pri uslovu:

$$l_2, l_3, \ldots, l_{n+1} \in \{0, l\}.$$

Posmatrana suma može da se drugačije zapiše kao:

$$\sum_{i=2}^{n} l_i^2 + \sum_{i=2,i<j}^{n} (l_i - l_j)^2 = n+1$$

Neka od ovih dužina $a \in \mathbb{N}$ ima vrednost *l*, a $n-a$ ima vrednost 0. Ubacivanjem toga u prethodno, dobija se:

$$a \cdot l^2 + (n-a)a \cdot l^2 = n+1$$

odnosno

$$l^2 \cdot a(n+1-a) = n+1$$

Pošto se *l* minimizuje kada se $(n+1-a)a$ maksimizuje, a $n+1-a$ i a imaju konstantan zbir, prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, to se dešava kada je $n+1-a=a$. Ovo se može dostići kada je n neparno, a kada je parno, izraz se maksimizuje kada se a i $n+1-a$ razlikuju za jedan. Stoga, $a = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.

Time se dobija:

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1 \right) \cdot l^2 = n+1$$

odnosno

$$l = \sqrt{\frac{n+1}{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1 \right)}}$$

Pošto je stranica ovog simpleksa dužine $\sqrt{2}$, odnos stranice simpleksa i udaljenosti dva $(n-1)$-dimenziona potprostora između kojih se taj simpleks ne može postaviti između njih je:

$$\frac{\sqrt{2}}{l} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1 \right)}{n+1}}$$

Stoga, između dva paralelna $(n-1)$-dimenziona potprostora na udaljenosti 1 ne može da se postavi n-simpleks stranice

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1 \right)}{n+1}}.$$

Dodatno, ovaj simpleks je po konstrukciji minimalan, tj. svaki pravilan n-simpleks kraće stranice se može postaviti između dva paralelna $(n-1)$-dimenziona potprostora na udaljenosti 1. □

U sledećoj teoremi ćemo, koristeći prethodno dobijeni rezultat, konstruisati jedan izlazni put za jednog čoveka iz šume T_n. Time je dato gornje ograničenje za dužinu najkraćeg takvog puta.

Teorema 2. Put koji formiraju po trojkama nekomplanarne ivice n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\dfrac{2\cdot\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$ je izlazni put iz trake u n dimenzija, i taj put ima dužinu:

$$L_{n,1}=n\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}.$$

Dokaz: Prema tvrđenju Teoreme 1, ovaj simpleks se ne može postaviti između posmatranih potprostora, tj. rub šume seče simpleks, kako god ga postavili unutar nje. Posmatrani put je neprekidan i njegov konveksni omotač je baš ovaj simpleks. Zato što posmatrani simpleks izlazi iz ove šume, tj. jedan od ova dva $(n-1)$-dimenziona potprostora ga seče, on mora da seče i put čiji je taj simpleks konveksni omotač. Stoga, ova putanja je izlazna, i ima dužinu:

$$L_{n,1}=n\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$$

Stoga, važi sledeće:

$$S_1(T_n)\le L_{n,1}=n\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}.$$

□

Sledeća teorema daje konstrukciju jednog izlaznog puta za $n+1$ ljudi iz šume T_n, slično prethodnoj. Ovime je dato gornje ograničenje za najmanji takav put.

Teorema 3. Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\dfrac{2\cdot\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$ je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:

$$L_{n,n+1}=\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}.$$

Dokaz. Slično dokazu Teoreme 2, pošto svaki od $n+1$ ljudi ide od centra posmatranog simpleksa do nekog od njegovih temena, tako da do svakog temena ide tačno jedan čovek, konveksni omotač skupa ovih puteva je baš taj simpleks. Pošto barem jedan od posmatranih $(n-1)$- dimenzionih potprostora seče konveksni omotač ovog puta, barem jedan od njih mora seći i taj put.

Odnos između rastojanja centra simpleksa i temena sa dužinom ivice je:

$$\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2+n\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{2}\cdot(n+1)}$$

Onda je rastojanje između centra i temena u simpleksu stranice $\sqrt{\frac{2\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}{n+1}}$ dato sa:

$$L_{n,n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}$$

Pošto svaki od $n+1$ ljudi koji kreću iz centra ovog simpleksa ima put dužine S, ukupna dužina puta je:

$$L_{n,n+1}=\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}$$

Stoga, važi sledeće:

$$S_{n+1}(T_n)\leq L_{n,n+1}=\sqrt{n\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil\cdot\left(n-\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil+1\right)}$$

□

Donje ograničenje u n dimenzija

Gomi je pokazao donje organičenje za dužinu puta širine 1. Konstruišimo put za jednog čoveka koji koristeći Gomijevo ograničenje, daje donje ograničenje za dužinu modifikovanog puta.

Teorema 4. Neka je S_k dužina najkraćeg izlaznog puta jedinične širine za $k\geq 2$ ljudi iz trake u $n\geq 2$ dimenzija. Tada važi:

$$S_k\geq\frac{k}{2k-2}\cdot\sqrt{2.2782^2+9(n-2)}$$

Dokaz. Neka su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ putevi ovih k ljudi, za svako $1\leq i\leq k$, gde je $\gamma_i:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija.

Cilj je da napravimo funkciju koja će na neki način imitirati put za više ljudi i to radimo tako što za dati put za k ljudi, funkcija „ide" kao da kreće iz krajnje tačke za prvog čoveka, zatim „ide" do početne tačke. Zatim „ide" do krajnje tačke drugog, pa nazad do početne, analogno i za sve do $(k-1)$-vog čoveka. Nakon ovoga se funkcija opet „nalazi" u početnoj tački i iz nje „ide" do krajnje tačke puta za k-tog čoveka. Neka su $l_1, l_2, \ldots, l_k$ redom dužine krivih $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, tako da je $l_1, l_k \geq \max(l_2, l_3, \ldots, l_{k-1})$.

Posmatrajmo funkciju γ definisanu sa:

$$\gamma : [0, 2k-2] \to \mathbb{R}^n$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma_i\big(x-(2i-3)\big), & 2i-3 < x \leq 2i-2,\ i \in \{2, 3, \ldots, k-1\} \\ \gamma_i\Big(1-\big(x-(2i-2)\big)\Big), & 2i-2 < x \leq 2i-1,\ i \in \{2, 3, \ldots, k-1\} \\ \gamma_k\big(x-(2k-3)\big), & 2k-3 < x \leq 2k-2 \end{cases}$$

Po definiciji puta za k ljudi, put svakog čoveka je neprekidna funkcija i važi $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \ldots = \gamma_k(0)$, te za svako i $\in \{2, 3, \ldots, k\}$ važi:

$$\lim_{x \to (2i-3)^-} \gamma(x) = \gamma(2i-3)$$

$$\lim_{x \to (2i-2)^-} \gamma(x) = \gamma(2i-2)$$

Stoga, γ je neprekidna funkcija, te možemo na nju primeniti Teoremu 1. Primetimo da je dužina krive γ zapravo $l_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3 + \ldots l_{k-1}) + l_k$, te važi:

$$l_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3 + \ldots l_{k-1}) + l_k \geq \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

Pošto je dužina posmatranog puta za k ljudi data sa $l_1 + l_2 + \ldots + l_k$ i pošto su l_1 i l_k najduže od ovih dužina, tada važi:

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_k \geq \frac{k}{2k-2} \cdot \big(l_1 + 2 \cdot (l_2 + l_3 + \ldots + l_{k-1}) + l_k\big)$$

$$S_k \geq \frac{k}{2k-2} \cdot \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

□

k-traka u n dimenzija

Traka u n dimenzija predstavlja uopštenje klasičnog primera šume u $\mathbb{R}^2$ ograničene sa dve paralelne prave na udaljenosti 1. Ovo je uopštenje koje nastaje interpretacijom ove šume kao prostora ograničenog hiper-ravnima u nekom prostoru i u slučaju $\mathbb{R}^2$ je to jedina takva šuma koju ima smisla posmatrati. U prostorima viših dimenzija od $\mathbb{R}^2$ to nije slučaj.

Definicija 13. Definišimo k-traku u n dimenzija za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svako $1 \leq k \leq n-1$ kao šumu određenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog potprostora $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5. Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.

Dokaz. Pokažimo da za svaki izlazni put u traci u $(k+1)$ dimenzija važi da je on takođe i izlazni put iz k-trake u n dimenzija. Posmatrajmo jedan izlazni put iz trake u $(k+1)$-voj dimenziji i pretpostavimo da je on ceo u unutrašnjosti naše k-trake u n dimenzija. Projektujmo dati $\mathbb{R}^n$ prostor na $\mathbb{R}^{k+1}$ potprostor u kom leži posmatrani put. Prilikom ortogonalne projekcije bilo koje figure, njena širina (u prostoru na koji smo projektovali) ne može biti veća nego širina polazne figure u polaznom prostoru (zaista, ukoliko bi se projektovana figura mogla smestiti između neke dve hiperravni u svom potprostoru, od njih direktno možemo, pomeranjem u pravcu projekcije, napraviti hiperravni polaznog prostora između kojih je polazna figura). Dakle, posmatranom projekcijom se uočeni put projektuje na sebe, a čitava k-traka se projektuje na neki objekat širine ne manje od 1; stoga, posmatrani put bi se mogao smestiti u neku traku širine 1 u prostoru $\mathbb{R}^{k+1}$, kontradikcija.

Dokažimo još i da ne postoji kraći izlazni put iz k-trake u n dimenzija. Neka je P k-dimenzioni potprostor koji definiše posmatranu k-traku u n dimenzija i neka je $\vec{v}$ proizvoljan jedinični vektor ortogonalan na P. Definišimo skup:

$$X_v = \left\{ \lambda\vec{v} + \vec{p} \mid p \in P,\ |\lambda\vec{v}| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Ovaj skup predstavlja traku u $(k+1)$-voj dimenziji i ona je upravo projekcija polazne k-trake na odgovarajući $(k+1)$-dimenzioni potprostor. Dakle, ukoliko bi postojao kraći izlazni put iz polazne k-trake, on bi se na ovaj način projektovao na put iste ili još manje dužine koji bi bio izlazni put za traku u $(k+1)$-voj dimenziji, kontradikcija. □

Traka u $\mathbb{R}^2$ sa proizvoljnim brojem ljudi

U ovom odeljku se bavimo restrikcijom problema na ravan.

Prvo ćemo pokazati pomoćno tvrenje koje važi nezavisno od dimenzije prostora i tvrdi da je problem pronalaženja najkraćeg puta za jednu i za dve osobe ekvivalentan.

Zatim pokazujemo da je pri restrikciji konveksnog omotača puta na trougao, najkraći izlazni put iz trake u ravni dužine 2, nezavisno od broja ljudi. Pri tome, put za dva čoveka dobijen konstrukcijom iz Teoreme 3 je baš dužine 2, što ide u prilog hipotezi da ne postoji put kraći od tog.

Lema 1. Za šumu F u $\mathbb{R}^n$ važi:

$$S_1(F) = S_2(F).$$

Dokaz. Za svaki izlazni put za jednog čoveka postoji ekvivalentan izlazni put za dvojicu jer ako dva čoveka krenu iz bilo koje tačke tog puta i u suprotnim smerovima ga prate, obrazovaće isti put. Slično, za svaki izlazni put za dva čoveka postoji ekvivalentan put za jednog čoveka tako što jedan čovek ide putem koji bi formirao da krene iz krajnje pozicije na putu jednog od dva čoveka i prati taj put do krajnje pozicije drugog. □

Definicija 14. Geometrijska medijana skupa tačaka $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, gde su $X_i \in \mathbb{R}^n$ je tačka $M_i \in \mathbb{R}^n$ za koju važi:

$$M \in \arg\min_{M\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} d(X_i, M)$$

gde je za A, $B \in \mathbb{R}^n$, $d(A, B)$ euklidska razdaljina između tačaka A i B, a za svaku funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $\arg\min_{M\in\mathbb{R}^n} f(M)$ skup globalnih minimuma funkcije f.

Definicija 15. Toričelijeva tačka je geometrijska medijana trougla.

Za Toričelijevu tačku su poznata ova svojstva:

1. Ako je u $\triangle ABC$ jedan od uglova veći od 120°, Toričelijeva tačka $\triangle ABC$ je teme tog ugla.
2. Ako su u $\triangle ABC$ svi uglovi ne veći od 120°, Toričelijeva tačka $\triangle ABC$ je tačka X takva da važi: $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120°$

Teorema 6. Najkraći izlazni put iz T_2 čiji je konveksni omotač trougao koji ima dužinu 2. Tačnije, to je put za troje ljudi koji kreću iz centra jednakostraničnog trougla i svaki čovek ide ka jednom od temena.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ konveksni omotač posmatranog puta i neka je početna tačka puta tačka X (unutar $\triangle ABC$). Da bi ovo bio konveksni omotač posmatranog puta, neki od ljudi koji kreću iz X svakako moraju da u nekom trenutku prou i kroz tačku A, B i C. Kada bi iz tačke X kretalo više od 3 osobe, svakako neka tri čoveka (ili manje) od njih moraju da prou kroz ova tri temena trougla, a ostali nikako ne doprinose obliku konveksnog omotača. Stoga, optimalno je da krene najviše tri osobe.

Ako za $\triangle ABC$ važi da su mu svi uglovi ne veći od 120°, Toričelijeva tačka je unutar trougla i „gleda" sve stranice trougla pod uglom od 120°. Put koji obrazuje troje ljudi koji kreću iz Toričelijeve tačke i svaki ide do jednog temena je kraći od bilo kog puta za jednog čoveka, jer bi taj put morao da proe kroz sva temena, tj. najkraći put za jednog čoveka bi bio sačinjen od dve najkraće stranice, što je duže od puta iz Toričelijeve tačke (po definiciji geometrijske medijane).

Stoga, neka je X Toričelijeva tačka $\triangle ABC$. Neka su h_a, h_b, h_c redom visine iz temena A, B, C i neka je $x = AX$, $y = BX$, $z = CX$. Da bi put sa ovim konveksnim omotačem bio izlazni iz T_2, mora važiti $\min\{h_a, h_b, h_c\} \geq 1$, s tim da se traži minimalna suma $x + y + z$ pri kojoj to važi.

Problem minimizacije $x + y + z$ pri uslovu $\min\{h_a, h_b, h_c\} \geq 1$ je ekvivalentan problemu maksimizacije $\min\{h_a, h_b, h_c\}$ ako fiksiramo $x + y + z = c$, za bilo koju pozitivnu konstantu c.

Bez umanjenja opštosti, neka je $h_a \leq h_b \leq h_c$, tj. $x \leq y \leq z$. Važi sledeće:

$$P(\triangle ABC) = \frac{h_a \cdot \overline{BC}}{2} = P(\triangle ABX) + P(\triangle BCX) + P(\triangle CAX) =$$

$$= \frac{xy \cdot \sin(\angle AXB)}{2} + \frac{yz \cdot \sin(\angle BXC)}{2} + \frac{zx \cdot \sin(\angle CXA)}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (xy + yz + zx) \quad \Rightarrow \quad h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{\overline{BC}}.$$

Kosinusna teorema primenjena na $\triangle BCX$ daje:

$$\overline{BC} = \sqrt{y^2 + z^2 - 2\cos(\angle BXC)\cdot yz} = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}$$

Uvrštavanjem izraza za $\overline{BC}$ u izraz za h_a dobijamo izraz koji treba maksimizovati pri uslovu $x \le y \le z$:

$$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{y^2+z^2+yz}} \le \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{xy+yz+zx}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{xy+yz+zx}$$

Pošto je $x + y + z = c$ i ovi brojevi predstavljaju dužine, tj. nenegativni su, prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine važi:

$$xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2$$

odakle je

$$xy+yz+zx \le \frac{1}{3}$$

i zato

$$\sqrt{xy+yz+zx} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot c$$

Maksimum se dostiže za $x = y = z$, i tada je:

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{xy+yz+zx} = \frac{1}{2}\cdot c$$

tj. $c = 2$. Ovo je slučaj gde je $\triangle ABC$ jednakostraničan i X je njegov centar.

Ako je neki od uglova $\triangle ABC$ veći od 120°, Toričelijeva tačka je ono teme u kom se spajaju dve najkraće stranice. Zbog pretpostavke $h_a \le h_b \le \le h_c$ važi $\angle BAC > 120°$.

Ponovo je uslov da ovaj put bude izlazni iz T_2 da su sve visine ovog trougla dužine barem 1, tj. da je $h_a \ge 1$ i važi:

$$h_a = \sin(\angle BCA)\cdot\overline{CA} \ge 1$$

Pošto je $\angle BAC > 120°$, tada je $\angle BCA < 30°$, tj. $\sin(\angle BCA) < \frac{1}{2}$, mora važiti $\overline{CA} > 2$, te mora važiti i $\overline{CA} + \overline{AB} > 2$, te ovaj slučaj ne može biti bolji od prethodnog, čime je dokaz kompletan. □

Zaključak

U ovom radu smo se primarno bavili uvođenjem i ispitivanjem modifikacije Belmanovog problema izlaska iz šume, sa akcentom na krive u $\mathbb{R}^n$ jedinične širine, za čiju smo minimalnu dužinu dali dva gornja ograničenja (u formi primera puteva) – za jednog čoveka i za $(n+1)$-nog čoveka, kao i donje ograničenje u zavisnosti od broja ljudi.

Dalji rad bi mogao da se bavi traženjem granične vrednosti dužine najkraćeg puta širine 1 u $\mathbb{R}^n$ sa k ljudi, kada $k \to \infty$. U poglavlju „Uvod" je argumentovano zašto ta granična vrednost postoji za svaku šumu. Hipoteza

1 implicira da smatramo da će ta granična vrednost biti dostignuta baš za put za $(n+1)$-nog čoveka konstruisan u nastavku ovog poglavlja. Shodno tome, očekujemo da se donje ograničenje za ovu vrednost može dosta pooštriti i u slučaju jednog čoveka, i više ljudi.

Specijalno, očekujemo da će u ravni najkraći put za proizvoljan broj ljudi biti tri čoveka koja idu pravo dužima dužine $\frac{2}{3}$, pod uglom od 120°. Ideja Teoreme 6, koja tvrdi da je ovaj put najkraći od svih puteva u ravni širine 1 čiji je konveksni omotač trougao, jeste da se možda za svaki put čiji je konveksan omotač neka figura F širine 1, može naći trougao širine 1 u kom postoji kraći put.

Znamo da krive konstruisane u poglavlju „Traka u n dimenzija" nisu optimalne za jednog čoveka. Naime, lako se mogu skratiti, npr. čovek može ići ivicom ovog simpleksa dok ne dođe do dužine 1 i zatim preći na sledeću ivicu putem normalnim na nju. Zalgalerove krive u ravni i u prostoru predstavljaju neku vrstu zakrivljenja puteva po simpleksu opisanih u ovom poglavlju, te smatramo da se i u $\mathbb{R}^n$ može na sličan način dobiti kriva kraća od ove, čija je širina 1.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se Pavlu Martinoviću, učeniku Matematičke gimnazije u Beogradu, na pomoći oko dela dokaza Tvrđenja 1.

Literatura

Bellman R. 1956. Minimization Problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **62**: 270

Besicovitch A. S. 1956. On arcs that cannot be covered by an open equiteral triangle of side 1. *Mathematical Gazette*, **49**: 286.

Finch S. R., Wetzel J. E. 2004. Lost in a forest. *The American Mathematical Monthly*, **111** (8) : 645.

Finch S. R. 2019. A translation of Zalgaller's "The shortest space curve of unit width" (1994). arXiv preprint, arXiv:1910.02729

Gerriets J., Poole G. 1974. Convex Regions Which Cover Arcs of Constant Length. *The American Mathematical Monthly*, **81**: 36.

Ghomi M. 2018. The length, width, and inradius of space curves. arXiv preprint, arXiv: 1605.01144v3

Gibbs P. 2016. Bellman's Escape Problem for Convex Polygons. viXra:1606.0050

Gibbs P. 2016. Lost in a Isosceles Triangle. viXra:1606.0015

Movshovich Y., Wetzel J. E. 2017. Drapeable unit arcs fit in the unit 30° sector. *Advances in Geometry*, **17** (4): 497.

Ward J.W. 2008. Exploring the Bellman Forest Problem. Spring. Dostupno na: http://wardsattic.com/joomla/Download/BellmanForestProblem.pdf

Zalgaller V. A. 1961. How to get out of the woods? On a problem of Bellman. *Matematicheskoe Prosveshchenie*, **6**: 191.

Katarina Krivokuća and Dimitrije Glukčević

Lost in a Forest Problem

Bellman's lost in a forest problem (Bellman 1956) is solved just for a few forests. One of the solved cases is the case of a forest bounded by two parallel lines at unit distance. More precisely, Zalgaller (1961) found the shortest arc of unit width, and it was later proved that this arc is the optimal escape path from this forest. Shortest curves of unit width were also researched in higher dimensions. Ghomi (2018) sharpened the upper bound for the length of the shortest space curve, and gave the lower bound for this length in $\mathbb{R}^n$. In this paper, we will show an upper bound for the length of the shortest curve of unit width in $\mathbb{R}^n$, as well as one modification of the original problem in which more people start from the same point and we say that they escaped the forest if at least one of them did, and the sum of lengths of individual paths is considered the length of the whole path. Further we show a lower and an upper bound for the length of the shortest escape path of unit width in $\mathbb{R}^n$, considering the modification of the problem given in this paper, and the optimal solution in the plane with the restriction of the convex hull of the path to a triangle. Our work so far, along with our intuition, indicates that considering the modification from this paper, the shortest curve of unit width in $\mathbb{R}^n$ is the path for $(n+1)$ people constructed in this paper.