XIX konferencija polaznika Istraživačke stanice Petnica "Korak u nauku"

Problem izlaska iz šume

Katarina Krivokuća, katarinakrivokuca@outlook.com, MATF Beograd
Dimitrije Glukčević, dimchee90@gmail.com, Gimnazija "Svetozar Marković", Niš
mentor: Bojan Bašić, PMF Novi Sad

Problem

Postavka problema: Izgubili ste se sa prijateljima u n-dimenzionoj šumi. Sve što znate su oblik i dimenzije šume. Kako najbrže neko od vas može da izađe po pomoć?

Koje šume mi posmatramo?

- traka
- k-traka
- šume čiji je konveksni omotač trougao

Zašto je bolje ići sa prijateljima?

Bavili smo se i našim uopštenjem problema:

- Put za n ljudi je skup od k puteva koji kreću iz iste tačke.
- Dužina puta za n ljudi je suma dužina pojedinačnih puteva.
- Za put P_k za k ljudi kažemo da je izlazan put iz šume F ako za bilo koji početni položaj, barem jedan od n puteva iz skupa izlazi iz F.

Rezultati - k-trake

Šta ako drugačije uopštimo trake u višim dimenzijama?

Definicija. *Definišimo* ***k-traku u n dimenzija*** *za svako prirodno n i za svako $1 \leqslant k \leqslant n-1$ kao šumu odredjenu svim tačkama iz $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\frac{1}{2}$ od nekog k-dimenzionog potprostora $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4. *Najkraća izlazna putanja iz k-trake u $\mathbb{R}^n$ je ista kao najkraća izlazna putanja iz trake u $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Rezultati - donje ograničenje

Gomi je pokazao gornje organičenje za dužinu puta širine 1. On nas je inspirisao da uradimo slično za naše uopštenje sa n ljudi.

Teorema 5. *Neka je dužina najkraćeg izlaznog puta jedinične širine za $k \geqslant 2$ ljudi iz trake u $n \geqslant 2$ dimenzija S_k. Tada važi:*

$$S_k \geqslant \frac{k}{2k-2} \cdot \sqrt{2.2782^2 + 9(n-2)}$$

Hipoteza. *Kako naše konstrukcijski dobijena rešenja imaju ceo "red veličine" veću dužinu nego data donja ograničenja pretpostavljamo da je moguće pooštriti ove ocene.*

Rezultati - trake u $\mathbb{R}^n$

Ideja je bila pronaći neki, što „manji" objekat koji ne možemo da smestimo u traku u $\mathbb{R}^n$

Teorema 1. *Između dve hiperravni u $\mathbb{R}^n$ na udaljenosti 1 se ne može postaviti pravilan n-simpleks stranice*

$$\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}$$

tako da ga ni jedna od ove dve hiperravni ne seče.

Dalje smo tražili što kraću šetnju po ovom objektu

Teorema 2. *Put koji formiraju po trojkama nekoplanarne ivice n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}$ je izlazni put iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,1} = n \cdot \sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}.$$

Teorema 3. *Put koji formira $n+1$ duži od centra do svih temena pravilnog n-simpleksa čije su ivice dužine $\sqrt{\frac{2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}{n+1}}$ je izlazni put za $n+1$ ljudi iz trake u n dimenzija i taj put ima dužinu:*

$$L_{n,n+1} = \sqrt{n \cdot \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \cdot \left(n - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)}$$

.

Dalji rad

Posmatranjem objekata poput zarubljenih simpleksa, moguće je još poboljšati predstavljene rezultate. Recimo za 3 dimenzije.

Takođe prirodno je postaviti i sledeće pitanje: "Grupa ljudi je zajedno izgubljena u šumi poznatih dimenzija. Koliko optimalno treba da ih bude, i koliki put moraju da pređu, tako da znaju da će izaći iz šume?"

Hipoteza. *Ako je za n-to dimenzionu šumu F dužina najkraćeg izlaznog puta za k ljudi $S_k(F)$, tada je:*

$$S(F) = \lim_{n\to\infty} S_n(F) = L_{n,n+1}$$