Druga LaTeX-zadaća

Katarina Šupe

Zagreb, 5. svibnja 2020.

Sadržaj

1 Limes niza u $\mathbb{R}$

Definicija 1. Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ *konvergira* ili teži k realnom broju $a \in \mathbb{R}$ ako za svaki otvoreni interval polumjera ε oko točke a sadrži gotovo sve članove niza, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\,((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)) \qquad (☕)$$

Tada a zovemo *granična vrijednost* ili *limes* niza $(a_n)_n$ i pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ili $a = \lim_n a_n$. Ako niz ne konvergira, onda kažemo da *divergira*.

Teorem 2. *Za konvergentan niz vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrijednost.*
2. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da konvergentan niz $(a_n)_n$ ima dvije granične vrijednosti $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Tada bi za $\varepsilon = |a - b| > 0$ postojali $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$(n > n_a) \Rightarrow \left(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ i}$$
$$(n > n_b) \Rightarrow \left(|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Sada za $n_\varepsilon = \max\{n_a, n_b\}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow \Big(|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |a-b|\Big)$$

što je očita neistina. Dakle, limes mora biti jedinstven.

2. U formuli (☕) uzmimo $\varepsilon = 1$, pa postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da $(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < 1)$. Sada za $n > n_\varepsilon$ imamo

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$

Neka je $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_\varepsilon}|, 1 + |a|\}$. Tada vrijedi

$$|a_n| \leq M, \text{ za sve } n \in \mathbb{N},$$

tj. niz je ograničen.

$\square$

2 Derivacija

Definicija 3. Kažemo da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna ili derivabilna u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$, ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Taj broj zovemo *derivacija* (izvod) funkcije f u točki c i pišemo

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

Primjer 4. Koristeći definiciju 3 nađi derivaciju konstantne funkcije $f(x) = \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$ u točki $c \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\alpha - \alpha}{x - c} = 0$$

$\rightsquigarrow$ funkcija f ima derivaciju 0 u svim realnim brojevima. $\|$

3 Riemannov Integral

Definicija 5. Broj $\mathcal{I}_*$ zovemo *donji Riemannov integral* funckije f na segmentu $[a, b]$, a broj $\mathcal{I}^*$ zovemo *gornji Riemannov integral* funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Definicija 6. Za funkciju $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a, b]$ kažemo da je *integrabilna u Riemannovom smislu* ili *R-integrabilna* na segmentu $[a, b]$ ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b) \tag{2}$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva *integral* ili *R-integral* funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f = \int\limits_a^b f \tag{3}$$

4 Kvadratna funkcija

Definicija 7. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Kvadratna funkcija* je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Nadopunjavanjem do potpunog kvadrata dolazimo do formule koja određuje nultočke kvadratne funkcije

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Napomena 8. Kvadratna jednadžba se može shvatiti kao poseban slučaj kvadratne funkcije $y = f(x)$ za vrijednost funkcije $y = 0$, gdje tada rješenja kvadratne jednadžbe predstavljaju nutočke kvadratne funkcije.

5 Domaća zadaća

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokažite

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

za svaki prirodan broj n. Nadalje, dokažite da za dani $x \neq 1$ vrijedi

$$1 + x + x^2 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Zadatak 2. Neka su $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{Z}$, te neka je p prost broj. Pokažite da sustav kongruencija ima jedinstveno rješenje $(x, y) \in \{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, p\}$ ako i samo ako za determinantu sustava vrijedi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p)$.

6 Literatura

`https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf`
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/em/EM1/kolokviji/EM1-kol2.pdf`
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/uum.pdf`
`https://hr.wikipedia.org/wiki/Kvadratna_jednad%C5%BEba`