Korijeni kubične jednadžbe

M. Jurak

25. siječnja 2021.

Naš je cilj izvesti Cardanove formule za rješenje kubične jednadžbe

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

Prvo ćemo napraviti zamjenu varijabli $y = x + \frac{b}{3a}$ čime dobivamo jednadžbu

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2}$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \tag{3}$$

Uzmimo supstituciju $y = u + v$ i dobivamo

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Ako uvedemo pretpostavku

$$3uv + p = 0$$

dobivamo

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Kubiranjem uvedene pretpostavke dobivamo jednadžbu za kubove:

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q.$$

Prema Vietinim formulama korijeni z_1, z_2 kvadratne jednadžbe $Az^2 + Bz + C = 0$ zadovoljavaju

$$z_1z_2 = \frac{C}{A}, \quad z_1 + z_2 = -\frac{B}{A}.$$

Stoga su u^3 i v^3 rješenja kvadratne jednadžbe:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}, \quad z_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3},$$

odnosno

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}.$$

Slučaj 1: $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 > 0$. Tada za u i v imamo po tri rješenja. Realna rješenja su

$$u = u^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}, \quad v = v^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Pored toga postoje još i kompleksna rješenja

$$u^* e^{2\pi i/3},\ u^* e^{4\pi i/3},\ v^* e^{2\pi i/3},\ v^* e^{4\pi i/3}.$$

Kako je $uv = -p/3$ realan broj vidimo da dobivamo 3 rješenja jednadžbe (2): jedno realno i dva konjugirano kompleksna:

$$y = u^* + v^*, \quad y = u^* e^{2\pi i/3} + v^* e^{4\pi i/3}, \quad y = u^* e^{4\pi i/3} + v^* e^{2\pi i/3}.$$

Kako nas zanimaju samo realna rješenja možemo reći da u ovom slučaju jednadžba (1) ima jedinstveno realno rješenje dano formulom:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \frac{b}{3a}. \tag{4}$$

Slučaj 2: $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$. U tom slučaju je

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{|\Delta|} = re^{\pm i\phi}.$$

Ovdje predznak možemo odabrati po volji, no onda moramo koristiti isti predznak i za v pa je

$$v^3 = -\frac{q}{2} \mp i\sqrt{|\Delta|} = re^{\mp i\phi}.$$

Uzmimo stoga

$$u^3 = re^{i\phi}, \quad v^3 = re^{-i\phi}$$

Dobivamo

$$u = \sqrt[3]{r} e^{i(\phi+2k\pi)/3}, \quad v = \sqrt[3]{r} e^{-i(\phi+2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Ovdje možemo ponovo uočiti da kako je $uv = -p/3$ realan broj moramo koristiti isti k u u i v. Sada dobivamo korijene

$$x = 2\sqrt[3]{r} \cos((\phi + 2k\pi)/3) - \frac{b}{3a}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{5}$$

Sva su tri korijena stoga realna. Modul r računamo iz

$$r^2 = |u^3|^2 = |v^3|^2 = (\frac{q}{2})^2 + |\Delta| = -(\frac{p}{3})^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{(-\frac{p}{3})^3},$$

dok kut ϕ možemo dobiti iz

$$\cos\phi = -\frac{q}{2r}.$$

Slučaj 3: $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = 0$. Tada je

$$u^3 = v^3 = -\frac{q}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} e^{2k\pi i/3}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} e^{2l\pi i/3}, \quad k, l = 0, 1, 2,$$

gdje je treći korijen realan. Kako produkt $uv = -p/3$ mora biti realan imamo rješenja

$$x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \frac{b}{3a}, \quad x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \cos(\frac{2\pi}{3}) - \frac{b}{3a} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} - \frac{b}{3a} \tag{6}$$

gdje je drugi korijen dvostruk. Dakle imamo tri realna korijena pri čemu je jedan dvostruk.