

正項級数の和の分割について

katatoshi

2018 年 4 月 25 日

$P \subseteq \mathbf{N}$ に対して, P の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{F}(P)$ で表わす. $P \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \emptyset$ から \mathbf{R} への写像 $a: P \rightarrow \mathbf{R}$ を数列と呼び, $(a_n)_{n \in P}$ で表わす. $F \in \mathcal{F}(P)$ に対して $s_F = \sum_{n \in F} a_n$ とするとき, $\mathcal{F}(P)$ から \mathbf{R} への写像 $F \mapsto s_F$ を級数と呼び, $\sum_{n \in P} a_n$ で表わす. s_F を級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の部分和と呼び, 任意の $n \in P$ に対して $a_n \geq 0$ であるとき, 級数 $\sum_{n \in P} a_n$ を正項級数と呼ぶ. 以下, 正項級数についてのみ考える. 正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ に対して

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$$

を正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の和と呼び, 同じく $\sum_{n \in P} a_n$ で表わす. $\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F < +\infty$ であるとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ は収束するという.

この正項級数の和の定義は, 部分和の極限として定義する一般的な和の定義と一致する.

命題 1 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \geq 0$ であるような数列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ について

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n$$

である.

証明 $s = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$, $t = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n$ とする. $t_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $m \in \mathbf{N}$ とすると $(t_m)_{m \in \mathbf{N}}$ は単調増加列であるから $t = \sup_{m \in \mathbf{N}} t_m$ である. いま, F を $\mathcal{F}(\mathbf{N})$ の任意の元とすると, $s_F \leq t_{\max F} \leq t$ であるから $s = \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbf{N})} s_F \leq t$ である. 逆に, 任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $F = \{1, \dots, m\}$ とすると $F \in \mathcal{F}(\mathbf{N})$ であるから $t_m = s_F \leq s$ である. したがって $t = \sup_{m \in \mathbf{N}} t_m \leq s$ である. ■

正項級数の和は, 和をとる範囲を分割して計算することができる.

命題 2 $P, P_1, P_2 \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \emptyset$, $P_1 \neq \emptyset$, $P_2 \neq \emptyset$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P_1 \cup P_2 = P$ とする.
このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は $\sum_{n \in P_1} a_n$ と $\sum_{n \in P_2} a_n$ が共に収束することである. そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である.

証明 (必要性) F_1 を $\mathcal{F}(P_1)$ の任意の元, F_2 を $\mathcal{F}(P_2)$ の任意の元とする. $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(P)$ より $s_{F_1} + s_{F_2} = s_{F_1 \cup F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$ であるから

$$\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n = \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F = \sum_{n \in P} a_n \quad (1)$$

である. $\sum_{n \in P} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \leq \sum_{n \in P} a_n < +\infty$ である. したがって $\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束する.

(十分性) 任意の $F \in \mathcal{F}(P)$ は $F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}(P_1)$, $F_2 \in \mathcal{F}(P_2)$ と表わされるので $s_F = s_{F_1} + s_{F_2} \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2}$ である. したがって

$$\sum_{n \in P} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \quad (2)$$

である. $\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P} a_n \leq \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n < +\infty$ である. したがって $\sum_{n \in P} a_n$ は収束する.

(1), (2) より

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である. ■

系 1 $P \subseteq \mathbf{N}$, $P_l \subseteq \mathbf{N}$, $l = 1, \dots, L$, $L \geq 2$, $P \neq \emptyset$, $P_l \neq \emptyset$, $l = 1, \dots, L$, $P_l \cap P_{l'} = \emptyset$, $l \neq l'$, $P = \bigcup_{l=1}^L P_l$ とする. このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は任意の l , $l = 1, \dots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が収束することである. そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^L \sum_{n \in P_l} a_n \quad (3)$$

である.

証明 L についての数学的帰納法で証明する. $L = 2$ ならば命題 2 より主張は正しい.

$L > 2$ とし, $L - 1$ に対しては主張は正しいと仮定する. $Q = P_1 \cup \cdots \cup P_{L-1}$ とすると, $Q \neq \emptyset$, $Q \cap P_L = \emptyset$, $Q \cup P_L = P$ である. いま, $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するならば, 命題 2 より $\sum_{n \in Q} a_n$ と $\sum_{n \in P_L} a_n$ は共に収束する. したがって, 帰納法の仮定より, 任意の l , $l = 1, \dots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ は収束する. 逆に, 任意の l , $l = 1, \dots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が収束するならば, 帰納法の仮定より, $\sum_{n \in Q} a_n$ は収束するので, 命題 2 より $\sum_{n \in P} a_n$ は収束する.

命題 2 より $\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in Q} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n$ であり, 帰納法の仮定より $\sum_{n \in Q} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n$ であるから

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n = \sum_{l=1}^L \sum_{n \in P_l} a_n$$

である. ■

系 1 の対偶をとれば, $\sum_{n \in P} a_n$ が $+\infty$ に発散することと, 少なくとも一つの l , $l = 1, \dots, L$ が存在して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が $+\infty$ に発散することは同値であり, このとき式 (3) の両辺は $+\infty$ となるので, 式 (3) は級数の収束・発散に関わらず成り立つことになる.