

# 正項級数の和の分割について

katatoshi

2018 年 4 月 24 日

$P \subseteq \mathbf{N}$  に対して,  $P$  の有限部分集合全体の集合を  $\mathcal{F}(P)$  で表わす.  $P \subseteq \mathbf{N}$ ,  $P \neq \emptyset$  から  $\mathbf{R}$  への写像  $a: P \rightarrow \mathbf{R}$  を数列と呼び,  $(a_n)_{n \in P}$  で表わす.  $F \in \mathcal{F}(P)$  に対して  $s_F = \sum_{n \in F} a_n$  とするとき,  $\mathcal{F}(P)$  から  $\mathbf{R}$  への写像  $F \mapsto s_F$  を級数と呼び,  $\sum_{n \in P} a_n$  で表わす.  $s_F$  を級数  $\sum_{n \in P} a_n$  の部分和と呼び, 任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して  $a_n \geq 0$  であるとき, 級数  $\sum_{n \in P} a_n$  を正項級数と呼ぶ. 以下, 正項級数についてのみ考える. 正項級数  $\sum_{n \in P} a_n$  に対して

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$$

を正項級数  $\sum_{n \in P} a_n$  の和と呼び, 同じく  $\sum_{n \in P} a_n$  で表わす.  $\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F < +\infty$  であるとき正項級数  $\sum_{n \in P} a_n$  は収束するという.

**命題 1**  $P, P_1, P_2 \subseteq \mathbf{N}$ ,  $P \neq \emptyset$ ,  $P_1 \neq \emptyset$ ,  $P_2 \neq \emptyset$ ,  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ ,  $P_1 \cup P_2 = P$  とする. このとき正項級数  $\sum_{n \in P} a_n$  が収束するための必要十分条件は  $\sum_{n \in P_1} a_n$  と  $\sum_{n \in P_2} a_n$  が共に収束することである. そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である.

**証明** (必要性)  $F_1$  を  $\mathcal{F}(P_1)$  の任意の元,  $F_2$  を  $\mathcal{F}(P_2)$  の任意の元とする.  $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(P)$  より  $s_{F_1} + s_{F_2} = s_{F_1 \cup F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$  であるから

$$\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n = \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F = \sum_{n \in P} a_n \quad (1)$$

である.  $\sum_{n \in P} a_n$  は収束するので  $\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \leq \sum_{n \in P} a_n < +\infty$  である. したがって  $\sum_{n \in P_1} a_n$ ,  $\sum_{n \in P_2} a_n$  は収束する.

(十分性) 任意の  $F \in \mathcal{F}(P)$  は  $F = F_1 \cup F_2$ ,  $F_1 \in \mathcal{F}(P_1)$ ,  $F_2 \in \mathcal{F}(P_2)$  と表わされるので  $s_F = s_{F_1} + s_{F_2} \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2}$  である。したがって

$$\sum_{n \in P} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \quad (2)$$

である。  $\sum_{n \in P_1} a_n$ ,  $\sum_{n \in P_2} a_n$  は収束するので  $\sum_{n \in P} a_n \leq \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n < +\infty$  である。したがって  $\sum_{n \in P} a_n$  は収束する。

(1), (2) より

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である。 ■

系 1  $P \subseteq \mathbf{N}$ ,  $P_l \subseteq \mathbf{N}$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,  $L \geq 2$ ,  $P \neq \emptyset$ ,  $P_l \neq \emptyset$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,  $P_l \cap P_{l'} = \emptyset$ ,  $l \neq l'$ ,  $P = \bigcup_{l=1}^L P_l$  とする。このとき正項級数  $\sum_{n \in P} a_n$  が収束するための必要十分条件は任意の  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$  に対して  $\sum_{n \in P_l} a_n$  が収束することである。そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^L \sum_{n \in P_l} a_n$$

である。

証明  $L$  についての数学的帰納法で証明する。  $L = 2$  ならば命題 1 より主張は正しい。

$L > 2$  とし,  $L - 1$  に対しては主張は正しいと仮定する。  $Q = P_1 \cup \dots \cup P_{L-1}$  とすると,  $Q \neq \emptyset$ ,  $Q \cap P_L = \emptyset$ ,  $Q \cup P_L = P$  である。いま,  $\sum_{n \in P} a_n$  が収束するならば, 命題 1 より  $\sum_{n \in Q} a_n$  と  $\sum_{n \in P_L} a_n$  は共に収束する。したがって, 帰納法の仮定より, 任意の  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$  に対して  $\sum_{n \in P_l} a_n$  は収束する。逆に, 任意の  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$  に対して  $\sum_{n \in P_l} a_n$  が収束するならば, 帰納法の仮定より,  $\sum_{n \in Q} a_n$  は収束するので, 命題 1 より  $\sum_{n \in P} a_n$  は収束する。

命題 1 より  $\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in Q} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n$  であり, 帰納法の仮定より  $\sum_{n \in Q} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n$  であるから

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n = \sum_{l=1}^L \sum_{n \in P_l} a_n$$

である。 ■