Carathéodory の拡張定理

katatoshi

2018 年 4 月 23 日

集合 X の部分集合族 $\mathcal{G}$ 上で定義された関数 $\mu : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ が**前測度**（pre-measure）であるとは以下の性質をみたすことである．

(1) $\varnothing \in \mathcal{G}$ ならば $\mu(\varnothing) = 0$

(2) $\mathcal{G}$ の元の列 $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ が互いに素，すなわち $i \neq j$ ならば $G_i \cap G_j = \varnothing$，であり $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \in \mathcal{G}$ ならば $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i)$

σ-加法族上の前測度は測度に他ならない．

集合 X の部分集合族 $\mathcal{S}$ は以下の性質をみたすとき（X 上の）**集合の半環**（semi-ring of sets）[1]と呼ばれる．

(1) $\varnothing \in \mathcal{S}$

(2) $S, T \in \mathcal{S}$ ならば $S \cap T \in \mathcal{S}$

(3) $S, T \in \mathcal{S}$ ならば有限個の互いに素な $\mathcal{S}$ の元 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ が存在して $S \setminus T = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

集合 X の部分集合族 $\mathcal{R}$ は以下の性質をみたすとき（X 上の）**集合の環**（ring of sets）と呼ばれる．

(1) $\varnothing \in \mathcal{R}$

(2) $S, T \in \mathcal{R}$ ならば $S \cup T \in \mathcal{R}$

(3) $S, T \in \mathcal{R}$ ならば $S \setminus T \in \mathcal{R}$

[1] 半加法族と呼んでいるテキストもある．しかし semi-ring をそのように呼んでしまうと次に述べる ring を加法族と呼びたくなり algebra と呼ばれる集合族と紛らわしい（σ-algebra を σ-加法族と呼ぶのと同じように algebra を加法族と呼びたくなる）．そこでこの文章では semi-ring を集合の半環と呼び ring を集合の環と呼ぶことにした．なお，ring $\mathcal{R}$ は $X \in \mathcal{R}$ であるとき algebra と呼ばれる．ring は必ずしも X を含まないため ring と algebra は異なる概念である．

集合の環 $\mathcal{R}$ の元 S,T について $S \cap T = S \setminus (S \setminus T) \in \mathcal{R}$ が成り立つので，集合の環は共通部分についても閉じている．集合の環は集合の半環であり，σ-加法族は集合の環である．

$\mathfrak{R}$ をすべての元が集合 X 上の集合の環であるような集合族とする．するとその共通部分 $\bigcap \mathfrak{R} = \{S \mid \forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R}(S \in \mathcal{R})\}$ は再び集合 X 上の集合の環となる．

実際，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ について $\varnothing \in \mathcal{R}$ であるから $\varnothing \in \bigcap \mathfrak{R}$ となり (1) をみたす．次に，$S,T \in \bigcap \mathfrak{R}$ ならば，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ について $S,T \in \mathcal{R}$ であるから，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ について $S \cup T \in \mathcal{R}$ である．よって，$S \cup T \in \bigcap \mathfrak{R}$ となり (2) をみたす．(3) をみたすことは (2) と同様にして確認できる．

集合 X の部分集合族 $\mathcal{G}$ に対して，$\mathcal{G}$ を包むような X 上の集合の環の全体の集合族を $\mathfrak{R}$ とすると，$\bigcap \mathfrak{R}$ は $\mathcal{G} \subseteq \bigcap \mathfrak{R}$ をみたす集合 X 上の集合の環であり，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ について $\bigcap \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{R}$ である．すなわち，$\bigcap \mathfrak{R}$ は $\mathcal{G}$ を包むような X 上の集合の環の中で最小のものであり，これを $\mathcal{G}$ によって**生成された**集合の環と呼び，ここでは $\rho(\mathcal{G})$ で表すことにする．

命題 1　$\mathcal{S}$ を集合 X 上の集合の半環とすると

$$\rho(\mathcal{S}) = \{S_1 \cup \cdots \cup S_n \mid n \in \boldsymbol{N}, S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S} \text{ は互いに素 }\}$$

証明　右辺の集合を $\mathcal{U}$ とおく．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \rho(\mathcal{S})$ であるから，$\mathcal{U}$ が集合の環であることを示せば，$\rho(\mathcal{S})$ が $\mathcal{S}$ を包む最小の集合の環であることから $\rho(\mathcal{S}) = \mathcal{U}$ となる．

$\mathcal{U}$ が集合の環の性質 (1), (2), (3) をみたすことを示す．$\varnothing \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ であるから，$\mathcal{U}$ は (1) をみたす．次に，$S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$, $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n \in \mathcal{U}$ とおく．$\mathcal{U}$ はその定義から互いに素な集合の和集合について閉じており，$S_i \cap T_j$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ は互いに素であるから

$$S \cap T = (S_1 \cup \cdots \cup S_m) \cap (T_1 \cup \cdots \cup T_n) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (S_i \cap T_j) \in \mathcal{U}$$

となり，$\mathcal{U}$ は共通部分について閉じている．$\mathcal{U}$ が共通部分について閉じていることと，集合の半環の性質 (3) より $S_i \setminus T_j \in \mathcal{U}$, $i = 1, \cdots m$, $j = 1, \cdots n$ が成り立つことから

$$S \setminus T = (S_1 \cup \cdots \cup S_m) \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_n) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n} (S_i \setminus T_j) \in \mathcal{U}$$

である．したがって，$\mathcal{U}$ は (3) をみたす．$\mathcal{U}$ は差集合，共通部分，互いに素な集合の和集合について閉じているので

$$S \cup T = (S \setminus T) \cup (S \cap T) \cup (T \setminus S) \in \mathcal{U}$$

となり，$\mathcal{U}$ は (2) をみたす． ■

命題 2　$\mathcal{S}$ を集合 X 上の集合の半環とし，$\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ を $\mathcal{S}$ 上の前測度とする．このとき，μ は集合の環 $\rho(\mathcal{S})$ 上の前測度 $\bar{\mu} : \rho(\mathcal{S}) \to [0,\infty]$ に一意に拡張される．

集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 上で定義された関数 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ が**外測度**（outer measure）であるとは以下の性質をみたすことである．

(1) $\mu^*(\varnothing) = 0$
(2)（単調性）$A \subseteq B$ ならば $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$
(3)（σ-劣加法性）$\mathcal{P}(X)$ の元の列 $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して，$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

命題 3　X を集合とし，μ^* を $\mathcal{P}(X)$ 上の外測度とする．X の部分集合族 $\mathcal{A}^*$ を

$$\mathcal{A}^* = \{A \subseteq X \mid \forall Q \subseteq X(\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A))\}$$

と定義すると，$\mathcal{A}^*$ は σ-加法族となる．また，μ^* の $\mathcal{A}^*$ への制限 $\mu^*|_{\mathcal{A}^*} : \mathcal{A}^* \to [0,\infty]$ は $(X, \mathcal{A}^*)$ 上の測度となる．

命題 3 の σ-加法族 $\mathcal{A}^*$ の元 $A \in \mathcal{A}^*$ を μ^*-**可測集合**という．

$\mathcal{G}$ を集合 X の部分集合族とする．$\mathcal{G}$ の元の列 $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ が X の部分集合 $A \in \mathcal{P}(X)$ の $\mathcal{G}$-被覆であるとは，$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ が成り立つことをいう．$A \in \mathcal{P}(X)$ の $\mathcal{G}$-被覆全体の集合を $\mathcal{C}(A)$ とする．

命題 4　$\mathcal{G}$ を $\varnothing \in \mathcal{G}$ であるような X の部分集合族とし，関数 $\mu : \mathcal{G} \to [0,\infty]$ を前測度とする[2]．このとき，関数 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ を $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i) \;\middle|\; (S_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}(A)\right\}$$

と定めると μ^* は外測度となる．ただし $\inf\varnothing = \infty$ とする．

証明　$G_i = \varnothing, i \in \boldsymbol{N}$ とすると $(G_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}(\varnothing)$ であるから，$\mu^*(\varnothing) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) = 0$．$\mu^*(\varnothing) \ge 0$ であるから $\mu^*(\varnothing) = 0$ である．

[2] 前測度でなくとも $\mu(\varnothing) = 0$ でありさえすれば命題は成り立つが，前測度でない場合には関心がないため，μ は前測度であると仮定する．

$A \subseteq B$ とすると $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$ であるから

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(G_i) \;\middle|\; (G_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}(A)\right\} \\ &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(G_i) \;\middle|\; (G_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C}(B)\right\} \\ &= \mu^*(B)\end{aligned}$$

である．よって μ^* は単調性をみたす．

$A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in \boldsymbol{N}$ とする．$\mu^*(A_i) = \infty$ となる $i \in \boldsymbol{N}$ が存在するか，任意の $i \in \boldsymbol{N}$ に対して $\mu^*(A_i) < \infty$ であるが $\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) = \infty$ となる場合，$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \infty$ より $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ となる．

任意の $i \in \boldsymbol{N}$ に対して $\mu^*(A_i) < \infty$ であり，$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) < \infty$ であるとする．このとき，任意の $i \in \boldsymbol{N}$ に対して $\mathcal{C}(A_i) \neq \varnothing$ が成り立つ．下限の性質から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(G_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2i}$$

となるような被覆 $(G_{ij})_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{C}(A_i)$ が各 $i \in \boldsymbol{N}$ に対して存在する．両辺の i についての和をとると

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(G_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) + \varepsilon$$

となるので，$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(G_{ij}) < \infty$ である．よって，杉浦 [4] 定理 5.4 より

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu(G_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(G_{ij}) < \infty$$

である．すなわち，正項二重級数 $\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu(G_{ij})$ は収束するので，杉浦 [4] 定理 5.5 より，$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ への全単射 ϕ を一つとると，一列化 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(G_{\phi(k)})$ は収束し，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(G_{\phi(k)}) = \sum_{i,j=1}^{\infty}\mu(G_{ij})$$

である．$\mathcal{G}$ の元の列 $(G_{\phi(k)})_{k=1}^{\infty}$ は $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ の $\mathcal{G}$-被覆であるから[3]，μ^* の定義より

$$
\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_{\phi(k)}) \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

である．ε は任意であったから，$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ となる．よって，μ^* は σ-劣加法性をみたす． ■

命題 4 の外測度 μ^* を，前測度 μ から**誘導された**外測度という．

命題 5　$\mathcal{S}$ を集合 X 上の集合の半環とし，μ を $\mathcal{S}$ 上の前測度とする．このとき，μ から誘導された外測度 μ^* は μ の $\mathcal{P}(X)$ への拡張となっている．

命題 6　$\mathcal{S}$ を集合 X 上の集合の半環，μ を $\mathcal{S}$ 上の前測度，μ^* を μ から誘導された外測度とする．このとき，$S \in \mathcal{S}$ は μ^*-可測集合である．

定理 1（Carathéodory）　$\mathcal{S}$ を集合 X 上の集合の半環とし，μ を $\mathcal{S}$ 上の前測度とする．このとき，μ は $\sigma(\mathcal{S})$ 上の測度へ拡張することができる．さらに，$\mathcal{S}$ の元の単調増加列 $(S_i)_{i=1}^{\infty}$ で，$S_i \uparrow X$ かつ任意の $i \in \boldsymbol{N}$ について $\mu(S_i) < \infty$ をみたすようなものが存在するならば，$\sigma(\mathcal{S})$ への拡張は一意である．

証明　（存在すること）μ から誘導された外測度を μ^* とし，μ^*-可測集合全体の集合を $\mathcal{A}^*$ とする．命題 6 より $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$ であり，命題 3 より $\mathcal{A}^*$ は σ-加法族であるから，$\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}^*$ が成り立つ．再び命題 3 より，$\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ は $\mathcal{A}^*$ 上の測度であるから，その $\sigma(\mathcal{S})$ への制限 $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ は $\sigma(\mathcal{S})$ 上の測度である．定理 5 より，μ^* は μ の $\mathcal{P}(X)$ への拡張になっているので，$\mu^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ は μ の $\sigma(\mathcal{S})$ への拡張である．

（一意であること）$\mathcal{S}$ の元の単調増加列 $(S_i)_{i=1}^{\infty}$ で，$S_i \uparrow X$ かつ任意の $i \in \boldsymbol{N}$ について $\mu(S_i) < \infty$ をみたすようなものが存在するならば，集合の半環 $\mathcal{S}$ は共通部分について閉

[3] $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ならば $x \in A_i$ となる $i \in \boldsymbol{N}$ が存在する．$(G_{ij})_{j=1}^{\infty}$ は A_i の被覆であるから，$x \in G_{ij}$ となる $j \in \boldsymbol{N}$ が存在する．したがって，$x \in G_{\phi(\phi^{-1}(i,j))} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\phi(k)}$ である．

じているので，Schilling[2] の定理 5.7（測度の一意性定理）より，μ の $\sigma(\mathcal{S})$ への拡張は一意である． ■

参考文献

[1] R.M. Dudley, *Real analysis and probability* 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press , 2002.

[2] René L. Schilling, *Measures, integrals and martingales*, Cambridge University Press, 2011.

[3] 岩田耕一郎『ルベーグ積分：理論と計算手法』森北出版, 2015.

[4] 杉浦光夫『解析入門』東京大学出版会, 1980.