正項級数の和の分割について

katatoshi

2018 年 4 月 25 日

$P \subseteq \mathbf{N}$ に対して，P の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{F}(P)$ で表わす．$P \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \varnothing$ から $\mathbf{R}$ への写像 $a\colon P \to \mathbf{R}$ を数列と呼び，$(a_n)_{n \in P}$ で表わす．$F \in \mathcal{F}(P)$ に対して $s_F = \sum_{n \in F} a_n$ とするとき，$\mathcal{F}(P)$ から $\mathbf{R}$ への写像 $F \mapsto s_F$ を級数と呼び，$\sum_{n \in P} a_n$ で表わす．s_F を級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の部分和と呼び，任意の $n \in P$ に対して $a_n \geq 0$ であるとき，級数 $\sum_{n \in P} a_n$ を正項級数と呼ぶ．以下，正項級数についてのみ考える．正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ に対して

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$$

を正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の和と呼び，同じく $\sum_{n \in P} a_n$ で表わす．$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F < +\infty$ であるとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ は収束するという．

この正項級数の和の定義は，部分和の極限として定義する一般的な和の定義と一致する．

命題 1　任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \geq 0$ であるような数列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ について

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

である．

証明　$s = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$, $t = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$ とする．$t_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, $m \in \mathbf{N}$ とすると $(t_m)_{m \in \mathbf{N}}$ は単調増加列であるから $t = \sup_{m \in \mathbf{N}} t_m$ である．いま，F を $\mathcal{F}(\mathbf{N})$ の任意の元とすると，$s_F \leq t_{\max F} \leq t$ であるから $s = \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbf{N})} s_F \leq t$ である．逆に，任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $F = \{1, \cdots, m\}$ とすると $F \in \mathcal{F}(\mathbf{N})$ であるから $t_m = s_F \leq s$ である．したがって $t = \sup_{m \in \mathbf{N}} t_m \leq s$ である．■

正項級数の和は，和をとる範囲を分割して計算することができる．

命題 2　$P, P_1, P_2 \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \varnothing$, $P_1 \neq \varnothing$, $P_2 \neq \varnothing$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, $P_1 \cup P_2 = P$ とする．このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は $\sum_{n \in P_1} a_n$ と $\sum_{n \in P_2} a_n$ が共に収束することである．そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である．

証明　（必要性）F_1 を $\mathcal{F}(P_1)$ の任意の元，F_2 を $\mathcal{F}(P_2)$ の任意の元とする．$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(P)$ より $s_{F_1} + s_{F_2} = s_{F_1 \cup F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$ であるから

$$\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n = \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F = \sum_{n \in P} a_n \tag{1}$$

である．$\sum_{n \in P} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \leq \sum_{n \in P} a_n < +\infty$ である．したがって $\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束する．

（十分性）任意の $F \in \mathcal{F}(P)$ は $F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}(P_1)$, $F_2 \in \mathcal{F}(P_2)$ と表わされるので $s_F = s_{F_1} + s_{F_2} \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2}$ である．したがって

$$\sum_{n \in P} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \tag{2}$$

である．$\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P} a_n \leq \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n < +\infty$ である．したがって $\sum_{n \in P} a_n$ は収束する．

(1)，(2) より

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である．■

系 1　$P \subseteq \mathbf{N}, P_l \subseteq \mathbf{N}, l = 1, \cdots, L, L \geq 2, P \neq \varnothing, P_l \neq \varnothing, l = 1, \cdots, L, P_l \cap P_{l'} = \varnothing$, $l \neq l'$, $P = \bigcup_{l=1}^{L} P_l$ とする．このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は任意の l, $l = 1, \cdots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が収束することである．そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^{L} \sum_{n \in P_l} a_n \tag{3}$$

である．

証明　L についての数学的帰納法で証明する．$L=2$ ならば命題 2 より主張は正しい．

$L>2$ とし，$L-1$ に対しては主張は正しいと仮定する．$Q=P_1\cup\cdots\cup P_{L-1}$ とすると，$Q\neq\emptyset$, $Q\cap P_L=\emptyset$, $Q\cup P_L=P$ である．いま，$\sum_{n\in P}a_n$ が収束するならば，命題 2 より $\sum_{n\in Q}a_n$ と $\sum_{n\in P_L}a_n$ は共に収束する．したがって，帰納法の仮定より，任意の l, $l=1,\cdots,L$ に対して $\sum_{n\in P_l}a_n$ は収束する．逆に，任意の l, $l=1,\cdots,L$ に対して $\sum_{n\in P_l}a_n$ が収束するならば，帰納法の仮定より，$\sum_{n\in Q}a_n$ は収束するので，命題 2 より $\sum_{n\in P}a_n$ は収束する．

命題 2 より $\sum_{n\in P}a_n=\sum_{n\in Q}a_n+\sum_{n\in P_L}a_n$ であり，帰納法の仮定より $\sum_{n\in Q}a_n=\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{n\in P_l}a_n$ であるから

$$\sum_{n\in P}a_n=\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{n\in P_l}a_n+\sum_{n\in P_L}a_n=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n\in P_l}a_n$$

である．■

系 1 の対偶をとれば，$\sum_{n\in P}a_n$ が $+\infty$ に発散することと，少なくとも一つの l, $l=1,\cdots,L$ が存在して $\sum_{n\in P_l}a_n$ が $+\infty$ に発散することは同値であり，このとき式 (3) の両辺は $+\infty$ となる．したがって，式 (3) は級数の収束，発散に関わらず成り立つことになる．