Stieltjes 測度について

katatoshi

2018 年 5 月 2 日

$\mathcal{I} = \{[a, b) \mid a \leq b\}$ とする．ただし $a = b$ ならば $[a, b) = \varnothing$ である．

命題 1　$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を単調増加な左連続関数とする．このとき

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$$

とすれば μ は $\mathcal{I}$ 上の前測度である．

証明　$\mu([0, 0)) = 0$ であるから $\mu(\varnothing) = 0$ は成り立つ．以下 σ-加法性を有限加法性，有限劣加法性，σ-加法性の順番で証明する．

（有限加法性）$I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, $i \neq j \Rightarrow I_i \cap I_j = \varnothing$, $\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{I}$ とする．このとき適当に順番を変えることによって $b_i = a_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ とできるので

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) &= \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) + F(b_n) - F(a_n) \\
&= F(b_n) - F(a_1) \\
&= \mu([a_1, b_n)) \\
&= \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって有限加法性をみたす．

（有限劣加法性）$I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, $I = [a, b)$ $(a < b)$, $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ とする．このとき $\mu(I) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)$ が成り立つことを示す．

n に関する数学的帰納法で証明する．$n = 1$ のとき $a_1 \leq a < b \leq b_1$ であり F が単調

増加関数であるから

$$\mu(I) = F(b) - F(a) \le F(b_1) - F(a_1) = \mu(I_1)$$

が成り立つので主張は正しい．

$n \ge 1$ について主張は正しいと仮定し $n+1$ についても主張が正しいことを示す．このとき $a \in [a_{i_0}, b_{i_0})$ であるような i_0 が存在する．$b \le b_{i_0}$ ならば $I \subseteq I_{i_0}$ であるから $n = 1$ のときと同様にして $\mu(I) \le \mu(I_{i_0}) \le \sum_{i=1}^{n+1} \mu(I_i)$ が成り立つ．$b_{i_0} < b$ ならば $[a, b)$ を $[a, b_{i_0})$ と $[b_{i_0}, b)$ に分割すれば $[b_{i_0}, b)$ は I_{i_0} 以外の n 個の区間で覆うことができるから帰納法の仮定と有限加法性より

$$\mu(I) = \mu([a, b_{i_0})) + \mu([b_{i_0}, b)) \le \mu(I_{i_0}) + \sum_{i \ne i_0} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(I_i)$$

である．よって主張は正しい．

（σ-加法性）$I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ $(i \in \mathbf{N})$, $\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}} I_i = [a, b)$ とする．F は単調増加な左連続関数であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $F(b) - F(b - \delta) \le \varepsilon$ すなわち $\mu([a, b)) \le \varepsilon + \mu([a, b - \varepsilon))$ が成り立つ．同様に各 $i \in \mathbf{N}$ について $\delta_i > 0$ が存在して $F(a_i) - F(a_i - \delta_i) \le 2^{-i}\varepsilon$ すなわち $\mu([a_i - \delta_i, b_i)) \le 2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i))$ が成り立つ．$[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (a_i - \delta_i, b_i)$ であるから $(a_i - \delta_i, b_i)$ $(i \in \mathbf{N})$ はコンパクト集合 $[a, b - \varepsilon]$ の開被覆である．したがって有限集合 $A \subseteq \mathbf{N}$ が存在して $[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i \in A} (a_i - \delta_i, b_i)$ が成り立つ．したがって $[a, b - \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in A} [a_i - \delta_i, b_i)$ であるから有限劣加法性より

$$\mu([a, b - \varepsilon)) \le \sum_{i \in A} \mu([a_i - \delta_i, b_i))$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
\mu([a, b)) - \varepsilon &\le \sum_{i \in A} (2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i)) \\
&\le \sum_{i \in \mathbf{N}} (2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i)) \\
&= \varepsilon + \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu([a_i, b_i))
\end{aligned}$$

すなわち $\mu(I) \le 2\varepsilon + \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i)$ が成り立つ，よって ε は任意であったから $\mu(I) \le \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i)$ である．

逆向きの不等式を証明する．任意の $n \in \mathbf{N}$ について $I_1, \cdots, I_n$ を a_i の小さい順に並び替えたものを $J_i = [c_i, d_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とすると $a \le c_1 < d_1 \le c_2 < d_2 \le \cdots \le$

$c_{n-1} < d_{n-1} \leq c_n < d_n \leq b$ であるから F の単調増加性より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(J_i)
&= (F(d_1) - F(c_1)) + (F(d_2) - F(c_2)) \\
&\quad + \cdots + (F(d_{n-1}) - F(c_{n-1})) + (F(d_n) - F(c_n)) \\
&= (F(d_n) - F(c_1)) \\
&\quad - (F(c_2) - F(d_1)) - \cdots - (F(c_n) - F(d_{n-1})) \\
&\leq F(d_n) - F(c_1) \\
&\leq F(b) - F(a) \\
&= \mu(I)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって n は任意であったから $\sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i) \leq \mu(I)$ である． ■

参考文献

[1] R.M. Dudley, *Real analysis and probability* 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press , 2002.

[2] René L. Schilling, *Measures, integrals and martingales* 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press , 2017.