正項級数の和の分割について

katatoshi

2018 年 4 月 25 日

$P \subseteq \mathbf{N}$ に対して，P の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{F}(P)$ で表わす．$P \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \varnothing$ から $\mathbf{R}$ への写像 $a\colon P \to \mathbf{R}$ を数列と呼び，$(a_n)_{n \in P}$ で表わす．$F \in \mathcal{F}(P)$ に対して $s_F = \sum_{n \in F} a_n$ とするとき，$\mathcal{F}(P)$ から $\mathbf{R}$ への写像 $F \mapsto s_F$ を級数と呼び，$\sum_{n \in P} a_n$ で表わす．s_F を級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の部分和と呼び，任意の $n \in P$ に対して $a_n \geq 0$ であるとき，級数 $\sum_{n \in P} a_n$ を正項級数と呼ぶ．以下，正項級数についてのみ考える．正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ に対して

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$$

を正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ の和と呼び，同じく $\sum_{n \in P} a_n$ で表わす．$\sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F < +\infty$ であるとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ は収束するという．

命題 1 $P, P_1, P_2 \subseteq \mathbf{N}$, $P \neq \varnothing$, $P_1 \neq \varnothing$, $P_2 \neq \varnothing$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, $P_1 \cup P_2 = P$ とする．このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は $\sum_{n \in P_1} a_n$ と $\sum_{n \in P_2} a_n$ が共に収束することである．そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である．

証明 （必要性）F_1 を $\mathcal{F}(P_1)$ の任意の元，F_2 を $\mathcal{F}(P_2)$ の任意の元とする．$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(P)$ より $s_{F_1} + s_{F_2} = s_{F_1 \cup F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F$ であるから

$$\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n = \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F = \sum_{n \in P} a_n \tag{1}$$

である．$\sum_{n \in P} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \leq \sum_{n \in P} a_n < +\infty$ である．したがって $\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束する．

（十分性）任意の $F \in \mathcal{F}(P)$ は $F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}(P_1)$, $F_2 \in \mathcal{F}(P_2)$ と表わされるので $s_F = s_{F_1} + s_{F_2} \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2}$ である．したがって

$$\sum_{n \in P} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}(P)} s_F \leq \sup_{F_1 \in \mathcal{F}(P_1)} s_{F_1} + \sup_{F_2 \in \mathcal{F}(P_2)} s_{F_2} = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n \tag{2}$$

である．$\sum_{n \in P_1} a_n$, $\sum_{n \in P_2} a_n$ は収束するので $\sum_{n \in P} a_n \leq \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n < +\infty$ である．したがって $\sum_{n \in P} a_n$ は収束する．

(1)，(2) より

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in P_1} a_n + \sum_{n \in P_2} a_n$$

である．■

系 1　$P \subseteq \mathbf{N}$, $P_l \subseteq \mathbf{N}$, $l = 1, \cdots, L$, $L \geq 2$, $P \neq \varnothing$, $P_l \neq \varnothing$, $l = 1, \cdots, L$, $P_l \cap P_{l'} = \varnothing$, $l \neq l'$, $P = \bigcup_{l=1}^{L} P_l$ とする．このとき正項級数 $\sum_{n \in P} a_n$ が収束するための必要十分条件は任意の l, $l = 1, \cdots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が収束することである．そしてこの条件が成り立つとき

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^{L} \sum_{n \in P_l} a_n$$

である．

証明　L についての数学的帰納法で証明する．$L = 2$ ならば命題 1 より主張は正しい．

$L > 2$ とし，$L - 1$ に対しては主張は正しいと仮定する．$Q = P_1 \cup \cdots \cup P_{L-1}$ とすると，$Q \neq \varnothing$, $Q \cap P_L = \varnothing$, $Q \cup P_L = P$ である．いま，$\sum_{n \in P} a_n$ が収束するならば，命題 1 より $\sum_{n \in Q} a_n$ と $\sum_{n \in P_L} a_n$ は共に収束する．したがって，帰納法の仮定より，任意の l, $l = 1, \cdots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ は収束する．逆に，任意の l, $l = 1, \cdots, L$ に対して $\sum_{n \in P_l} a_n$ が収束するならば，帰納法の仮定より，$\sum_{n \in Q} a_n$ は収束するので，命題 1 より $\sum_{n \in P} a_n$ は収束する．

命題 1 より $\sum_{n \in P} a_n = \sum_{n \in Q} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n$ であり，帰納法の仮定より $\sum_{n \in Q} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n$ であるから

$$\sum_{n \in P} a_n = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n \in P_l} a_n + \sum_{n \in P_L} a_n = \sum_{l=1}^{L} \sum_{n \in P_l} a_n$$

である．■