舟木確率論 1.5 ノート

katatoshi

2018 年 4 月 23 日

$p, q \in [0,1]$, $p+q=1$ とし，

$$\begin{gathered}\Omega = \{a,b\}^n = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{a,b\}\},\\ \sharp(a;\omega) = \sharp\{k \mid 0 \leq k \leq n, \omega_k = a\},\\ \sharp(b;\omega) = \sharp\{k \mid 0 \leq k \leq n, \omega_k = b\}.\end{gathered}$$

とする．$A \subseteq \Omega$ に対して

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p^{\sharp(a;\omega)} q^{\sharp(b;\omega)}$$

とする．

このとき，$P(\Omega) = 1$ である．実際，

$$\begin{aligned}P(\Omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} p^{\sharp(a;\omega)} q^{\sharp(b;\omega)}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sharp\{\omega \in \Omega \mid \sharp(a;\omega) = k\} p^k q^{(n-k)}\end{aligned}$$

であり，$\sharp(a;\omega) = k$ であるような ω の数は $\omega_1, \cdots, \omega_n$ の中から k 個選ぶ選び方の数だから $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ である．したがって，二項定理より，

$$\begin{aligned}P(\Omega) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\\ &= (p+q)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

である．

他の例として $A_1 = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = a\}$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= \sum_{\omega \in A_1} p^{\sharp(a;\omega)} q^{\sharp(b;\omega)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sharp\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = a, \sharp(a;\omega) = k\} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sharp\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = a, \sharp(a;\omega) = k\} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sharp\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = a, \sharp(a;\omega) = k+1\} p^{k+1} q^{n-(k+1)} \\
&= p \sum_{k=0}^{n-1} \sharp\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = a, \sharp(a;\omega) = k+1\} p^k q^{(n-1)-k} \\
&= p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{(n-1)-k} \\
&= p(p+q)^{n-1} \\
&= p
\end{aligned}
$$

である.

参考文献

[1] 舟木直久『確率論』朝倉書店, 2004.