

Stieltjes 測度について

katatoshi

2018 年 5 月 2 日

$\mathcal{I} = \{[a, b) \mid a \leq b\}$ とする. ただし $a = b$ ならば $[a, b) = \emptyset$ である.

命題 1 $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を単調増加な左連続関数とする. このとき

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$$

とすれば μ は \mathcal{I} 上の前測度である.

証明 $\mu([0, 0)) = 0$ であるから $\mu(\emptyset) = 0$ は成り立つ. 以下 σ -加法性を有限加法性, 有限劣加法性, σ -加法性の順番で証明する.

(有限加法性) $I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$), $i \neq j \Rightarrow I_i \cap I_j = \emptyset$, $\bigsqcup_{i=1}^n I_i \in \mathcal{I}$ とする. このとき適当に順番を変えることによって $b_i = a_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) とできるので

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu(I_i) &= \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) + F(b_n) - F(a_1) \\ &= F(b_n) - F(a_1) \\ &= \mu([a_1, b_n)) \\ &= \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n I_i\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって有限加法性をみたす.

(有限劣加法性) $I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$), $I = [a, b)$ ($a < b$), $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ とする. このとき $\mu(I) \leq \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$ が成り立つことを示す.

n に関する数学的帰納法で証明する. $n = 1$ のとき $a_1 \leq a < b \leq b_1$ であり F が単調

増加関数であるから

$$\mu(I) = F(b) - F(a) \leq F(b_1) - F(a_1) = \mu(I_1)$$

が成り立つので主張は正しい。

$n \geq 1$ について主張は正しいと仮定し $n+1$ についても主張が正しいことを示す。このとき $a \in [a_{i_0}, b_{i_0})$ であるような i_0 が存在する。 $b \leq b_{i_0}$ ならば $I \subseteq I_{i_0}$ であるから $n=1$ のときと同様にして $\mu(I) \leq \mu(I_{i_0}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mu(I_i)$ が成り立つ。 $b_{i_0} < b$ ならば $[a, b)$ を $[a, b_{i_0})$ と $[b_{i_0}, b)$ に分割すれば $[b_{i_0}, b)$ は I_{i_0} 以外の n 個の区間で覆うことができるから帰納法の仮定と有限加法性より

$$\mu(I) = \mu([a, b_{i_0})) + \mu([b_{i_0}, b)) \leq \mu(I_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(I_i)$$

である。 よって主張は正しい。

(σ -加法性) $I_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$ ($i \in \mathbf{N}$), $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} I_i = [a, b)$ とする。 F は単調増加な左連続関数であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $F(b) - F(b - \delta) \leq \varepsilon$ すなわち $\mu([a, b)) \leq \varepsilon + \mu([a, b - \varepsilon))$ が成り立つ。 同様に各 $i \in \mathbf{N}$ について $\delta_i > 0$ が存在して $F(a_i) - F(a_i - \delta_i) \leq 2^{-i}\varepsilon$ すなわち $\mu([a_i - \delta_i, b_i)) \leq 2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i))$ が成り立つ。 $[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (a_i - \delta_i, b_i)$ であるから $(a_i - \delta_i, b_i)$ ($i \in \mathbf{N}$) はコンパクト集合 $[a, b - \varepsilon]$ の開被覆である。 したがって有限集合 $A \subseteq \mathbf{N}$ が存在して $[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{i \in A} (a_i - \delta_i, b_i)$ が成り立つ。 したがって $[a, b - \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in A} [a_i - \delta_i, b_i)$ であるから有限劣加法性より

$$\mu([a, b - \varepsilon)) \leq \sum_{i \in A} \mu([a_i - \delta_i, b_i))$$

である。 したがって

$$\begin{aligned} \mu([a, b)) - \varepsilon &\leq \sum_{i \in A} (2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i))) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbf{N}} (2^{-i}\varepsilon + \mu([a_i, b_i))) \\ &= \varepsilon + \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu([a_i, b_i)) \end{aligned}$$

すなわち $\mu(I) \leq 2\varepsilon + \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i)$ が成り立つ、 よって ε は任意であったから $\mu(I) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i)$ である。

逆向きの不等式を証明する。 任意の $n \in \mathbf{N}$ について I_1, \dots, I_n を a_i の小さい順に並び替えたものを $J_i = [c_i, d_i)$ ($i = 1, \dots, n$) とすると $a \leq c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \leq \dots \leq$

$c_{n-1} < d_{n-1} \leq c_n < d_n \leq b$ であるから F の単調増加性より

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \mu(I_i) &= \sum_{i=1}^n \mu(J_i) \\
&= (F(d_1) - F(c_1)) + (F(d_2) - F(c_2)) \\
&\quad + \cdots + (F(d_{n-1}) - F(c_{n-1})) + (F(d_n) - F(c_n)) \\
&= (F(d_n) - F(c_1)) \\
&\quad - (F(c_2) - F(d_1)) - \cdots - (F(c_n) - F(d_{n-1})) \\
&\leq F(d_n) - F(c_1) \\
&\leq F(b) - F(a) \\
&= \mu(I)
\end{aligned}$$

が成り立つ． よって n は任意であったから $\sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(I_i) \leq \mu(I)$ である． ■

参考文献

- [1] R.M. Dudley, *Real analysis and probability* 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press , 2002.
- [2] Ren L. Schilling, *Measures, integrals and martingales* 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press , 2017.