

1 Funktionen in  $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ :

- Positive Definitheit**  
 $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Triviale Metrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Französische Eisenbahnmetrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in  $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

**Positive Definitheit**  $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$

**Homogenität**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

**Dreiecksungleichung**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$l_1\text{-Norm } \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$l_p\text{-Norm } \|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$$

$$\text{Maximum-Norm } \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

**Satz** Jede Norm induziert über  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A &= \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A \\ \langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A &= \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A \end{aligned}$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

**Symmetrie:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

**Positive Definitheit:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix  $B$  erzeugt eine Bilinearform über  $x^T B y$

1.4 Topologie in  $\mathbb{R}^n$

**Offene Kugel mit Radius r um a:**

$$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

**Innerer Punkt**  $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

**Offenes Intervall:** Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$$

**Abgeschlossenes Intervall:** Komplement ist offen

$$\text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}$$

**Beschränkt:**  $\exists M \in \mathbb{R} : A \subseteq U_M(0)$

**Kompakt:** Abgeschlossen und beschränkt

**Mengenoperationen**

$$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$$

$$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$$

1.5 Folgen in  $\mathbb{R}^n$

**Konvergenz:**

$$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$$

**Mehrdimensionale Konvergenz:** Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

**Cauchyfolge:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$$

**Banachraum:** Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

$$\text{Bsp: } \mathbb{R}^n \text{ mit } l_p\text{-Norm}$$

1.6 Funktionen

**Graph von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :**

$$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$$

**Höhen/Niveaulinie von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$**

$$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

**Niveaulfläche von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :**

$$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

**Eindimensionaler Schnitt**

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n) \text{ mit } a_k \text{ konst.}$$

**Kurve**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $f(x_1, \dots, x_n)$ , dann ist  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $f(\phi(t))$  die Funktion entlang dieser Kurve.

**Stetigkeit von Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\varepsilon - \delta$ -Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

**Satz** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn dies für die Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  gilt.

**Polynom in n Variablen vom Grad m**

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

mit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  Multiindex,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  (Vorfaktoren) und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

2 Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in  $\mathbb{R}^1$

**Linearität**  $(f + g)' = f' + g' \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

$$\text{Produkt } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{Quot. } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Ketten  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  Potenzen  $(x^n)' = n x^{n-1}$

**Basics**

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \mid \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \mid (\sin(x))' = \cos(x) \mid (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$\text{Shortcuts } (a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \mid (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mid (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \mid$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

$$\text{Weitere } (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \mid \arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1} \mid \arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mid$$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2 Richtungsableitungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $e \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung mit  $\|e\| = 1$ . Dann heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in D$  **in Richtung  $e$  differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} \text{ existiert.}$$

**Satz** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$  genau dann in Richtung  $e$  differenzierbar, wenn die Funktion  $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$  im Punkt  $t_0 = 0$  nach  $t$  differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $e$  gleich der Ableitung von  $\varphi_e(t)$  im Punkt  $t_0 = 0$ .

2.3 Die Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, dann heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $a \in D$ , wenn es  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

**Jacobimatrix & Hessematrix**

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

**Tangentialebene an Punkt a**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) \text{ mit } x, a \in \mathbb{R}^n \text{ beziehungsweise}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$$

**Gradient**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Divergenz**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

**Rotation:**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

**Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $(a, b) \in D$  mit  $f(a, b) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $I$  von  $a$  und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a) = b$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0 \text{ für alle } x \in I$$

und es gibt ein  $c > 0$ , sodass für alle  $(x, y) \in D$  mit  $\|(x, y) - (a, b)\| < c$  und  $f(x, y) = 0$  gilt:  $y = h(x)$ .

**Taylorpolynome**

$$T(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a + h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)h + R \cdot (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

2.4 Analysis

Sattelpunkt, Extrema:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f'(t) = 0$   
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f(t) = 0 \iff J_f(t) = 0$  (Nullmatrix)  
Sattelpunkt in a  $\det(H_f(a)) < 0$  wobei gilt  
 $\text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$   
Extrema  $\det(H_f(a)) > 0$  und  
Maximum:  $H_f(a)$  negativ definit (z.B.  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$ )  
Minimum:  $H_f(a)$  positiv definit (z.B.  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$ )

2.5 Lagrange-Funktion

Funktion  $f(x, y) = x^4 + y^5$   
Nebenbedingung  $30 = 2x + 2y \iff g(x, y) = 30 - 2x - 2y = 0$   
Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$   
Vorgehen  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$  jeweils nach  $x, y, \lambda$  ableiten und daraus auflösen

3 Mehrdimensionale Integrale

Unbestimmte Integrale in  $\mathbb{R}$  Bei Integralen + C nicht vergessen!  
 $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) \mid \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2})$   
 $\int \cos(x) dx = \sin(x) \mid \int \sin(x) dx = -\cos(x)$   
 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \mid \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} \mid \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$   
 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a}) \mid \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arccos(\frac{x}{a}) \mid \int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$   
Partielle Integration  
 $\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$   
Wahl von f:  $\ln(x) > \arcsin(x) > x^n > \sin(x) > e^x$

4 Differenzialgleichungen

Homogene DGs 1. Ordnung: Trennung der Variablen  
DG heißt homogen, wenn gilt:  $g(x) = 0$

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$
$$\int \frac{1}{g(x)} dt = \int f(t) dt$$

- > Nach x auflösen  
Nichthomogene DGs 1. Ordnung Sei  $\dot{x} = ax + g(t)$  Differenzialgleichung und  $x_h(t)$  Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung  $\dot{x} = ax$ , dann ist  $\alpha x_h + x_p$  eine Lösung für die Diffentialgleichung.  
Beispiel Bestimmung von  $x_p$ :

$$\dot{x} = 2x - 4t^2 - 4t + 2$$

Dann haben  $x_p, \dot{x}_p$  die Form

$$x_p = c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_p = 2c_2 t + c_1$$

Einsetzen

$$\dot{x}_p - x_p = (-4t^2 - 4t + 2)$$
$$(2c_2 t + c_1) - 2(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) = (-4t^2 - 4t + 2)$$

→ Auflösen nach  $c_1, c_2, c_3$

Homogene DGs 2. Ordnung  $\ddot{x} = ax + b\dot{x}$   
Ansatz :  $x = e^{\lambda t}$   
Charakteristisches Polynom:  $(\lambda^2 - b\lambda - a)e^{\lambda t}$   
Nullstellen finden und Lambda einsetzen  
Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koef-fizienten  
Ausgangspunkt:  $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$   
Charakteristisches Polynom:  $\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$
$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{m_1} (\lambda - \lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}} + \underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} ((\lambda - \lambda_k)(\lambda - \overline{\lambda_k}))^{s_k}}_{\substack{\text{Komplexe Nullstellen} \\ \lambda_k = x_k + y_k i}}$$

Lösungsbasis:  
Sei  $\text{grad}(k)$  Grad der Nullstelle k und  $b > 0$  o.b.d.a., dann gilt:

$$\{t^q e^{\lambda t} \mid P(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}, t < \text{grad}(\lambda)\}$$
$$\cup \{t^q e^{at} \sin(bt) \mid P(a + bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a + bi)\}$$
$$\cup \{t^q e^{at} \cos(bt) \mid P(a + bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a + bi)\}$$

(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)  
Substitution Sei  $\dot{x} = f(at + bx + c)$  Differentialgleichung. Substituiere  $u = at + bx + c \implies \dot{u} = a + b \cdot \dot{x} = a + bf(u)$   
Substitution → Lösen der DG → Rücksubstitution. Beispiel:

$$\dot{x} = 2t - x, x(1) = 2$$
$$u(t) = 2t - x$$
$$u'(t) = 2 - u(t) = h(t)g(u)$$
$$h(t) = 1, g(u) = 2 - u$$
$$u(1) = 2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0$$
$$\int \frac{1}{2 - u} du = \int 1 dt$$
$$-\ln(2 - u) + a = t \quad c_1 - c_2 = a$$
$$\ln(2 - u) = a - t$$
$$u = 2 - e^{a-t} \rightarrow a = \ln(2) \mid u(1) = 0$$
$$x = 2t - u \leftarrow u = 2t - x$$
$$x = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

5 Anhang

Matrixindizes  

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

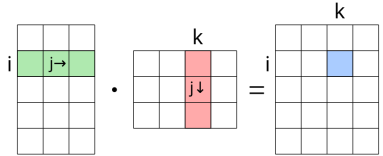
Inverse Matrix  

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinante  

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$
$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

Matrixmultiplikation



$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$
**abc-Formel**  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
**pq-formel**  $f(x) = x^2 + px + q$ 
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$