

# 1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Metrik

Eine Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ :

**Positive Definitheit**

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

**Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x)$

**Dreiecksungleichung**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Triviale Metrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Französische Eisenbahnmeterik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

## 1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

**Positive Definitheit**  $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$

**Homogenität**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

**Dreiecksungleichung**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**$l_1$ -Norm**  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

**$l_p$ -Norm**  $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$

**Maximum-Norm**  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

**Satz** Jede Norm induziert über  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.

## 1.3 Bilinearform

Eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

**Symmetrie:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

**Positive Definitheit:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix  $B$  erzeugt eine Bilinearform über  $x^T B y$

## 0.1 Topologie in $\mathbb{R}^n$

**Offene Kugel mit Radius  $r$  um  $a$ :**

$$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

**Innerer Punkt**  $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

**Offenes Intervall:** Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$$

**Abgeschlossenes Intervall:** Komplement ist offen

$$\text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}$$

**Beschränkt:**  $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

**Kompakt:** Abgeschlossen und beschränkt

## 0.2 Folgen in $\mathbb{R}^n$

**Konvergenz:**

$$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$$

**Mehrdimensionale Konvergenz:** Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

**Cauchyfolge:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$$

**Banachraum:** Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

$$\text{Bsp: } \mathbb{R}^n \text{ mit } l_p\text{-Norm}$$

## 0.3 Funktionen

**Graph von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :**

$$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$$

**Höhen/Niveaulinie von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$**

$$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

**Niveaufäche von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :**

$$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$