1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

Positive Definitheit

$d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$

Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Triviale Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y|| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ ||x|| + ||y|| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit

Positive Definitheit $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$

Homogenität $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

l_1**-Norm** $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

l_p**-Norm** $||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}$

Maximum-Norm $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,. \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt billinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$

$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:

$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$

Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$**:** $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen

bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$

Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen

$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$

1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:

$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N}; \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$

Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp: R^n mit l_p-Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**

$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m \in) D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\}$

Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$H_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$

Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**:**

$H_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$

Eindimensionaler Schnitt

$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.

Kurve

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \ldots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **(**$\varepsilon-\delta$**-Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x-a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$

Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ gilt.

Polynom in n **Variablen vom Grad** m

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = i}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

Linearität $(f+g)' = f' + g' \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$

Ableitung des Logarithmus $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ableitung der Sinusfunktion $(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

Ableitung der Kosinusfunktion $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$

Weitere

$(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ **in Richtung** e **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ existiert.

Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h).f(a) - Lh||}{||h||} = 0$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tangentialebene an Punkt a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ beziehungsweise

$T(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

Gradient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Divergenz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\operatorname{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a,b) \in D$ mit $f(a,b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass

$f(x, h(x)) = 0 \quad$ für alle $x \in I$

und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x,y) \in D$ mit $\|(x,y) - (a,b)\| < c$ und $f(x,y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

Taylorpolynome

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + R \cdot (x_1^2, \ldots, x_n^2)$$

2.4 Analysis

Sattelpunkt in a
Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
Hinreichende Eigenschaft: $\det(H_f(a)) < 0$
Maximum
Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
Hinreichende Eigenschaft:
$\det(H_f(a)) > 0$ und $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$)
Minimum
Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
Hinreichende Eigenschaft:
$\det(H_f(a)) > 0$ und $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$)

2.5 Lagrange-Funktion

Funktion $f(x, y) = x^4 + y^5$
Nebenbedingung $30 = 2x + 2y \iff g(x, y) = 30 - 2x - 2y = 0$
Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$
Vorgehen $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ jeweils nach x, y, λ ableiten und daraus aufösen

Selbsttransponierende Tichymatrix
Eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \wedge T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ heißt *selbsttransponierende Tichymatrix*, wenn für das Transponieren gilt:

$$T^T = T$$

wobei T^T die Transponierte von T bezeichnet. Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

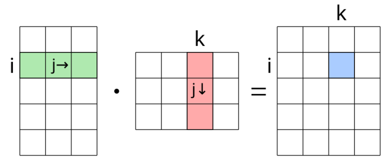
und die Tichy-Bedingung

$$t_1^2 = t_2^2 = t_3^2 = t_1 t_2 t_3 = -1$$

gilt. In diesem Fall ist die Tichymatrix ein Vektor, der unter Transposition seine Gestalt bewahrt und dabei stets freundlich bleibt.

3 Anhang

Matrixindizes
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$
Inverse Matrix
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
Determinante
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$
Matrixmultiplikation



$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$
abc-Formel $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
pq-formel $f(x) = x^2 + px + q$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Unbestimmte Integrale
$\int x \sin(x) dx = -x cos(x) + sin(x) + C$
$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} sin(\frac{x}{2}) + C$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
$\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + C$
$\int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}$
$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$