

1 Funktionen in \mathbb{R}^n

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

- Positive Definitheit**
 $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- Symmetrie** $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Triviale Metrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in \mathbb{R}^n

Eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

- Positive Definitheit** $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$
- Homogenität** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- Dreiecksungleichung** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$l_1\text{-Norm } \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$l_p\text{-Norm } \|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$

Maximum-Norm $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A &= \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A \\ \langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A &= \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A \end{aligned}$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

- Symmetrie:** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$
- Positive Definitheit:** $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in \mathbb{R}^n

Offene Kugel mit Radius r um a:

$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen

bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$

Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen

$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$

1.5 Folgen in \mathbb{R}^n

Konvergenz:

$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$

Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp: \mathbb{R}^n mit l_p -Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$

Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$

Niveaulfläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$

Eindimensionaler Schnitt

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.

Kurve

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \dots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve im \mathbb{R}^n und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\varepsilon - \delta$ -Kriterium) Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen f_1, \dots, f_m gilt.

Polynom in n Variablen vom Grad m

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n

2.1 Ableitungsregeln in \mathbb{R}^1

Linearität $(f + g)' = f' + g' \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Potenzregel $(x^n)' = n x^{n-1}$

Ableitung des Logarithmus $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ableitung der Sinusfunktion $(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

Ableitung der Kosinusfunktion $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$

Weitere

$(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ **in Richtung e differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ existiert.

Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tangentialebene an Punkt a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ beziehungsweise

$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

Gradient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Divergenz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass

$f(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in I$

und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x, y) \in D$ mit $\|(x, y) - (a, b)\| < c$ und $f(x, y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

Taylorpolynome

$$T(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a + h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)h + R \cdot (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

2.4 Analysis

Sattelpunkt in a

- Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
- Hinreichende Eigenschaft: $\det(H_f(a)) < 0$

Maximum

- Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
- Hinreichende Eigenschaft:
 $\det(H_f(a)) > 0$ und $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$)

Minimum

- Erforderliche Eigenschaft: $J_f(a) = 0$
- Hinreichende Eigenschaft:
 $\det(H_f(a)) > 0$ und $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$)

Selbsttransponierende Tichymatrix

Eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \wedge T \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ heißt *selbsttransponierende Tichymatrix*, wenn für das Transponieren gilt:

$T^T = T$

wobei T^T die Transponierte von T bezeichnet. Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = (t_1 \quad t_2 \quad t_3)$

und die Tichy-Bedingung

$t_1^2 = t_2^2 = t_3^2 = t_1 t_2 t_3 = -1$

gilt. In diesem Fall ist die Tichymatrix ein Vektor, der unter Transposition seine Gestalt bewahrt und dabei stets freundlich bleibt.

3 Anhang

Matrixindizes

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Inverse Matrix

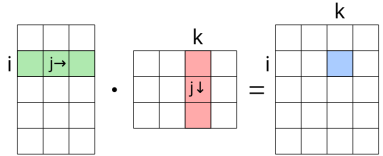
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Determinante

$\det \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$

Matrixmultiplikation



$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$

Unbestimmte Integrale

- $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$
- $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2}) + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$