1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

Positive Definitheit
$d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$

Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Triviale Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y|| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ ||x|| + ||y|| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit

Positive Definitheit $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$

Homogenität $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

l_1**-Norm** $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

l_p**-Norm** $||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}$

Maximum-Norm $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,. \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt billinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$

$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:
$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$

Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$**:** $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:
$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen
bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$

Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen
$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$
$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$

4 Quadrante $x, y \geq 0$ $x < 0, y \geq 0$ $x, y < 0$ $x \geq 0, y < 0$

1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:
$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N}; \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$

Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert
Bsp: R^n mit l_p-Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**
$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m \in) D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\}$

Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$H_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$

Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**:**
$H_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$

Eindimensionaler Schnitt
$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.

Kurve
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \ldots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **(**$\varepsilon-\delta$**-Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x-a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$

Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ gilt.

Polynom in n **Variablen vom Grad** m

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = i}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

Linearität $(f+g)' = f' + g'$ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produkt $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Quot.$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Ketten $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Potenzen $(x^n)' = nx^{n-1}$

Basics
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | $(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$ | $(\sin(x))' = \cos(x)$ | $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Shortcuts $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}^{n-1}}$ | $(\frac{1}{x^2})' = \frac{-2}{x^3}$

Weitere $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}$ | $\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ **in Richtung** e **differenzierbar**, wenn der Grenzwert
$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ existiert.

Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

mit Jacobimatrix In Punkt A in Richtung e ist $J_f(a) \cdot e_1$

mit Phi Im Punkt (x,y) in Richtung $e = (a,b)$
$\phi_{(a,b)}(t) = f(x + ta, y + tb)$ Dann $\phi'_{(a,b)}(t) = 0$

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h).f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tangentialebene an Punkt a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ beziehungsweise
$T(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

Gradient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Divergenz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a,b) \in D$ mit $f(a,b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass
$f(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in I$
und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x,y) \in D$ mit $\|(x,y) - (a,b)\| < c$ und $f(x,y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

Taylorpolynome
$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i h_j\right) + R$
$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + R\cdot(x_1^2,\dots,x_n^2)$

2.4 Analysis

Sattelpunkt, Extrema: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f'(t)=0$
$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: \nabla f(t)=0 \iff J_f(t)=0$ (Nullmatrix)
Sattelpunkt in a $\det(H_f(a))<0$ wobei gilt
$\mathrm{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \mathrm{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
Extrema $\det(H_f(a))>0$ und
Maximum: $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}<0$)
Minimum: $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}>0$)

2.5 Lagrange-Funktion

Funktion $f(x,y)=x^4+y^5$
Nebenbedingung $30=2x+2y \iff g(x,y)=30-2x-2y=0$
Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$
Vorgehen $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ jeweils nach x,y,λ ableiten und daraus aufösen

3 Mehrdimensionale Integrale

Unbestimmte Integrale in $\mathbb{R}$ Bei Integralen + C nicht vergessen!
$\int x\sin(x)dx = -x cos(x)+sin(x)$ | $\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}sin(2x)$ | $\int\sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$ | $\int\cos^2(x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$
$\int\cos(x)dx=\sin(x)$ | $\int\sin(x)dx=-\cos(x)$
$\int\frac{1}{x}dx=ln(x)$ | $\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}$ | $\int xe^{x^2}dx=\frac{e^{x^2}}{2}$ | $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}$
$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})$ | $\int\frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arccos(\frac{x}{a})$ | $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
Partielle Integration
$\int f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$
Wahl von f: $\ln(x)>\arcsin(x)>x^n>\sin(x)>e^x$

4 Differentialgleichungen

DGs 1. Ordnung $\dot{x}=ax+g(t)$ **Homogene DGs 1. Ordnung: Trennung der Variablen** DG heißt homogen, wenn gilt: $g(t)=0$

$$\dot{x}=f(t)h(x(t))$$
$$\int\frac{1}{h(s)}ds=\int f(t)dt$$

$\longrightarrow$ Nach x auflösen
Nichthomogene DGs 1. Ordnung Sei $\dot{x}=ax+g(t)$ Differentialgleichung und $x_h(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x}=ax$, dann ist αx_h+x_p eine Lösung für die Diffentialgleichung.
Beispiel Bestimmung von x_p:

$$\dot{x}=2x-4t^2-4t+2$$

Dann haben $x_p,\dot{x_p}$ die Form

$$x_p=c_2t^2+c_1t+c_0 \quad \texttt{und} \quad \dot{x_p}=2c_2t+c_1$$

Einsetzen

$$\dot{x_p}-x_p=(-4t^2-4t+2)$$
$$(2c_2t+c_1)-2(c_2t^2+c_1t+c_0)=(-4t^2-4t+2)$$

$\to$ Auflösen nach c_1,c_2,c_3
Homogene DGs 2. Ordnung $\ddot{x}=ax+b\dot{x}$
Ansatz : $x=e^{\lambda t}$
Charakteristisches Polynom: $(\lambda^2-b\lambda-a)e^{\lambda t}$
Nullstellen finden und Lambda einsetzen
Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koeffizienten
Ausgangspunkt: $x^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{(i)}$
Charakteristisches Polynom: $\lambda^n-\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\lambda)&=\lambda^n-\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i\\&=\underbrace{\prod_{k=1}^{m_1}(\lambda-\lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}}+\underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}((\lambda-\lambda_k)(\lambda-\overline{\lambda_k}))^{s_k}}_{\substack{\text{Komplexe Nullstellen}\\ \lambda_k=x_k+y_ki}}\end{aligned}$$

Lösungsbasis:
Sei grad(k) Grad der Nullstelle k und $b>0$ o.b.d.a., dann gilt:

$$\begin{aligned}&\{t^qe^{\lambda t}\mid P(\lambda)=0\wedge\lambda\in\mathbb{R},t<\mathrm{grad}(\lambda)\}\\ \cup&\{t^qe^{at}\sin(bt)\mid P(a+bi)=0\wedge t<\mathrm{grad}(a+bi)\}\\ \cup&\{t^qe^{at}\cos(bt)\mid P(a+bi)=0\wedge t<\mathrm{grad}(a+bi)\}\end{aligned}$$

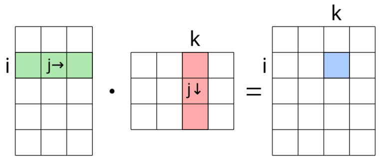
(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)
Substitution Sei $\dot{x}=f(at+bx+c)$ Differentialgleichung. Substituiere $u=at+bx+c \implies \dot{u}=a+b\cdot\dot{x}=a+bf(u)$
Substitution $\to$ Lösen der DG $\to$ Rücksubstitution. Beispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=2t-x,x(1)=2\\u(t)&=2t-x\\u'(t)&=2-u(t)=h(t)g(u)\\h(t)&=1,g(u)=2-u\\u(1)&=2\cdot1-2+0=0\\\int\frac{1}{2-u}du&=\int1dt\\-\ln(2-u)+a&=t\quad c_1-c_2=a\\\ln(2-u)&=a-t\\u&=2-e^{a-t}\to a=\ln(2)\mid u(1)=0\\x&=2t-u\leftarrow u=2t-x\\x&=2t-2+2e^{-t}\end{aligned}$$

Standardlösungen $\dot{x}=nx\to x=e^{nt+k}$

5 Anhang

Matrixindizes
$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$$
Inverse Matrix
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$
Determinante
$$\det\left(\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\right)=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=ad-bc$$
Matrixmultiplikation



$c_{ik}=\sum_{j=1}^n a_{ij}\cdot b_{jk}$
abc-Formel $f(x)=ax^2+bx+c=0$
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
pq-formel $f(x)=x^2+px+q$
$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$