

1 Funktionen in  $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ :

**Positive Definitheit**

$d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

**Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x)$

**Dreiecksungleichung**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Triviale Metrik:**

$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$

**Französische Eisenbahnmatrix:**

$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$

1.2 Normen in  $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

**Positive Definitheit**  $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$

**Homogenität**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

**Dreiecksungleichung**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**$l_1$ -Norm**  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

**$l_p$ -Norm**  $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$  mit  $p \geq 1$

**Maximum-Norm**  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

**Satz** Jede Norm induziert über  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$

$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

**Symmetrie:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

**Positive Definitheit:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix  $B$  erzeugt eine Bilinearform über  $x^T B y$

1.4 Topologie in  $\mathbb{R}^n$

**Offene Kugel mit Radius r um a:**

$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

**Innerer Punkt**  $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

**Offenes Intervall:** Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

**Abgeschlossenes Intervall:** Komplement ist offen

bsp:  $\mathbb{R}^n, \{\}$

**Beschränkt:**  $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

**Kompakt:** Abgeschlossen und beschränkt

**Mengenoperationen**

$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$

**4 Quadrante**  $x, y \geq 0 \mid x < 0, y \geq 0 \mid x, y < 0 \mid x \geq 0, y < 0$

1.5 Folgen in  $\mathbb{R}^n$

**Konvergenz:**

$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$

**Mehrdimensionale Konvergenz:** Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

**Cauchyfolge:**

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$

**Banachraum:** Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp:  $\mathbb{R}^n$  mit  $l_p$ -Norm

1.6 Funktionen

**Graph von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :**

$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$

**Höhen/Niveaulinie von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$**

$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$

**Niveaulfläche von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :**

$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$

**Eindimensionaler Schnitt**

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$  mit  $a_k$  konst.

**Kurve**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $f(x_1, \dots, x_n)$ , dann ist  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $f(\phi(t))$  die Funktion entlang dieser Kurve.

**Stetigkeit von Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\varepsilon - \delta$ -Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

**Satz** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn dies für die Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  gilt.

**Polynom in n Variablen vom Grad m**

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

mit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  Multiindex,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  (Vorfaktoren) und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

2 Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in  $\mathbb{R}^1$

**Linearität**  $(f + g)' = f' + g' \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produkt  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{Quot.} \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Ketten  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  Potenzen  $(x^n)' = n x^{n-1}$

**Basics**

$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \mid \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \mid (\sin(x))' = \cos(x) \mid (\cos(x))' = -\sin(x)$

**Shortcuts**  $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \mid (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mid (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$

**Weitere**  $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \mid \arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1} \mid \arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mid$

$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Richtungsableitungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $e \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung mit  $\|e\| = 1$ . Dann heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in D$  **in Richtung e differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$  existiert.

**Satz** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$  genau dann in Richtung  $e$  differenzierbar, wenn die Funktion  $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$  im Punkt  $t_0 = 0$  nach  $t$  differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $e$  gleich der Ableitung von  $\varphi_e(t)$  im Punkt  $t_0 = 0$ .

**mit Jacobimatrix** In Punkt  $A$  in Richtung  $e$  ist  $J_f(a) \cdot e$

**mit Phi** Im Punkt  $(x, y)$  in Richtung  $e = (a, b)$

$\phi_{(a,b)}(t) = f(x + ta, y + tb)$  Dann  $\phi'_{(a,b)}(t) = 0$

2.3 Die Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, dann heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $a \in D$ , wenn es  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$

**Jacobimatrix & Hessematrix**

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

**Tangentialebene an Punkt a**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$  mit  $x, a \in \mathbb{R}^n$  beziehungsweise

$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

**Gradient**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Divergenz**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

**Das totale Differential**

Sei  $f(x, y) = x^2 y^4, x(t) = \cos(t), y(t) = e^t$ , dann ist

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -2xy^4 \sin(t) + 4x^2 y^3 e^t$

**Rotation:**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

**Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $(a, b) \in D$  mit  $f(a, b) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $I$  von  $a$  und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a) = b$ , sodass

$f(x, h(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in I$

und es gibt ein  $c > 0$ , sodass für alle  $(x, y) \in D$  mit  $\|(x, y) - (a, b)\| < c$  und  $f(x, y) = 0$  gilt:  $y = h(x)$ .

**Implizites Differenzieren**  $h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

**Taylorpolynome**

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + R \cdot (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

**Vektorraumdarstellung**

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(P) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(P) \end{pmatrix}$$

## 2.4 Analysis

**Sattelpunkt, Extrema:**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f'(t) = 0$   
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f(t) = 0 \iff J_f(t) = 0$  (Nullmatrix)

**Sattelpunkt in a**  $\det(H_f(a)) < 0$  wobei gilt

$$\text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$$

**Extrema**  $\det(H_f(a)) > 0$  und

Maximum:  $H_f(a)$  negativ definit (z.B.  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$ )

Minimum:  $H_f(a)$  positiv definit (z.B.  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$ )

## 2.5 Lagrange-Funktion

**Funktion**  $f(x, y) = x^4 + y^5$

**Nebenbedingung**  $30 = 2x + 2y \iff g(x, y) = 30 - 2x - 2y = 0$

**Lagrange-Funktion**  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

**Vorgehen**  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$  jeweils nach  $x, y, \lambda$  ableiten und daraus auösen

# 3 Mehrdimensionale Integrale

**Unbestimmte Integrale in  $\mathbb{R}$**  **Bei Integralen + C nicht vergessen!**

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) \mid \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) \mid \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) \mid \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x))$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) \mid \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) \mid \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \mid \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} \mid \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin(\frac{x}{a}) \mid \int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arccos(\frac{x}{a}) \mid \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$$

**Partielle Integration**

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Wahl von f:  $\ln(x) > \arcsin(x) > x^n > \sin(x) > e^x$

# 4 Differentialgleichungen

**DGs 1. Ordnung**  $\dot{x} = ax + g(t)$  **Homogene DGs 1. Ordnung:**

**Trennung der Variablen** DG heißt homogen, wenn gilt:  $g(t) = 0$

$$\dot{x} = f(t)h(x(t))$$

$$\int \frac{1}{h(s)} ds = \int f(t) dt$$

→ Nach x auflösen

**Nichthomogene DGs 1. Ordnung** Sei  $\dot{x} = ax + g(t)$  Differentialgleichung und  $x_h(t)$  Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung  $\dot{x} = ax$ , dann ist  $\alpha x_h + x_p$  eine Lösung für die Diffentialgleichung. Beispiel Bestimmung von  $x_p$ :

$$\dot{x} = 2x - 4t^2 - 4t + 2$$

Dann haben  $x_p, \dot{x}_p$  die Form

$$x_p = c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_p = 2c_2 t + c_1$$

Einsetzen

$$\dot{x}_p - 2x_p = (-4t^2 - 4t + 2)$$

$$(2c_2 t + c_1) - 2(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) = (-4t^2 - 4t + 2)$$

→ Auflösen nach  $c_1, c_2, c_3$

**Homogene DGs 2. Ordnung**  $\ddot{x} = ax + b\dot{x}$

Ansatz :  $x = e^{\lambda t}$

Charakteristisches Polynom:  $(\lambda^2 - b\lambda - a)e^{\lambda t}$

Nullstellen finden und Lambda einsetzen

**Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koef-fizienten**

Ausgangspunkt:  $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$

Charakteristisches Polynom:  $\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{m_1} (\lambda - \lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}} \cdot \underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} ((\lambda - \lambda_k)(\lambda - \overline{\lambda_k}))^{s_k}}_{\substack{\text{Komplexe Nullstellen} \\ \lambda_k = x_k + y_k i}}$$

Lösungsbasis:

Sei  $\text{grad}(k)$  Grad der Nullstelle k und  $b > 0$  o.b.d.a., dann gilt:

$$\{t^q e^{\lambda t} \mid P(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}, t < \text{grad}(\lambda)\}$$

$$\cup \{t^q e^{at} \sin(bt) \mid P(a+bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a+bi)\}$$

$$\cup \{t^q e^{at} \cos(bt) \mid P(a+bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a+bi)\}$$

(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)

**Substitution** Sei  $\dot{x} = f(at + bx + c)$  Differentialgleichung. Substituiere  $u = at + bx + c \implies \dot{u} = a + b \cdot \dot{x} = a + bf(u)$

Substitution → Lösen der DG → Rücksubstitution. Beispiel:

$$\dot{x} = 2t - x, x(1) = 2$$

$$u(t) = 2t - x$$

$$u'(t) = 2 - u(t) = h(t)g(u)$$

$$h(t) = 1, g(u) = 2 - u$$

$$u(1) = 2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0$$

$$\int \frac{1}{2-u} du = \int 1 dt$$

$$-\ln(2-u) + a = t \quad c_1 - c_2 = a$$

$$\ln(2-u) = a - t$$

$$u = 2 - e^{a-t} \rightarrow a = \ln(2) \mid u(1) = 0$$

$$x = 2t - u \leftarrow u = 2t - x$$

$$x = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

**Standardlösungen**  $\dot{x} = nx \rightarrow x = e^{nt+k}$

# 5 Anhang

**Matrixindizes**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

**Inverse Matrix**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Determinante**

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

**Matrixmultiplikation**

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & k \\ \hline i & \text{green} & \text{arrow} \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & k \\ \hline & & \text{arrow} \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & k \\ \hline i & \text{blue} & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

**abc-Formel**  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**pq-formel**  $f(x) = x^2 + px + q$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$