1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

Positive Definitheit

$d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$

Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Triviale Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y|| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ ||x|| + ||y|| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit

Positive Definitheit $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$

Homogenität $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

l_1**-Norm** $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

l_p**-Norm** $||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}$

Maximum-Norm $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,. \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt billinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$

$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:

$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$

Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$**:** $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen

bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$

Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen

$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$

1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:

$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N}; \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$

Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp: R^n mit l_p-Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**

$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m \in) D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\}$

Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$H_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$

Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**:**

$H_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$

Eindimensionaler Schnitt

$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.

Kurve

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \ldots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **(**$\varepsilon - \delta$**-Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$

Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ gilt.

Polynom in n **Variablen vom Grad** m

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = i}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

Linearität $(f+g)' = f' + g'$ $\quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produkt $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Quot. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Ketten $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Potenzen $(x^n)' = nx^{n-1}$

Basics

$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \mid (\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} \mid (\sin(x))' = \cos(x) \mid (\cos(x))' = -\sin(x)$

Shortcuts $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \mid (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mid (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}^{n-1}} \mid (\frac{1}{x^2})' = \frac{-2}{x^3}$

Weitere $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \mid \arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1} \mid \arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mid \arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ **in Richtung** e **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ existiert.

Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h).f(a) - Lh||}{||h||} = 0$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tangentialebene an Punkt a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ mit $x, a \in \mathbb{R}^n$ beziehungsweise

$T(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

Gradient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Divergenz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a,b) \in D$ mit $f(a,b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass

$f(x, h(x)) = 0 \quad$ für alle $x \in I$

und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x,y) \in D$ mit $\|(x,y) - (a,b)\| < c$ und $f(x,y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

Taylorpolynome

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + R \cdot (x_1^2, \ldots, x_n^2)$$

2.4 Analysis

Sattelpunkt, Extrema: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f'(t) = 0$
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \nabla f(t) = 0 \iff J_f(t) = 0$ (Nullmatrix)
Sattelpunkt in a $\det(H_f(a)) < 0$ wobei gilt
$\text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
Extrema $\det(H_f(a)) > 0$ und
Maximum: $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$)
Minimum: $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$)

2.5 Lagrange-Funktion

Funktion $f(x, y) = x^4 + y^5$
Nebenbedingung $30 = 2x + 2y \iff g(x, y) = 30 - 2x - 2y = 0$
Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$
Vorgehen $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ jeweils nach x, y, λ ableiten und daraus aufösen

3 Mehrdimensionale Integrale

Unbestimmte Integrale in $\mathbb{R}$ Bei Integralen + C nicht vergessen!
$\int x\sin(x)dx = -xcos(x) + sin(x)$ | $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}sin(\frac{x}{2})$
$\int \cos(x)dx = \sin(x)$ | $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
$\int \frac{1}{x}dx = ln(x)$ | $\int xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}$ | $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
Partielle Integration
$\int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$
Wahl von f: $\ln(x) > \arcsin(x) > x^n > \sin(x) > e^x$

4 Differenzialgleichungen

Homogene DGs 1. Ordnung: Trennung der Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$
$$\int \frac{1}{g(x)}dt = \int f(t)dt$$

$->$ Nach x auflösen
Nichthomogene DGs 1. Ordnung Sei $\dot{x} = ax + g(t)$ Differenzialgleichung und $x_h(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = ax$, dann ist $\alpha x_h + x_p$ eine Lösung für die Diffentialgleichung.
Beispiel Bestimmung von x_p:

$$\dot{x} = 2x - 4t^2 - 4t + 2$$

Dann haben $x_p, \dot{x_p}$ die Form

$$x_p = c_2t^2 + c_1t + c_0 \quad \texttt{und} \quad \dot{x_p} = 2c_2t + c_1$$

Einsetzen

$$\dot{x_p} - x_p = (-4t^2 - 4t + 2)$$
$$(2c_2t + c_1) - 2(c_2t^2 + c_1t + c_0) = (-4t^2 - 4t + 2)$$

$\to$ Auflösen nach c_1, c_2, c_3

Homogene DGs 2. Ordnung $\ddot{x} = ax + b\dot{x}$
Ansatz : $x = e^{\lambda t}$
Charakteristisches Polynom: $(\lambda^2 - b\lambda - a)e^{\lambda t}$
Nullstellen finden und Lambda einsetzen
Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koeffizienten
Ausgangspunkt: $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$
Charakteristisches Polynom: $\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i$

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i$$
$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{m_1}(\lambda - \lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}} + \underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}((\lambda - \lambda_k)(\lambda - \overline{\lambda_k}))^{s_k}}_{\substack{\text{Komplexe Nullstellen} \\ \lambda_k = x_k + y_k i}}$$

Lösungsbasis:
Sei $\mathrm{grad}(k)$ Grad der Nullstelle k und $b > 0$ o.b.d.a., dann gilt:

$$\{t^q e^{\lambda t} \mid P(\lambda) = 0 \land \lambda \in \mathbb{R}, t < \mathrm{grad}(\lambda)\}$$
$$\cup\{t^q e^{at}\sin(bt) \mid P(a + bi) = 0 \land t < \mathrm{grad}(a + bi)\}$$
$$\cup\{t^q e^{at}\cos(bt) \mid P(a + bi) = 0 \land t < \mathrm{grad}(a + bi)\}$$

(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)
Substitution Sei $\dot{x} = f(at + bx + c)$ Differentialgleichung. Substituiere $u = at + bx + c \implies \dot{u} = a + b \cdot \dot{x} = a + bf(u)$
Substitution $\to$ Lösen der DG $\to$ Rücksubstitution. Beispiel:

$$\dot{x} = 2t - x, x(1) = 2$$
$$u(t) = 2t - x$$
$$u'(t) = 2 - u(t) = h(t)g(u)$$
$$h(t) = 1, g(u) = 2 - u$$
$$u(1) = 2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0$$
$$\int \frac{1}{2 - u}du = \int 1dt$$
$$-\ln(2 - u) + a = t \quad c_1 - c_2 = a$$
$$\ln(2 - u) = a - t$$
$$u = 2 - e^{a-t} \to a = \ln(2) \mid u(1) = 0$$
$$x = 2t - u \leftarrow u = 2t - x$$
$$x = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

5 Anhang

Matrixindizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

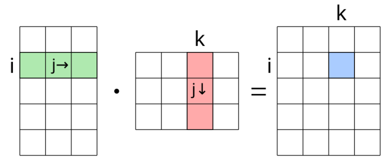
Inverse Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Matrixmultiplikation



$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$
abc-Formel $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
pq-formel $f(x) = x^2 + px + q$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$