1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:
Positive Definitheit
$d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$
Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$
Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Triviale Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit
Positive Definitheit $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$
Homogenität $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$
l_1**-Norm** $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
l_p**-Norm** $||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}$
Maximum-Norm $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$
Satz Jede Norm induziert über $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,. \rangle_A : \mathbb{R}^n \times R^n \to \mathbb{R}$ heißt billinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:
$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$
$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$
Weitere, mögliche Eigenschaften:
Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$
Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$
Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

0.1 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:
$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r\}$
Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$**:** $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$
Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:
$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$
Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen
bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$
Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$
Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

0.2 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:
$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$
Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.
Cauchyfolge:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N}; \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$
Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert
Bsp: R^n mit l_p-Norm

0.3 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**
$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m \in) D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\}$
Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$H_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$
Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**:**
$H_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$