1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:
Positive Definitheit
$d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$
Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$
Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Triviale Metrik:
$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$
Französische Eisenbahnmetrik:
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit
Positive Definitheit $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$
Homogenität $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
Dreiecksungleichung $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
l_1**-Norm** $||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
l_p**-Norm** $||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}$
Maximum-Norm $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$
Satz Jede Norm induziert über $d(x,y) = ||x - y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,. \rangle_A : \mathbb{R}^n \times R^n \to \mathbb{R}$ heißt billinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:
$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$
$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$
Weitere, mögliche Eigenschaften:
Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$
Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$
Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:
$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r\}$
Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n$: $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$
Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:
$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$
Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen
bsp: $\mathbb{R}^n, \{\}$
Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$
Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:
$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$
Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.
Cauchyfolge:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N}; \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$
Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert
Bsp: R^n mit l_p-Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m \in) D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\}$
Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$H_c(f) := \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$
Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$H_c(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$
Eindimensionaler Schnitt
$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.
Kurve
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \ldots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.
Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\varepsilon-\delta$-Kriterium) Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$
Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ gilt.
Polynom in n Variablen vom Grad m
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = i}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

Linearität $(f + g)' = f' + g'$ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Kettenregel $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$
Ableitung des Logarithmus $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Ableitung der Sinusfunktion $(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$
Ableitung der Kosinusfunktion $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$
asdf

2.2 Richtungsableitungen

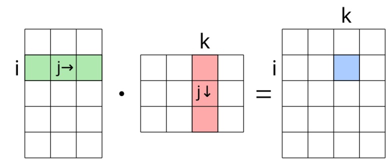
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ **in Richtung e differenzierbar**, wenn der Grenzwert
$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ existiert.
Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit
$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h).f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$
Jacobimatrix
$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$
Tangentialebene $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ beziehungsweise
$T(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$
Gradient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
Divergenz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i f f}$
Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$
Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a,b) \in D$ mit $f(a,b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass
$f(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in I$
und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x,y) \in D$ mit $\|(x,y) - (a,b)\| < c$ und $f(x,y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

3 Anhang

Matrixmultiplikation



$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$