

# 1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Metrik

Eine Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ :

**Positive Definitheit**

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

**Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x)$

**Dreiecksungleichung**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Triviale Metrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Französische Eisenbahnmetrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

## 1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

**Positive Definitheit**  $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$

**Homogenität**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

**Dreiecksungleichung**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**$l_1$ -Norm**  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

**$l_p$ -Norm**  $\|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$

**Maximum-Norm**  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

**Satz** Jede Norm induziert über  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.

## 1.3 Bilinearform

Eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

**Symmetrie:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

**Positive Definitheit:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix  $B$  erzeugt eine Bilinearform über  $x^T B y$

## 1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

**Offene Kugel mit Radius r um a:**

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

**Innerer Punkt**  $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

**Offenes Intervall:** Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$$

**Abgeschlossenes Intervall:** Komplement ist offen

$$\text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}$$

**Beschränkt:**  $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

**Kompakt:** Abgeschlossen und beschränkt

**Mengenoperationen**

$$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$$

$$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$$

## 1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

**Konvergenz:**

$$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$$

**Mehrdimensionale Konvergenz:** Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

**Cauchyfolge:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} ; \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$$

**Banachraum:** Jede Cauchyfolge konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp:  $\mathbb{R}^n$  mit  $l_p$ -Norm

## 1.6 Funktionen

**Graph von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :**

$$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$$

**Höhen/Niveaulinie von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$**

$$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

**Niveaufläche von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :**

$$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

**Eindimensionaler Schnitt**

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$  mit  $a_k$  konst.

**Kurve**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $f(x_1, \dots, x_n)$ , dann ist  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $f(\phi(t))$  die Funktion entlang dieser Kurve.

**Stetigkeit von Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\varepsilon - \delta$ -Kriterium)** Eine Funktion ist stetig in einem Punkt  $a$ , gdw. Gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

**Satz** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn dies für die Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  gilt.

**Polynom in  $n$  Variablen vom Grad  $m$**

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  Multiindex,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  (Vorfaktoren) und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

## 2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

**Linearität**  $(f + g)' = f' + g' \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

**Produktregel**  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

**Quotientenregel**  $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

**Kettenregel**  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Potenzregel**  $(x^n)' = nx^{n-1}$

**Ableitung des Logarithmus**  $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

**Ableitung der Sinusfunktion**  $(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

**Ableitung der Kosinusfunktion**  $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$

**Weitere**

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\arctan(x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 2.2 Richtungsableitungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $e \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung mit  $\|e\| = 1$ . Dann heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in D$  in Richtung  $e$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial_e f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}}$$

**Satz** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$  genau dann in Richtung  $e$  differenzierbar, wenn die Funktion  $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$  im Punkt  $t_0 = 0$  nach  $t$  differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $e$  gleich der Ableitung von  $\varphi_e(t)$  im Punkt  $t_0 = 0$ .

## 2.3 Die Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, dann heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $a \in D$ , wenn es  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

**Jacobimatrix & Hessematrix**

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

**Tangentialebene an Punkt a**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) \text{ mit } x, a \in \mathbb{R}^n \text{ beziehungsweise}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$$

**Gradient**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Divergenz**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{div}(f) = \nabla \cdot f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

**Rotation:**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

**Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $(a, b) \in D$  mit  $f(a, b) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $I$  von  $a$  und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a) = b$ , sodass

$$f(x, h(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

und es gibt ein  $c > 0$ , sodass für alle  $(x, y) \in D$  mit  $\|(x, y) - (a, b)\| < c$  und  $f(x, y) = 0$  gilt:  $y = h(x)$ .

**Taylorpolynome**

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)h + R \cdot (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

