

1 Funktionen in \mathbb{R}^n

1.1 Metrik

Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

Positive Definitheit

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$

Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Triviale Metrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in \mathbb{R}^n

Eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

Positive Definitheit $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0$

Homogenität $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

l_1 -Norm $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

l_p -Norm $\|x\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$

Maximum-Norm $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A = \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A$$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A = \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über $x^T B y$

1.4 Topologie in \mathbb{R}^n

Offene Kugel mit Radius r um a:

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

Innerer Punkt $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A \quad \text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen

$$\text{bsp: } \mathbb{R}^n, \{\}$$

Beschränkt: $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen

$$(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$$

$$(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$$

1.5 Folgen in \mathbb{R}^n

Konvergenz:

$$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \|a_m - g\| < \varepsilon$$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} ; \forall s, m \geq M : \|a_s - a_m\| < \varepsilon$$

Banachraum: Jede Cauchyfolge konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp: \mathbb{R}^n mit l_p -Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$$

Höhen/Niveaulinie von $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

Niveaufläche von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

Eindimensionaler Schnitt

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$ mit a_k konst.

Kurve

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1, \dots, x_n)$, dann ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve im \mathbb{R}^n und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\varepsilon - \delta$ -Kriterium) Eine Funktion ist stetig in einem Punkt a , gdw. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Satz Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn dies für die Funktionen f_1, \dots, f_m gilt.

Polynom in n Variablen vom Grad m

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n

2.1 Ableitungsregeln in \mathbb{R}^1

Linearität $(f + g)' = f' + g'$ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produkt $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ **Quotient** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Ketten $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **Potenzen** $(x^n)' = nx^{n-1}$

Basics

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \mid (\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} \mid (\sin(x))' = \cos(x) \mid (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Shortcuts $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \mid (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mid (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \mid$

$$(\frac{1}{x^2})' = \frac{-2}{x^3}$$

Weitere $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \mid \arctan(x)' = \frac{1}{x^2 + 1} \mid \arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\|e\| = 1$. Dann heißt eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ in Richtung e differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial_e f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}}$$

Satz Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$ im Punkt $t_0 = 0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0 = 0$.

2.3 Die Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n; J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tangentialebene an Punkt a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) \text{ mit } x, a \in \mathbb{R}^n \text{ beziehungsweise}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$$

Gradient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Divergenz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Rotation: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(a) = b$, sodass

$$f(x, h(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

und es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $(x, y) \in D$ mit $\|(x, y) - (a, b)\| < c$ und $f(x, y) = 0$ gilt: $y = h(x)$.

Taylorpolynome

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j \right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)h + R \cdot (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

2.4 Analysis

- Sattelpunkt, Extrema:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f'(t) = 0$
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f(t) = 0 \iff J_f(t) = 0$ (Nullmatrix)
- Sattelpunkt in a** $\det(H_f(a)) < 0$ wobei gilt
 $\text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
- Extrema** $\det(H_f(a)) > 0$ und
 Maximum: $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$)
 Minimum: $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$)

2.5 Lagrange-Funktion

- Funktion $f(x, y) = x^4 + y^5$
 Nebenbedingung $30 = 2x + 2y \iff g(x, y) = 30 - 2x - 2y = 0$
 Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$
 Vorgehen $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ jeweils nach x, y, λ ableiten und daraus auflösen

3 Mehrdimensionale Integrale

- Unbestimmte Integrale in \mathbb{R}** Bei Integralen + C nicht vergessen!
- $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x)$ | $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(\frac{x}{2})$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ | $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ | $\int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}$ | $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$
- Partielle Integration**
 $\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$
 Wahl von f: $\ln(x) > \arcsin(x) > x^n > \sin(x) > e^x$

4 Differentialgleichungen

- DGs 1. Ordnung** $\dot{x} = ax + g(t)$ **Homogene DGs 1. Ordnung:**
 Trennung der Variablen DG heißt homogen, wenn gilt: $g(t) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t)h(x(t)) \\ \int \frac{1}{h(s)} ds &= \int f(t) dt \end{aligned}$$

→ Nach x auflösen

- Nichthomogene DGs 1. Ordnung** Sei $\dot{x} = ax + g(t)$ Differentialgleichung und $x_h(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = ax$, dann ist $ax_h + x_p$ eine Lösung für die Differentialgleichung.
 Beispiel Bestimmung von x_p :

$$\dot{x} = 2x - 4t^2 - 4t + 2$$

Dann haben x_p, \dot{x}_p die Form

$$x_p = c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_p = 2c_2 t + c_1$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - x_p &= (-4t^2 - 4t + 2) \\ (2c_2 t + c_1) - 2(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) &= (-4t^2 - 4t + 2) \end{aligned}$$

→ Auflösen nach c_1, c_2, c_3

Homogene DGs 2. Ordnung $\ddot{x} = ax + b\dot{x}$

Ansatz: $x = e^{\lambda t}$

Charakteristisches Polynom: $(\lambda^2 - b\lambda - a)e^{\lambda t}$

Nullstellen finden und Lambda einsetzen

Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koefizienten

Ausgangspunkt: $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \\ &= \underbrace{\prod_{k=1}^{m_1} (\lambda - \lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}} + \underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} ((\lambda - \lambda_k)(\lambda - \bar{\lambda}_k))^{s_k}}_{\text{Komplexe Nullstellen}} \\ &\quad \lambda_k = x_k + y_k i \end{aligned}$$

Lösungsbasis:

Sei $\text{grad}(k)$ Grad der Nullstelle k und $b > 0$ o.b.d.a., dann gilt:

$$\begin{aligned} &\{t^q e^{\lambda t} \mid P(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}, t < \text{grad}(\lambda)\} \\ &\cup \{t^q e^{at} \sin(bt) \mid P(a + bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a + bi)\} \\ &\cup \{t^q e^{at} \cos(bt) \mid P(a + bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a + bi)\} \end{aligned}$$

(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)

Substitution Sei $\dot{x} = f(at + bx + c)$ Differentialgleichung. Substituiere $u = at + bx + c \implies \dot{u} = a + b \cdot \dot{x} = a + bf(u)$

Substitution → Lösen der DG → Rücksubstitution. Beispiel:

$$\dot{x} = 2t - x, x(1) = 2$$

$$u(t) = 2t - x$$

$$u'(t) = 2 - u(t) = h(t)g(u)$$

$$h(t) = 1, g(u) = 2 - u$$

$$u(1) = 2 \cdot 1 - 2 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2-u} du &= \int 1 dt \\ -\ln(2-u) + a &= t \quad c_1 - c_2 = a \\ \ln(2-u) &= a - t \end{aligned}$$

$$u = 2 - e^{a-t} \rightarrow a = \ln(2) \mid u(1) = 0$$

$$x = 2t - u \leftarrow u = 2t - x$$

$$x = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

5 Anhang

Matrixindizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Inverse Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Matrixmultiplikation

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline i & \textcolor{green}{j \rightarrow} & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \cdot & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & k \\ \hline & & \textcolor{red}{j \downarrow} & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & k \\ \hline & & i & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$\textbf{abc-Formel} \quad f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\textbf{pq-formel} \quad f(x) = x^2 + px + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$