1 Funktionen in $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_0^+$ mit $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

Positive Definitheit

$d(x,y)\geq 0$ und $d(x,y)=0 \iff x=y$

Symmetrie $d(x,y)=d(y,x)$

Dreiecksungleichung $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

Triviale Metrik:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\neq y\\ 0 & \text{falls } x=y\end{cases}$$

Französische Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y)=\begin{cases}||x-y|| & \text{falls } \exists\lambda\in\mathbb{R}: x=\lambda y\\ ||x||+||y|| & \text{sonst}\end{cases}$$

1.2 Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $||.||:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_0^+$ mit

Positive Definitheit $||x||\ge 0\wedge ||x||=0 \iff x=0$

Homogenität $||\lambda x||=|\lambda|||x||$

Dreiecksungleichung $||x+y||\le||x||+||y||$

l_1-Norm $||x||_1=|x_1|+\dots+|x_n|$

l_p-Norm $||x||_p=\sqrt[p]{|x_1|^p+\dots+|x_n|^p}$ mit $p\ge1$

Maximum-Norm $||x||_\infty=\max\{|x_i|: i=1,\dots,n\}$

Satz Jede Norm induziert über $d(x,y)=||x-y||$ eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion $\langle .,.\rangle_A:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ heißt Bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle_A=\alpha\langle x,z\rangle_A+\beta\langle y,z\rangle_A$

$\langle z,\alpha x+\beta y\rangle_A=\alpha\langle z,x\rangle_A+\beta\langle z,y\rangle_A$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

Symmetrie: $\forall x,y\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle_A=\langle y,x\rangle_A$

Positive Definitheit: $\forall x\in\mathbb{R}^n\wedge x\neq0:\langle x,x\rangle_A>0$

Jede Quadratische Matrix B erzeugt eine Bilinearform über x^TBy

1.4 Topologie in $\mathbb{R}^n$

Offene Kugel mit Radius r um a:

$U_R(a):=\{x\in\mathbb{R}^n: ||x-a||<r\}$

Innerer Punkt $a\in A\subseteq\mathbb{R}^n$: $\exists\varepsilon>0:U_\varepsilon(a)\subseteq A$

Offenes Intervall: Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a\in A:\exists\varepsilon>0:U_\varepsilon(a)\subseteq A$ bsp: $\mathbb{R}^n,\{\},U_r(a)$

Abgeschlossenes Intervall: Komplement ist offen

bsp: $\mathbb{R}^n,\{\}$

Beschränkt: $\exists M\in\mathbb{R}:A\subset U_M(0)$

Kompakt: Abgeschlossen und beschränkt

Mengenoperationen

$(U\cup V)^C=U^C\cap V^C$

$(U\cap V)^C=U^C\cup V^C$

Die vier Quadranten

I: $x\ge0,y\ge0$

II: $x<0,y\ge0$

III: $x<0,y<0$

IV: $x\ge0,y<0$

1.5 Folgen in $\mathbb{R}^n$

Konvergenz:

$\exists g\in\mathbb{R}^n:\forall\varepsilon>0:\exists M\in\mathbb{N}:\forall m\ge M:||a_m-g||<\varepsilon$

Mehrdimensionale Konvergenz: Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

Cauchyfolge:

$\forall\varepsilon>0:\exists M\in\mathbb{N};\forall s,m\ge M:||a_s-a_m||<\varepsilon$

Banachraum: Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp: R^n mit l_p-Norm

1.6 Funktionen

Graph von $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

$\Gamma_f:=\{(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_m\in)D\times\mathbb{R}^m:z_i=f_i(x_1,\dots,x_n)\}$

Höhen/Niveaulinie von $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$H_c(f):=\{(x,y)\in D\mid f(x,y)=c\}$

Niveaufläche von $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$H_c(f):=\{(x_1,\dots,x_n)\in D\mid f(x_1,\dots,x_n)=c\}$

Eindimensionaler Schnitt

$f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},a_n)$ mit a_k konst.

Kurve

Ist $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $f(x_1,\dots,x_n)$, dann ist $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f(\phi(t))$ die Funktion entlang dieser Kurve.

Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ($\varepsilon-\delta$-Kriterium) Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt: $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:||x-a||<\delta\implies||f(x)-f(a)||<\varepsilon$

Satz Eine Funktion $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a\in D$, wenn dies für die Funktionen $f_1,\dots,f_m$ gilt.

Polynom in n Variablen vom Grad m

$$\sum_{i=0}^m\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|=i}}a_\alpha\,x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ Multiindex, $a_\alpha\in\mathbb{R}$ (Vorfaktoren) und $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$.

2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in $\mathbb{R}^1$

Linear $(f+g)'=f'+g'$ $(c\cdot f)'=c\cdot f'$ | **Produkt** $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ | **Quot** $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$ | **Ketten** $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ |

Potenzen $(x^n)'=nx^{n-1}$ | $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$

Trig $(\sin(x))'=\cos(x)$ | $(\cos(x))'=-\sin(x)$ | $\tan(x))'=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ $\arctan(x)'=\frac{1}{x^2+1}$ | $\arccos(x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exp $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ | $(e^x)'=e^x$

Shortcuts $(a^x)'=\ln(a)\cdot a^x$ | $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\left(\sqrt{(f(x))}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{(f(x))}}$ | $(\frac{1}{x^2})'=\frac{-2}{x^3}$ $(\ln(f(x)))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $((x^nf(x))'=nx^{n-1}f(x)+x^nf'(x))$

2.2 Richtungsableitungen

Sei $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $e\in\mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $||e||=1$. Dann heißt eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ im Punkt $a\in D$ **in Richtung e differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e}f(a):=\partial_e f(a)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+te)-f(a)}{t}$ existiert.

Satz Sei $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in D$ genau dann in Richtung e differenzierbar, wenn die Funktion $\varphi_e(t):=f(x_0+te)$ im Punkt $t_0=0$ nach t differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e gleich der Ableitung von $\varphi_e(t)$ im Punkt $t_0=0$.

Mit Jacobimatrix In Punkt a in Richtung e ist $J_f(a)\cdot e$

Mit Phi Im Punkt (x,y) in Richtung $e=(a,b)$

$\phi_{(a,b)}(t)=f(x+ta,y+tb)$ Dann $\phi'_{(a,b)}(t)=0$

Mit Grenzwert Im Punkt (x,y) in Richtung $e=(a,b)$

$\frac{\partial f}{\partial e}((x,y))=\lim\limits_{t\to0}\frac{f((x,y)+te)-f((x,y))}{t}$

2.3 Die Ableitung

Sei $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann heißt $f:D\to\mathbb{R}^n$ differenzierbar in $a\in D$, wenn es $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ gibt mit

$\lim\limits_{||h||\to0}\frac{||f(a+h)-f(a)-Lh||}{||h||}=0$

Jacobimatrix & Hessematrix

$$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n; J_f(a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times k}$$

$$H_f(a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}\end{bmatrix}$$

Die Kettenregel Sei $h(x)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$

Dann lautet $J_h(x)=J_f(g(x))\cdot J_g(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion $g(f(x))=x$ Sei $b=f(a)$, dann ist

$J_g(b)=(J_f(a))^{-1}\to$ Matrixinversion

Tangentialebene an Punkt a $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$T(x)=f(a)+\nabla f(a)\cdot(x-a)$ mit $x,a\in\mathbb{R}^n$ beziehungsweise

$T(x_1,\dots,x_n)=f(a_1,\dots,a_n)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n)\cdot(x_i-a_i)$

Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion

Sei $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(a,b)\in D$ mit $f(a,b)=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq0$. Dann existiert eine offene Umgebung I von a und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion $h:I\to\mathbb{R}$ mit $h(a)=b$, sodass

$f(x,h(x))=0$ für alle $x\in I$

und es gibt ein $c>0$, sodass für alle $(x,y)\in D$ mit $\|(x,y)-(a,b)\|<c$ und $f(x,y)=0$ gilt: $y=h(x)$.

Gradient $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\mathrm{grad}(f)=\nabla f=J_f^T=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \ \cdots\ \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$ (Transponieren !)

Divergenz $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$\mathrm{div}(f)=\nabla f:=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Rotation: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\nabla \times f(a) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a)\right)$$

Das totale Differential

Sei $f(x,y) = x^2y^4, x(t) = cos(t), y(t) = e^t$, dann ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -2xy^4 \sin(t) + 4x^2y^3e^t$$

Implizites Differenzieren $h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

Taylorpolynome

$$T(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot h_i h_j\right) + R$$

$$T(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + R\cdot(x_1^2,\dots,x_n^2)$$

Vektorraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0)\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\f_x(P)\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\f_y(P)\end{pmatrix}$$

2.4 Analysis

Sattelpunkt, Extrema: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f'(t) = 0$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \nabla f(t) = 0 \iff J_f(t) = 0$ (Nullmatrix)

Sattelpunkt in a $\det(H_f(a)) < 0$ wobei gilt

$\text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) \neq \text{sg}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$

Extrema $\det(H_f(a)) > 0$ und

Maximum: $H_f(a)$ negativ definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$)

Minimum: $H_f(a)$ positiv definit (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$)

2.5 Lagrange-Funktion

Funktion $f(x,y) = x^4 + y^5$

Nebenbedingung $30 = 2x + 2y \iff g(x,y) = 30 - 2x - 2y = 0$

Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

Vorgehen $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ jeweils nach x,y,λ ableiten und daraus aufösen

3 Mehrdimensionale Integrale

Unbestimmte Integrale in $\mathbb{R}$ Bei Integralen + C nicht vergessen!

Trig $\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)$ | $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x)$ | $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$ | $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$ | $\int \cos(x)dx = \sin(x)$ | $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$ | **Pot** $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|)$ | $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|)$ | $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}$ | $\int \frac{1}{x^n}dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}$ | $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$ | **Exp** $\int xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}$ | $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$ | **Arc** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arccos(\frac{x}{a})$ | $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$

Partielle Integration

$\int f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$

Wahl von f: $\ln(x) > \arcsin(x) > x^n > \sin(x) > e^x$

Polarkoordinaten

$(x,y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$

$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,r\,d\phi dr$

4 Differentialgleichungen

DGs 1. Ordnung $\dot{x} = ax + g(t)$ **Homogene DGs 1. Ordnung: Trennung der Variablen** DG heißt homogen, wenn gilt: $g(t) = 0$

$$\dot{x} = f(t)h(x(t))$$

$$\int \frac{1}{h(s)}ds = \int f(t)dt$$

$\longrightarrow$ Nach x auflösen

Nichthomogene DGs 1. Ordnung Sei $\dot{x} = ax + g(t)$ Differentialgleichung und $x_h(t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = ax$, dann ist $\alpha x_h + x_p$ eine Lösung für die Diffentialgleichung. Beispiel Bestimmung von x_p:

$$\dot{x} = 2x - 4t^2 - 4t + 2$$

Dann haben $x_p, \dot{x_p}$ die Form

$$x_p = c_2t^2 + c_1t + c_0 \quad \textbf{und} \quad \dot{x_p} = 2c_2t + c_1$$

Einsetzen

$$\dot{x_p} - 2x_p = (-4t^2 - 4t + 2)$$

$$(2c_2t + c_1) - 2(c_2t^2 + c_1t + c_0) = (-4t^2 - 4t + 2)$$

$\to$ Auflösen nach c_1, c_2, c_3

Homogene DGs 2. Ordnung $\ddot{x} = ax + b\dot{x}$

Ansatz : $x = e^{\lambda t}$

Charakteristisches Polynom: $(\lambda^2 - b\lambda - a)e^{\lambda t}$

Nullstellen finden und Lambda einsetzen

Allgemeiner Ansatz für lineare DGLs mit konstanten koeffizienten

Ausgangspunkt: $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i$

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{m_1}(\lambda - \lambda_k)^{s_k}}_{\text{Reelle Nullstellen}} \cdot \underbrace{\prod_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}((\lambda-\lambda_k)(\lambda - \overline{\lambda_k}))^{s_k}}_{\substack{\text{Komplexe Nullstellen} \\ \lambda_k = x_k + y_k i}}$$

Lösungsbasis:

Sei $\text{grad}(k)$ Grad der Nullstelle k und $b > 0$ o.b.d.a., dann gilt:

$$\{t^q e^{\lambda t} \mid P(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}, t < \text{grad}(\lambda)\}$$

$$\cup\{t^q e^{at}\sin(bt) \mid P(a+bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a+bi)\}$$

$$\cup\{t^q e^{at}\cos(bt) \mid P(a+bi) = 0 \wedge t < \text{grad}(a+bi)\}$$

(Formell nicht ganz korrekt, aber hier anschaulicher)

Substitution Sei $\dot{x} = f(at + bx + c)$ Differentialgleichung. Substituiere $u = at + bx + c \implies \dot{u} = a + b\cdot\dot{x} = a + bf(u)$

Substitution $\to$ Lösen der DG $\to$ Rücksubstitution. Beispiel:

$$\dot{x} = 2t - x, x(1) = 2$$

$$u(t) = 2t - x$$

$$u'(t) = 2 - u(t) = h(t)g(u)$$

$$h(t) = 1, g(u) = 2 - u$$

$$u(1) = 2\cdot 1 - 2 + 0 = 0$$

$$\int \frac{1}{2-u}du = \int 1dt$$

$$-\ln(2-u) + a = t \quad c_1 - c_2 = a$$

$$\ln(2-u) = a - t$$

$$u = 2 - e^{a-t} \to a = \ln(2) \mid u(1) = 0$$

$$x = 2t - u \leftarrow u = 2t - x$$

$$x = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

Standardlösungen $\dot{x} = nx \to x = e^{nt+k}$

5 Anhang

Matrixindizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Inverse Matrix

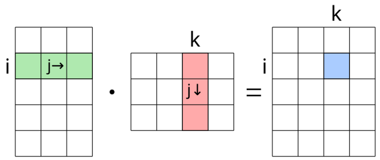
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$$

Determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Matrixmultiplikation



$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$

abc-Formel $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

pq-formel $f(x) = x^2 + px + q$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$