

1 Funktionen in  $\mathbb{R}^n$

1.1 Metrik

Eine Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ :

- Positive Definitheit**  
 $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung**  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Triviale Metrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Französische Eisenbahnmetrik:**

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

1.2 Normen in  $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion  $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

- Positive Definitheit**  $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \iff x = 0$
- Homogenität**  $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
- Dreiecksungleichung**  $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$l_1\text{-Norm } ||x||_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$l_p\text{-Norm } ||x||_p = \sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$

**Maximum-Norm**  $||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

**Satz** Jede Norm induziert über  $d(x, y) = ||x - y||$  eine Metrik.

1.3 Bilinearform

Eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinearform, wenn sie in beiden Argumenten linear ist:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle_A &= \alpha \langle x, z \rangle_A + \beta \langle y, z \rangle_A \\ \langle z, \alpha x + \beta y \rangle_A &= \alpha \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A \end{aligned}$$

Weitere, mögliche Eigenschaften:

**Symmetrie:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$

**Positive Definitheit:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge x \neq 0 : \langle x, x \rangle_A > 0$

Jede Quadratische Matrix  $B$  erzeugt eine Bilinearform über  $x^T B y$

1.4 Topologie in  $\mathbb{R}^n$

**Offene Kugel mit Radius r um a:**

$U_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r\}$

**Innerer Punkt**  $a \in A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$

**Offenes Intervall:** Jeder Punkt ist innerer Punkt:

$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$       bsp:  $\mathbb{R}^n, \{\}, U_r(a)$

**Abgeschlossenes Intervall:** Komplement ist offen

bsp:  $\mathbb{R}^n, \{\}$

**Beschränkt:**  $\exists M \in \mathbb{R} : A \subset U_M(0)$

**Kompakt:** Abgeschlossen und beschränkt

1.5 Folgen in  $\mathbb{R}^n$

**Konvergenz:**

$\exists g \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : ||a_m - g|| < \varepsilon$

**Mehrdimensionale Konvergenz:** Konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten gegen den jeweiligen Wert konvergieren.

**Cauchyfolge:**

$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq M : ||a_s - a_m|| < \varepsilon$

**Banachraum:** Jede Cauchyfolge Konvergiert und die Metrik wird durch eine Norm induziert

Bsp:  $\mathbb{R}^n$  mit  $l_p$ -Norm

1.6 Funktionen

**Graph von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :**

$\Gamma_f := \{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in D \times \mathbb{R}^m : z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)\}$

**Höhen/Niveaulinie von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$**

$H_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$

**Niveaulfläche von  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :**

$H_c(f) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$

**Eindimensionaler Schnitt**

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, a_n)$  mit  $a_k$  konst.

**Kurve**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $f(x_1, \dots, x_n)$ , dann ist  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $f(\phi(t))$  die Funktion entlang dieser Kurve.

**Stetigkeit von Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\varepsilon - \delta$ -Kriterium)** Eine Funktion ist Stetig in einem Punkt a, gdw. Gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$

**Satz** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn dies für die Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  gilt.

**Polynom in n Variablen vom Grad m**

$$\sum_{i=0}^m \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

mit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  Multiindex,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  (Vorfaktoren) und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

2 Differenzierbarkeit in  $\mathbb{R}^n$

2.1 Ableitungsregeln in  $\mathbb{R}^1$

**Linearität**  $(f + g)' = f' + g'$        $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

**Produktregel**  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

**Quotientenregel**  $(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

**Kettenregel**  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Potenzregel**  $(x^n)' = nx^{n-1}$

**Ableitung des Logarithmus**  $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

**Ableitung der Sinusfunktion**  $(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

**Ableitung der Kosinusfunktion**  $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$

asdf

2.2 Richtungsableitungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $e \in \mathbb{R}^n$  eine Richtung mit  $||e|| = 1$ . Dann heißt eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in D$  **in Richtung  $e$  differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\frac{\partial}{\partial e} f(a) := \partial_e f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$  existiert.

**Satz** Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  in  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$  genau dann in Richtung  $e$  differenzierbar, wenn die Funktion  $\varphi_e(t) := f(x_0 + te)$  im Punkt  $t_0 = 0$  nach  $t$  differenzierbar ist. Weiter ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $e$  gleich der Ableitung von  $\varphi_e(t)$  im Punkt  $t_0 = 0$ .

2.3 Die Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, dann heißt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $a \in D$ , wenn es  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

**Jacobimatrix**

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

**Tangentialebene  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$**

$T(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$  beziehungsweise

$T(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$

**Gradient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$**

$$\text{grad}(f) = \nabla f = J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Divergenz  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$**

$\text{div}(f) = \nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i f}$

**Rotation:  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$**

$$\nabla \times f(a) := \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \right)$$

**Lokale Auflösung / Satz von der impliziten Funktion**

Sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $(a, b) \in D$  mit  $f(a, b) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $I$  von  $a$  und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a) = b$ , sodass

$f(x, h(x)) = 0$  für alle  $x \in I$

und es gibt ein  $c > 0$ , sodass für alle  $(x, y) \in D$  mit  $||(x, y) - (a, b)|| < c$  und  $f(x, y) = 0$  gilt:  $y = h(x)$ .

asdf