Лекція №2. Поняття повторних інтегралів. Обчислення подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтеграла. Похідна по площі від подвійного інтеграла.

§ 1. Поняття повторних інтегралів. Загальні міркування стосовно переходу від подвійного інтеграла до повторних.

У розв'язанні задачі про обчислення подвійного інтеграла головну роль відіграють Теореми про його зведення (при достатньо «необтяжливих» умовах) до **послідовного інтегрування за кожною змінною** окремо.

Основна ідея наведених нижче Теорем ґрунтується на простих **геометричних уявленнях** і полягає в наступному.

Нехай задано неперервну функцію $z = f(x, y)$, причому $f(x, y) \geq 0$ в області $D = \{a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Розглядатимемо подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy$$

як об'єм криволінійного бруса (тіла) T, обмеженого знизу областю D, зверху поверхнею $z = f(x, y)$, і з боків вертикальною циліндричною поверхнею, що проходить через межу області D (рис.1).

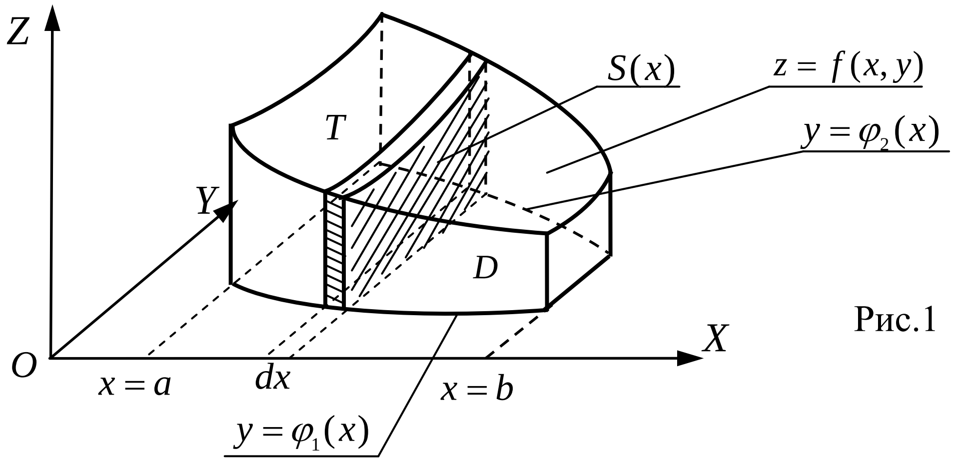


Рис.1

Тіло T можна розглядати як складене з нескінченно тонких шарів, паралельних площині OYZ. Об'єм кожного такого шару дорівнює $S(x)dx$, тобто добутку площі відповідного перерізу тіла T на товщину шару dx. Об'єм всього тіла T при цьому дорівнюватиме

$$\int_a^b S(x)dx. \tag{1}$$

В свою чергу величина $S(x)$ (площа заштрихованої на рис.1 криволінійної трапеції) буде представлена як інтеграл, тобто

$$S(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{2}$$

де x розглядається як фіксована величина, а $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – кінці того відрізку, який слугує проекцією перерізу, що розглядається на рис.1, на площину OXY.

Комбінуючи вирази (1) і (2), дістанемо формулу для обчислення об'єму тіла для представленого випадку:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{3}$$

Означення. *Отриманий вираз* (3) *називається* ***повторним інтегралом*** *для функції* $f(x,y)$ *по області* D*, «**правильної**» **у напрямку осі*** OY.

Стосовно «**правильності**» областей інтегрування в напрямках осей OX і OY буде сказано нижче в наступному параграфі.

Таким чином, має місце рівність

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{4}$$

яка означає наступне. Якщо представити подвійний інтеграл як суму елементів $f(x,y)dxdy$, то при обчисленні цієї суми можна спочатку взяти окрему суму по перерізам (шарам), які паралельні одній координатній площині, а потім обчислити суму результатів, які відносяться до кожного такого перерізу (шару) окремо.

Алгебраїчним аналогом рівності (3) є формула

$$\sum_{i,k} a_{ik}=\sum_i\left(\sum_k a_{ik}\right).$$

Якщо взяти той же криволінійний брус і розглядати його перерізи, які є паралельними площині OXZ, то аналогічні міркування приводять нас до наступної рівності

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Перейдемо тепер до викладення основних Теорем.

§ 2. Зведення подвійного інтеграла до повторних інтегралів: а). у прямокутній області; б). у криволінійній області.

Формалізуємо поняття **повторних інтегралів**, а також наведемо методику їхнього обчислення. Нехай функція $f(x, y)$ є **неперервною** в області D, де $D=\{a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$. Розглянемо вираз

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx,$$

який є **повторним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D.

В цьому виразі спочатку обчислюється інтеграл, що стоїть **у дужках**, причому інтегрування проводиться за змінною y, а **змінна** x вважається **сталою**. В результаті першого інтегрування дістанемо **неперервну функцію** $\Phi(x)$ (тут ми не доводимо цього факту) від змінної x (яку можна розглядати як незалежний параметр):

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Функцію $\Phi(x)$ далі інтегруємо за змінною x в межах від a до b:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

В результаті дістанемо деяке стале число.

Тепер перейдемо до формулювання двох основних Теорем цього параграфа, які наводяться для **підінтегральних функцій**, **інтегровних в області** D.

а). Спочатку розглянемо випадок, коли **областю інтегрування** D у подвійному інтегралі **є прямокутник** $D=\{ a \le x \le b; c \le y \le d \}$.

Теорема 1 (про зведення подвійного інтеграла до повторних). *Якщо для функції* $f(x, y)$, ***визначеної в прямокутнику*** D, ***існує подвійний інтеграл***

$$\iint_D f(x, y)dxdy, \tag{5}$$

і при кожному сталому значенні $x \in [a, b]$ ***існує визначений інтеграл*** *як функція змінної* x

$$I(x)=\int_c^d f(x,\ y)dy \quad \left(a\le x\le b\right),$$

то існує також ***повторний інтеграл***

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,\ y)dy$$

та виконується рівність

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,\ y)dy\,. \qquad (6)$$

Таке представлення (6) подвійного інтеграла через однократні визначені інтеграли називається **зведенням подвійного інтеграла до повторного**.

Зауваження 1. Якщо разом із подвійним інтегралом (5) існують обидва визначені інтеграли

$$\int_c^d f(x,\ y)dy \ \left(x=const\right), \qquad \int_a^b f(x,\ y)dx \ \left(y=const\right),$$

то має місце рівність

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,\ y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,\ y)dx \qquad (7)$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^2},\ \text{де}\ D=\left\{3\le x\le 4;\ 1\le y\le 2\right\}.$$

Розв'язок. За формулами (5), (6) маємо

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^2}=\int_1^2 dy\int_3^4 \frac{dx}{\left(x+y\right)^2}\,.$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int_3^4 \frac{dx}{\left(x+y\right)^2}=-\frac{1}{x+y}\bigg|_3^4=\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}\,.$$

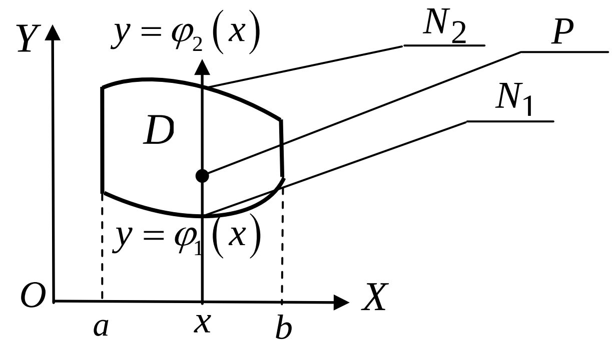
Тоді остаточно отримаємо: $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^2}=\int_1^2\left(\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}\right)dy=\ln\frac{25}{24}$.

б). Зведення подвійного інтеграла до повторного у криволінійній області.

Розглянемо **криволінійну область** D, обмежену знизу і зверху двома неперервними кривими: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $\left(a\le x\le b\right)$, а з обох боків вертикальними прямими $x=a$, $x=b$ (рис.2). Отже, область D є квадровною.

При цьому будь-яка пряма, яка є паралельною осі OY і яка проходить через внутрішню точку P області D, перетинає границю області у двох точках N_1 і N_2.

Рис. 2



Під **внутрішньою точкою області** D слід розуміти будь-яку точку цієї області, яка **не лежить на її границі**.

Означення. *Область* D, *визначена таким чином, називається* ***правильною у напрямку осі*** OY. Отже, область D, представлена на рис.2, є **правильною у напрямку осі** OY.

Теорема 2. *Якщо для функції* $f(x, y)$, *визначеної в області* D, ***існує подвійний інтеграл***

$$\iint_D f(x, y)dxdy, \tag{8}$$

і при кожному сталому значенні $x \in [a, b]$ ***існує визначений інтеграл***

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy,$$

то існує ***повторний інтеграл*** $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ *та виконується рівність:*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \tag{9}$$

Тепер розглянемо область D, обмежену зліва і справа двома неперервними кривими відповідно: $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $(c \le y \le d)$, а знизу і зверху горизонтальними прямими відповідно $y=c$, $y=d$ (рис.3).

При цьому будь-яка пряма, яка є паралельною осі OX і яка проходить через внутрішню точку P області D, перетинає границю області у двох точках M_1 і M_2.

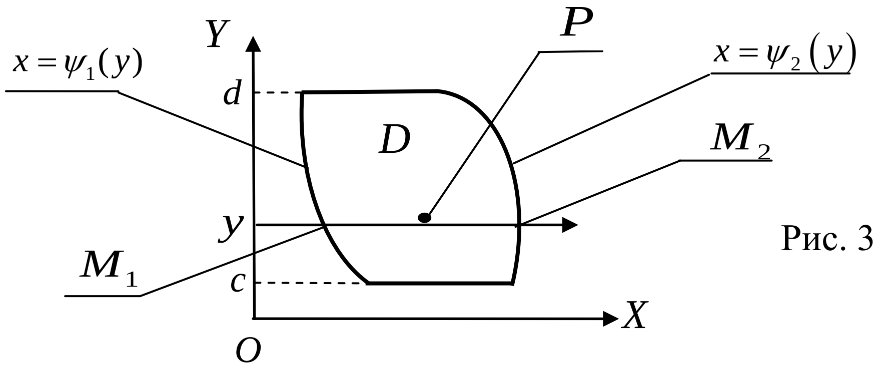


Рис. 3

Означення. *Область* D*, яка визначена таким чином, називається* ***правильною у напрямку осі*** OX. Отже, область D, що представлена на рис.3, є **правильною у напрямку осі** OX.

Означення. *Область, яка є правильною як в напрямку осі* OX *, так і в напрямку осі* OY *, називається просто* ***правильною областю***.

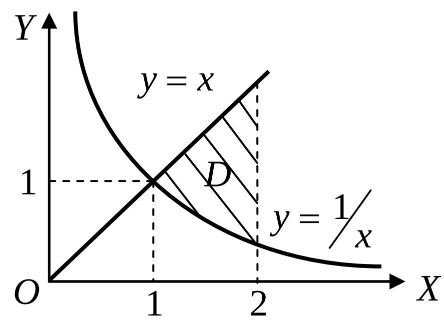
Зауваження 2. У випадку області D, що зображена на рис.3, формула (9) набуває такого вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\,y)dx\,. \tag{10}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_D \frac{\left(3x^2+1\right)dxdy}{y+1}$, де границю області D (рис.4) задано такими рівняннями : $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

Розв'язання. Для обчислення заданого інтеграла необхідно записати його через повторний інтеграл, в якому визначити межі інтегрування. На площині OXY будуємо область, обмежену прямою $x=2$, прямою $y=x$ і гіперболою $y=1/x$ (рис. 4). Ця область є правильною в напрямку осі OY . Тоді за формулою (9) маємо:

Рис.4



$$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{\left(3x^2+1\right)}{y+1}dy=\int\limits_1^2\left(3x^2+1\right)dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{dy}{y+1}=\int\limits_1^2\left(3x^2+1\right)\left(\ln\left|y+1\right|\Big|_{1/x}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(3x^2+1\right)\left(\ln(x+1)-\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+1\right)\left(\ln(x+1)-\ln(1+x)+\ln x\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(3x^2+1\right)\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\left(3x^2+1\right)dx, & v=x^3+x \end{vmatrix}=\left(x^3+x\right)\ln x\Big|_1^2-$$

$$-\int_1^2\frac{x^3+x}{x}dx=10\ln 2-\int_1^2\left(x^2+1\right)dx=10\ln 2-\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_1^2=10\ln 2-\frac{10}{3}.$$

Розглянемо **випадок, який часто зустрічається** у **практиці інтегрування** подвійних інтегралів. Нехай область D є такою, що одну з функцій $y=\varphi_1(x)$ або $y=\varphi_2(x)$ не можна задати **одним (єдиним) аналітичним виразом** на всьому проміжку зміни аргументу x (від $x=a$ до $x=b$). Нехай, наприклад, $a<c<b$, причому

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=\theta(x),\ x\in[a,c];\\ \varphi_1(x)=\chi(x),\ x\in[c,b];\end{cases},$$

де функції $\theta(x)$ і $\chi(x)$ задані аналітично (рис. 5).

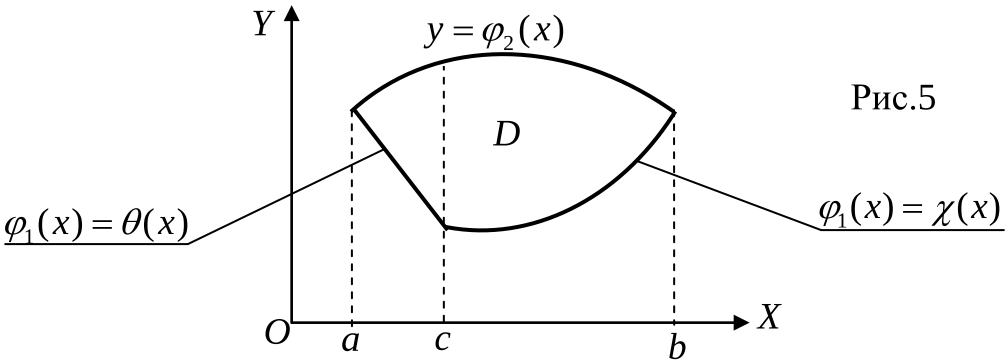


Рис.5

Тоді повторний інтеграл буде представлений таким чином:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\,y)dy\right)dx=\int_a^c\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\,y)dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\,y)dy\right)dx=$$

$$=\int_a^c\left(\int_{\theta(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\,y)dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\,y)dy\right)dx.$$

Першу з цих рівностей записано на основі відомої **властивості адитивності** визначеного інтеграла, а другу – в силу того, що на проміжку $x\in[a,c]$ маємо $\varphi_1(x)=\theta(x)$, а на проміжку $x\in[c,b]$ маємо $\varphi_1(x)=\chi(x)$.

Аналогічний запис для повторних інтегралів мав би силу і у випадку, якщо б функцію $\varphi_2(x)$ було задано різними аналітичними виразами на різних проміжках відрізку $[a,b]$.

§ 3. Деякі властивості повторного інтеграла.

Властивості повторного інтеграла є аналогічними властивостям визначеного інтеграла, але із врахуванням розмірностей функції і області інтегрування D.

Властивість 1 (адитивність повторного інтеграла). *Якщо правильну в напрямку осі OY область D розбити на дві області D_1 і D_2 прямою, паралельною осі OY або осі OX, то повторний інтеграл I_D по області D дорівнюватиме сумі таких же інтегралів, взятих по окремих областях D_1 і D_2, тобто*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{11}$$

Наслідок. Кожну з отриманих областей першого розбиття можна знову розбити на правильні області в напрямку осі OY прямою, паралельною осі OY або осі OX, і потім до них застосувати рівність (11). Отже, область D можна розбити прямими, **паралельними осям координат**, на будь-яке скінченне число правильних областей

$$D_1, D_2, \ldots, D_m,$$

і при цьому буде мати силу твердження, що повторний інтеграл по області D дорівнює сумі повторних інтегралів по частинних областях розбиття, тобто

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_m} \tag{12}$$

Властивість 2 (Оцінка величини повторного інтеграла). *Нехай m і M є найменшим і найбільшим значеннями функції $f(x,y)$ в області D. Тоді має силу співвідношення:*

$$mS \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \le MS, \tag{13}$$

де $S -$ площа області D.

Доведення. Проведемо оцінку внутрішнього інтеграла, позначивши його через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \le \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Mdy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Знайдемо верхню оцінку повторного інтеграла:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \le \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = MS,$$

тобто

$$I_D \le MS \qquad (13^*)$$

Аналогічно дістанемо оцінку повторного інтеграла знизу:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \ge \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} mdy = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \ge \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = mS,$$

тобто

$$I_D \ge mS \qquad (13^{**})$$

З нерівностей (13^*) і (13^{**}) одразу випливає співвідношення (13).

Нижче розтлумачимо **геометричний зміст** Властивості 2.

Властивість 3 (Теорема про середнє значення функції в області D).

Повторний інтеграл I_D від ***неперервної функції*** $f(x,y)$ *по області D з площею S дорівнює добутку площі S на значення функції $f(\bar{x},\bar{y})$ в деякій точці $P(\bar{x},\bar{y})$ області D, тобто*

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot S \qquad (14)$$

Доведення. Із співвідношення (13) дістанемо:

$$m \le \frac{1}{S} I_D \le M \ .$$

Число I_D/S міститься між найбільшим і найменшим значеннями функції $f(x,y)$ в області D. В силу **неперервності функції** $f(x,y)$ вона набуває всіх проміжних значень між m і M, в тому числі в області D знайдеться така точка $P(\bar{x},\bar{y}) \in D,$ в якій значення функції буде дорівнювати величині I_D/S, тобто $f(\bar{x},\bar{y}) = I_D/S$, яка називається **середнім значенням функції в області** D. Звідси отримаємо потрібний результат:

$$I_D = f(\overline{x}, \overline{y}) \cdot S \tag{15}$$

Тепер неважко з'ясувати **геометричний зміст Теореми про оцінку** величини подвійного інтеграла (**Властивість 2**): шуканий об'єм V тіла перевищує об'єм циліндра з основою S і висотою m, проте є меншим об'єму циліндра з основою S та висотою M (де m і $M -$ найменше і найбільше значення функції $z = f(x, y) \geq$ в області D). Це випливає з того, що повторний інтеграл I_D дорівнює об'єму V цього тіла.

Зауваження 2. Якщо у формулі (8) покласти $f(x, y) = 1$, то отримаємо значення об'єму прямого циліндра з висотою $h = 1$ і площею S основи. Отже, це значення об'єму чисельно буде дорівнювати площі S основи цього циліндра. Тому площа плоскої області D обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx. \tag{16}$$

Для обчислення подвійного інтеграла його **потрібно представити у вигляді повторного**. Як ми бачили вище, це можна зробити **двома різними шляхами**: або за формулою (9), або за формулою (10). В кожному конкретному випадку в залежності від вигляду області D або підінтегральної функції потрібно вибирати ту або іншу формулу для обчислення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. Якщо область D **не є правильною** ані вздовж осі OX, ані вздовж осі OY (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області D, перетинають границю області більш, ніж у двох точках), то подвійний інтеграл по цій області **не можна представити** у вигляді повторного. Якщо вдається розбити неправильну область D на скінченне число правильних або вздовж осі OX, або вздовж осі OY областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, то, обчислюючи подвійний інтеграл по кожній з цих областей за допомогою повторного інтеграла і додаючи отримані результати, дістанемо шуканий інтеграл по області D.

Зауваження 4. В подальшому, записуючи повторний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

будемо опускати дужки, в яких записаний внутрішній інтеграл, тобто будемо писати так:

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dydx.$$

При цьому, як і при наявності дужок, будемо вважати, що перше інтегрування здійснюється за тою змінною, диференціал якої записаний першим, а потім за тою змінною, диференціал якої записаний другим. Проте, такий підхід не є загальноприйнятим: в деяких підручниках приймається протилежна умова: спочатку інтегрувати за тою змінною, диференціал якої стоїть на останньому місці. Іноді використовують такий запис:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

§ 4. Властивості подвійного інтеграла.

Властивості подвійного інтеграла ґрунтуються на **основі властивостей повторного інтеграла** і є аналогічними властивостям визначеного інтеграла, але із врахуванням розмірностей функції і області інтегрування.

Нехай функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ **інтегровні** в області D, тоді:

1. $\iint\limits_D c \cdot f\left(x, y\right)dxdy = c \cdot \iint\limits_D f\left(x, y\right)dxdy$, ($c = const$).

2. $\iint\limits_D \left(f(x, y) \pm g(x, y)\right)dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\,dx \pm \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy$.

Ці дві властивості називаються **лінійністю подвійного інтеграла**.

3. **Адитивність подвійного інтеграла**.

Якщо $D = D_1 \cup D_2$ і $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

4. **Монотонність подвійного інтеграла**. Якщо $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

5. **Порівняння подвійних інтегралів з «модулями»**.

$$\left| \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \right| \le \iint\limits_D \left| f(x, y) \right| dxdy.$$

6. **Оцінка величини подвійного інтеграла по області D**.

Якщо m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції в області D, то $m \le f(x, y) \le M$ і

$$m \cdot S \le \iint\limits_D f(x, y)dxdy \le M \cdot S,$$

де S – площа області D.

7. Теорема про середнє значення функції $f(x, y)$ в області D.

Якщо функція $f(x, y)$ **неперервна** в замкненій обмеженій області D, то в цій області існує точка $M\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, для якої має місце така рівність:

$$\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f\left(\overline{x}, \overline{y}\right),$$

Означення. *Величину $f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ називають **середнім значенням функції** $f(x, y)$ в області D.*

§ 5. Подвійний інтеграл як адитивна функція області. Похідна по площі від подвійного інтеграла.

Розглянемо подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$. Будемо вважати, що підінтегральна функція $f(x,y)$ фіксована, а область інтегрування D є **змінною**. Тоді цей інтеграл буде представляти деяку функцію $\Phi(D)$ змінної області D. В силу **Властивості 3** попереднього параграфа ця функція є **адитивною**. Множину областей, на якій вона визначена, складають всі **квадровні фігури**, що містяться в квадровній фігурі D_0 – області визначення функції $f(x,y)$.

З Теореми про **середнє значення функції** в заданій області для подвійних інтегралів (**Властивість 7**) випливає наступний цікавий результат. Нехай

$$F(D) = \iint\limits_D f(x,y)ds \tag{17}$$

де $f(x,y)$ – деяка фіксована **неперервна функція на всій області** D. Покажемо, що **адитивна функція області** $F(D)$, яка визначена формулою (17), має похідну по площі і ця похідна співпадає з підінтегральною функцією $f(x,y)$. Це Твердження узагальнює результат, відомий нам з одновимірного інтегрування: похідна від невизначеного інтеграла $F(x) = \int f(x)dx$ дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Дійсно, нехай P_0 – деяка фіксована точка, D – область, яка лежить в деякому крузі з центром в точці P_0, та m і M – відповідно точна нижня і точна верхня грані значень функції $f(x,y)$ в області D. За Теоремою про середнє значення маємо:

$$m \le \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x,y)ds \le M .$$

При стягуванні області D до точки P_0, тобто при прямуванні радіуса круга (в якому лежить область D) до нуля, числа m і M прямуватимуть (в силу неперервності функції $f(x,y)$ в точці P_0) до одної і тої самої величини, а саме до значення функції P_0 в цій точці. Отже, до цієї границі прямує і затиснуте між ними співвідношення. Таким чином, дійсно, похідна від подвійного інтеграла (17) по площі дорівнює підінтегральній функції $f(x,y)$:

$$\frac{dF(s)}{ds} = f(x,y).$$

Типові завдання на застосування подвійного та повторного інтеграла.

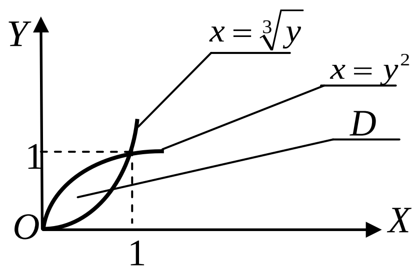
А). Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

Приклад І. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx .$$

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена кубічною параболою $y = x^3$ і квадратичною параболою $y = \sqrt{x}$ (рис. 1).

Рис. 1



Будь-яка пряма перетинає область D не більше ніж у двох точках; отже, можна подвійний інтеграл обчислювати за формулою (10), поклавши $x = \psi_1(y) = y^2$, $x = \psi_2(y) = \sqrt[3]{y}$, $0 \le y \le 1$. Тоді отримаємо:

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\right)dy.$$

Б). Обчислення площі плоскої фігури.

Приклад ІІ. За допомогою повторного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=2-x^2$ і $y=x$ (рис. 2). Площу обчислюємо за формулою (9).

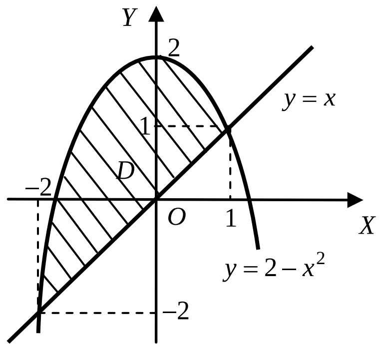


Рис. 2

Розв'язання. Для визначення меж інтегрування розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=x \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 2-x^2=x \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x_1=-2,\quad x_2=1\right)$$

Отже, парабола $y=2-x^2$ і пряма $y=x$ перетинаються в точках A і B, а тому $\left(-2\le x\le 1\right)$ і межі інтегрування за змінною x сталі і дорівнюють $x_1=-2$ і $x_2=1$ (рис. 2). Тоді за формулою (9) маємо:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy=\int_{-2}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\int_{-2}^{1}\left(y\Big|_{x}^{2-x^2}\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{1}-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=2\left(1-(-2)\right)-\frac{1}{3}\left(1-(-2)^3\right)-\frac{1}{2}\left(1-(-2)^2\right)=6-3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\ \text{(кв. од.)}.$$

В). **Обчислення об'єму тіла**. Об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою (8).

Приклад ІІІ. Обчислити об'єм тіла, обмеженого такими поверхнями (рис.3):

$$y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=6,\ z=0.$$

Розв'язання. Маємо циліндричне тіло, яке обмежене зверху площиною $x+z=6$, знизу – координатною площиною OXY, $(z=0)$, а з боків циліндричними поверхнями $y=\sqrt{x}$ і $y=2\sqrt{x}$, у яких твірні паралельні осі OZ. Побудуємо область D на площині OXY ($z=0$), яка представляє собою «криволінійний» трикутник. Ця область є правильною в напрямку осі OY та обмежена лініями: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=6$ (рис.3). З рисунка дістанемо межі інтегрування: $0 \le x \le 6$; $\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}$.

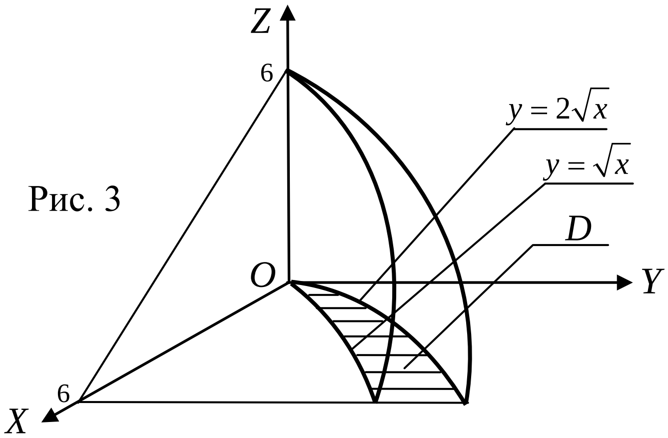


Рис. 3

Отже, маємо:

$$V=\int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)\,dy = \int_0^6 (6-x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^6 (6-x)\left(y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left(6-x\right)\sqrt{x}dx = \int_0^6 \left(6x^{1/2}-x^{3/2}\right) dx = 6\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^6 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\Big|_0^6 = \frac{48\sqrt{6}}{5} \text{ (куб. од.)}$$