ЛЕКЦІЯ №16 (Лекція №3 – ТФКЗ).

Інтегрування функцій комплексної змінної (ФКЗ).

План

Означення інтеграла ФКЗ і його властивості.
Інтегрування функціональних рядів.
Основна Теорема Коші.
Формула Коші.
Розклад аналітичної функції в степеневий ряд.

§ 16.1. Означення інтеграла ФКЗ і його властивості.

Нехай $f(z)$ – неперервна однозначна функція комплексної змінної на деякій кусково-гладкій кривій AB (рис.1).

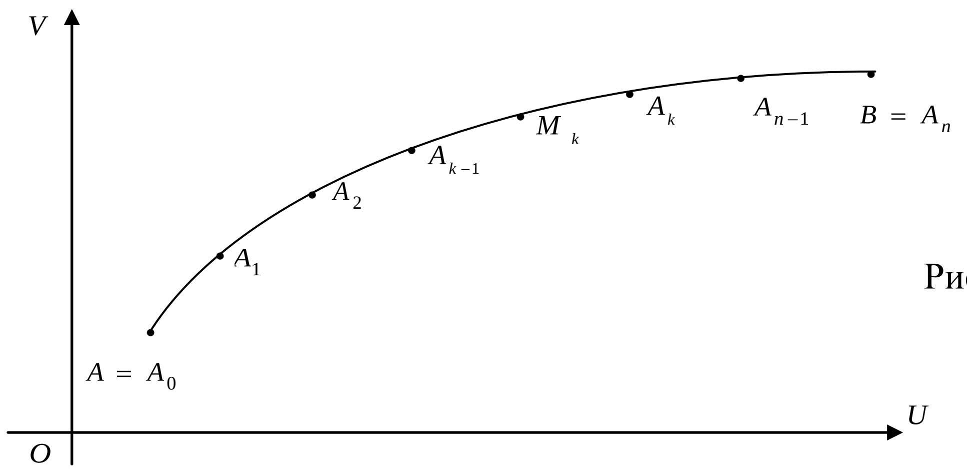

Рис.16.1

Довільно розіб'ємо криву AB на n **елементарних дуг** $\cup A_{k-1}A_k$ $(k = \overline{1,n})$ і нехай комплексні числа z_{k-1} відповідають точкам цього розбиття: $z_{k-1} \leftrightarrow A_{k-1}, k = \overline{1,n}$. На кожній елементарній дузі $\cup A_{k-1}A_k$ розбиття кривої AB довільно виберемо по одній точці M_k, яка відповідає числу ς_k, і розглянемо інтегральну суму для функції $f(z)$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k) \cdot \Delta z_k , \qquad (16.1)$$

де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Означення інтеграла за комплексною змінною. *Якщо при прямуванні до нуля найбільшої довжини елементарної дуги* $\cup A_{k-1}A_k$ *розбиття кривої* AB *інтегральна сума* (16.1) ***має границю****, яка не залежить ні від способу розбиття кривої на елементарні дуги* $\cup A_{k-1}A_k$*, ні від вибору точок* ς_k *на кожній з них, то цю границю називають* ***інтегралом за комплексною змінною від функції*** $f(z)$ *вздовж кривої* AB *і позначають*

$$\int_{AB} f(z)dz\ . \tag{16.2}$$

Означення. *Криву* AB *називають контуром інтегрування,* A *– початковою,* B *– кінцевою точкою інтегрування. Якщо контур інтегрування замкнений, тобто початкова та кінцева точки збігаються* (йдеться про **замкнені контури без точок самоперетину**), то ***існує два напрями обходу***: **проти стрілки годинника** (**додатна орієнтація контуру**) та за **стрілкою годинника** (**від'ємна орієнтація контуру**). Іншими словами, **контур вважається додатно орієнтованим**, якщо при його **обході область**, обмежена цим контуром, **залишається зліва**.

Інтеграл по замкненому контуру L позначають так: $\oint_L f(z)dz$.

З цього означення інтеграла безпосередньо випливають такі його **Властивості**:

1). $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$ (**орієнтовність**).

2). $\int_{AB} Cf(z)dz = C\int_{AB} f(z)dz$ (**лінійність**).

3). $\int_{AB} [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_{AB} f_1(z)dz + \int_{AB} f_2(z)dz$ (**лінійність**).

4). $\int_{AB} f(z)dz = \int_{AC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz$, якщо $AB = AC \cup CB$; (**адитивність**).

5). $\left|\int_{AB} f(z)dz\right| \le Ml$, де $\left|f(z)\right| \le M$, $\forall z \in AB$, l – довжина кривої AB .

Твердження. *Якщо функція* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ***неперервна*** *на кривій* AB *, то інтеграл* (16.2) *існує і справедлива рівність*

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} udx + vdy\ , \tag{16.3}$$

*де інтеграли праворуч є **криволінійними інтегралами другого роду** вздовж кривої* AB .

Доведення. Дійсно, якщо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, а $z_k = x_k + iy_k$, то маємо

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\cdot\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)]\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(x_k, y_k)\Delta x_k - v(x_k, y_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n} [v(x_k, y_k)\Delta x_k + u(x_k, y_k)\Delta y_k]\ .$$

Звідки і випливає формула (16.3).

Наслідок. *Обчислення інтеграла за комплексною змінною зводиться до обчислення* ***двох звичайних криволінійних інтегралів ІІ-го роду***.

Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, то $z = z(t)$, де $z(t) = x(t) + iy(t)$ – комплексно-параметричне рівняння кривої AB і інтеграл (16.3) набуває вигляду:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} udx + vdy = \int_{\alpha}^{\beta}\left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right)dt + i\int_{\alpha}^{\beta}\left(v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt}\right)dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}(u + iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dz}{dt}dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt,$$

де t змінюється від α до β.

Отже, маємо

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \tag{16.4}$$

Формула (16.4) зводить обчислення інтеграла за комплексною змінною від функції $f(z)$ до обчислення звичайних визначених інтегралів від дійсних функцій.

Заміна змінної в інтегралах від функції комплексної змінної проводиться аналогічно випадку функції дійсної змінної.

Якщо крива AB є напівпрямою, яка виходить з точки z_0 або є колом з центром в точці z_0, то **зручно робити заміну змінної** $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$.

В першому випадку $\varphi = const$ (кут між напіврямою і віссю OX), ρ – змінна інтегрування, в другому випадку $\rho = const$ (радіус кола), φ – змінна інтегрування.

§ 16.2. Інтегрування функціональних рядів.

Розглянемо функціональний ряд

$$S(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

де функції $f_n(z)$ задані на кусково-гладкій кривій L.

Справедлива наступна **Теорема**.

Теорема. *Якщо функціональний ряд на кривій* L *збігається* ***рівномірно****, а функції* $f_n(z)$ *є* ***неперервними*** *на* L*, то*

$$\int_L S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_L f_n(z)dz .$$

Доведення. Оскільки сума $S(z)$ **рівномірно збіжного ряду** є **неперервною** функцією на L, то інтеграл $\int_L S(z)dz$ існує. Крім того, з рівномірної збіжності ряду випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що при $n > N(\varepsilon)$ виконуються нерівності

$$\left|r_n(z)\right| = \left|S(z) - S_n(z)\right| = \left|S(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{l}, \text{ для всіх } z \in L .$$

Зазначимо, що тут число $N(\varepsilon)$ не залежить від $z \in L$, а l – довжина кривої L. Звідси для $n > N(\varepsilon)$ дістанемо

$$\left|\int_L S(z)dz - \sum_{k=0}^{n} \int_L f_k(z)dz\right| = \left|\int_L \left[S(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\right]dz\right| \le \frac{\varepsilon}{l}\int_L dz = \frac{\varepsilon}{l}\cdot l = \varepsilon .$$

А це і означає, що

$$\int_L S(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \int_L f_k(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_L f_k(z)dz .$$

Теорему доведено.

Наслідок. **Рівномірно збіжні функціональні ряди можна почленно інтегрувати**. Степеневі ряди є частинним випадком функціональних рядів. Отже, **степеневий ряд** можна почленно інтегрувати вздовж довільної кривої, яка цілком **належить кругу збіжності** цього ряду. Це випливає з того, що степеневий ряд є **рівномірно збіжним**, а його члени $a_n(z - z_0)^n$ є **неперервними функціями**.

§ 16.3. Основна Теорема Коші (стосовно інтегрування аналітичних функцій).

Теорема Коші (стосовно інтегрування аналітичних функцій).

Якщо функція $f(z)$ *є* ***аналітичною в однозв'язній області*** D *, то інтеграл від* $f(z)$ *по довільному кусково-гладкому* ***замкненому контуру*** L *, який цілком лежить в області* D *, дорівнює нулю*:

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0\ ,\ L \in D\ .$$

Доведення. Оскільки $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) -$ аналітична функція в області D, то функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є неперервно диференційовними і для них виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тому вирази $vdx + udy$ і $udx - vdy$ є **повними диференціалами в однозв'язній області** D, а це означає, що криволінійні інтеграли по замкненому контуру L від них дорівнюють нулю. Отже, за формулою (16.3) отримаємо:

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L udx - vdy + i\oint\limits_L vdx + udy = 0\ .$$

Теорему Коші доведено.

Наслідок 1. Нехай область D обмежена складним додатно орієнтованим кусково-гладким контуром $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ (рис.16.2). Тобто, при обході по контуру L **точки області** D **залишаються ліворуч**. Тоді для аналітичної на $\overline{D}$ функції $f(z)$ має місце рівність: $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

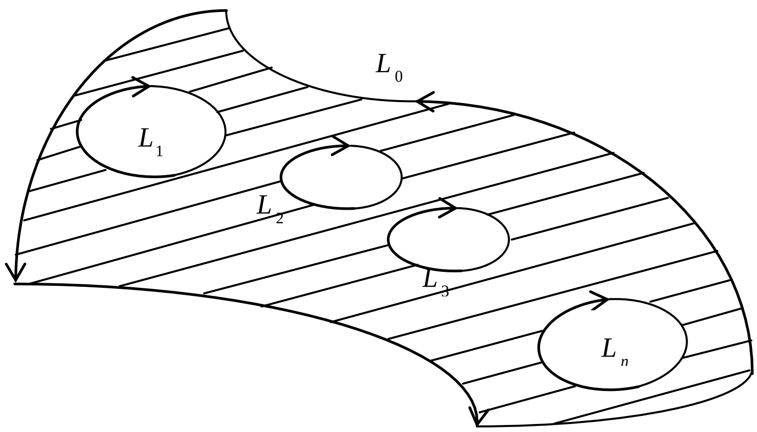

Рис.16.2

Доведення. Розглянемо випадок **двозв'язної області** ($n = 1$) з кусково-гладким контуром $L = L_0 + L_1$ (рис.16.3). З'єднаємо контури L_0 і L_1 гладкою кривою $l = AB$. Тоді область D можна розглядати як область, обмежену контуром $\tilde{L} = L_0 + AB + L_1 + BA$, а за Теоремою Коші $\int\limits_{\tilde{L}} f(z)dz = 0$.

Але $\int\limits_{AB+BA} f(z)dz = 0$, тому $\oint\limits_{L_0+L_1} f(z)dz = 0$. Аналогічно можна провести доведення для довільного числа $n > 2$.

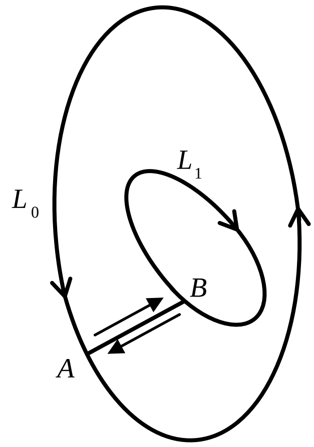

Рис.16.3

Наслідок 2. Нехай **область** D **обмежена зовнішнім контуром** L_0 і внутрішніми контурами $L_1, L_2, \cdots, L_n$, орієнтованими проти годинникової стрілки (як на рис.16.4). Тоді для аналітичної на $\overline{D}$ функції $f(z)$ виконується рівність

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz. \qquad (16.5)$$

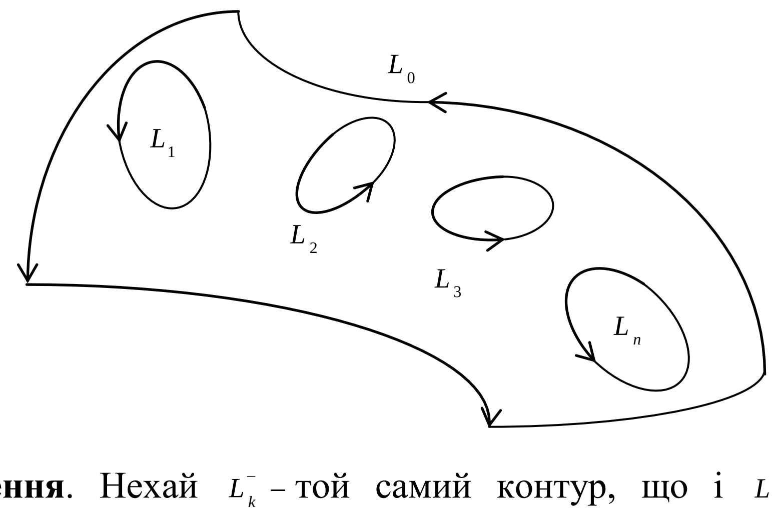

Рис.16.4

Доведення. Нехай L_k^- – той самий контур, що і L_k, але орієнтований за **годинниковою стрілкою**. Тоді з **Наслідку 1** випливає рівність

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k^-} f(z)dz = 0. \qquad (16.6)$$

Оскільки $\oint\limits_{L_k^-} f(z)dz = -\oint\limits_{L_k} f(z)dz$, то з (16.6) випливає (16.5). Зокрема, якщо $n = 1$ (рис.16.5), то

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz\,. \tag{16.7}$$

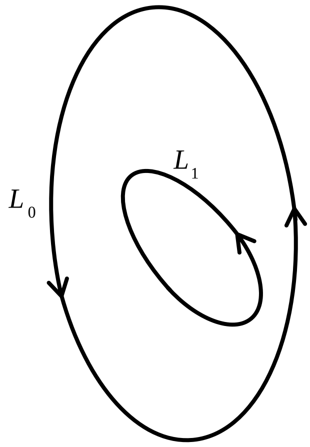

Рис.16.5

Приклади. Довести, що для довільного додатно орієнтованого замкненого кусково-гладкого контуру L, який містить всередині точку z_0, виконуються рівності:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0,\; n \neq -1, \\ 1,\; n=-1. \end{cases} \tag{16.8}$$

За замкнений контур L виберемо коло одиничного радіусу з центром у точці z_0, який описується таким рівнянням:

$$L: \left\{ z = z_0 + e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}.$$

Розглянемо **перший** випадок при $n \neq -1$. Маємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L (z-z_0)^n dz = \begin{vmatrix} z - z_0 = e^{i\varphi}; \\ dz = e^{i\varphi} i d\varphi; \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\cdot e^{i\varphi} i d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} i d\varphi = \frac{1}{2\pi i(n+1)} e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)}\left(e^{i2\pi(n+1)}-1\right) = 0\,.$$

Розглянемо **другий** випадок при $n = -1$. Отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L (z-z_0)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} e^{i\varphi} i d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1\,.$$

Формулу (16.8) доведено.

З **Наслідку 2** (формула (16.7)) випливає, що рівності (16.8) виконуються також і при заміні в них кола з центром в точці z_0 **довільним** додатно орієнтованим замкненим кусково-гладким контуром, який **містить** точку z_0.

Зазначимо, що рівності (16.8) є **важливими в теорії аналітичних функцій**, за допомогою них обчислюються криволінійні інтеграли.

Наслідок 3. *Якщо функція* ***аналітична в однозв'язній області*** D *, то інтеграл* $\int\limits_{AB} f(z)dz$ *по довільній кусково-гладкій кривій* AB*, яка цілком лежить в* D *,* ***не залежить від форми кривої*** AB *і, отже,* ***залежить тільки від початкової і кінцевої точок цієї кривої****.*

Доведення. Нехай L_1 і L_2 довільні криві, які з'єднують точки A і B (рис.16.6).

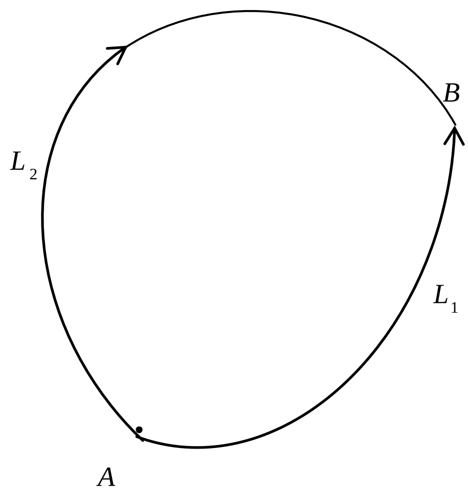

Рис.16.6

Тоді шлях по замкненому додатному контуру представляє собою суму шляхів AB і BA, а саме $AB + BA$, і відповідні криволінійні інтеграли пов'язані таким співвідношенням:

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz - \int\limits_{L_2} f(z)dz = \oint\limits_{AB+BA} f(z)dz = 0\,.$$

Звідси і випливає, що $\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz$.

Таким чином, для інтеграла від аналітичної функції можна користуватись позначенням $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, де число z_1 відповідає точці A, а число z_2 - точці B .

Наслідок 4. *Якщо функція* ***аналітична*** *в однозв'язній області* D *, то* ***вона має первісну*** *і для двох довільних точок* $z_1, z_2 \in D$ *справедлива* ***формула Ньютона-Лейбниця:***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}, \tag{16.9}$$

де $F(z)$ – первісна для $f(z)$, тобто $F'(z) = f(z)$.

Доведення. Розглянемо інтеграл зі змінною верхньою межею $z \in D$:

$$\Phi(z) = \int_{z_1}^{z} f(\varsigma)d\varsigma .$$

Покажемо, що $\Phi'(z) = f(z)$.

Запишемо вираз для відношення приростів функції $\Delta\Phi$ і аргументу Δz :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma .$$

Тепер побудуємо вираз для такої різниці:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma - \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\varsigma = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\varsigma) - f(z)]d\varsigma .$$

Оскільки функція $f(z)$ **неперервна в точці** z, то для $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|\varsigma - z| < \delta(\varepsilon)$ одразу виконується нерівність $|f(\varsigma) - f(z)| < \varepsilon$. Тоді з **Властивості 5** для інтегралів при $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$ маємо: $\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\varsigma) - f(z)]d\varsigma < l\varepsilon = |\Delta z|\varepsilon$, якщо за шлях інтегрування взяти відрізок прямої, що сполучає точки z і $z + \Delta z$. Звідси дістанемо:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|\varepsilon = \varepsilon ,$$

а це і означає, що $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z}\right) = f(z)$, або $\Phi'(z) = f(z)$.

Таким чином, **аналітична в однозв'язній області** D **функція завжди має первісну**.

Покажемо, що дві довільні первісні одна від одної відрізняються на сталу.

Дійсно, нехай $F_1'(z) = F_2'(z) = f(z)$, тоді функція $\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$ має похідну $\Phi'(z)$, яка в області D дорівнює нулю, а тому $\Phi(z) = const$.

Нехай $F(z)$ – деяка первісна для функції $f(z)$, тоді з наведених вище результатів маємо

$$\Phi(z) = \int_{z_1}^{z} f(\varsigma)d\varsigma = F(z) + C, C = const.$$

Поклавши в цю рівність $z = z_1$, дістанемо: $0 = F(z_1) + C$, або $C = -F(z_1)$ і тому можна записати:

$$\int_{z_1}^{z} f(\varsigma)d\varsigma = F(z) - F(z_1),$$

а при $z = z_2$ остаточно отримаємо **формулу Ньютона-Лейбниця**:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Зауваження 1. Визначення первісних від елементарних функцій комплексної змінної формально не відрізняється від такої для функцій дійсної змінної.

Зауваження 2. Доведення існування первісної в **Наслідку 4** залишається в силі, якщо **замість аналітичності функції** $f(z)$ в D **вимагати: 1) її неперервності** і **2)** щоб інтеграл від $f(z)$ вздовж довільної замкненої кусково-гладкої кривої з області D **дорівнював нулю**. Але первісна $F(z)$ для $f(z)$, як функція, що має неперервну похідну, $F'(z) = f(z)$, сама буде аналітичною.

Отже, справедлива наступна **Теорема (Морера).**

Теорема Морера. *Якщо функція* $f(z)$ ***неперервна в однозв'язній області*** D *і* ***інтеграл*** *від* $f(z)$ *по довільному кусково-гладкому* ***замкненому контуру****, який цілком лежить в* D*,* ***дорівнює нулеві****, то функція* $f(z)$ ***аналітична в області*** D.

Таким чином, можна дати ще одне **Означення аналітичної функції**, еквівалентне попередньому.

Друге Означення аналітичної функції.

Функція $f(z)$*,* ***неперервна в однозв'язній області*** D*, називається* ***аналітичною*** *в цій області, якщо інтеграл від функції* $f(z)$ *по* ***довільному замкненому кусково-гладкому контуру****, що* **цілком лежить в області** D*,* ***дорівнює нулеві****.*

Це Означення належить американському математику **У. Осгуду**.

§ 16.4. Інтегральна формула Коші.

Використовуючи **Теорему Коші** і її **Наслідки** доведемо важливу формулу, авторство якої також належить Коші. Ця формула виражає значення аналітичної функції $f(z)$ **в довільній внутрішній точці** z_0 області D, в якій ця функція **аналітична**, **через значення функції** $f(z)$ **на межі області** D.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і на її межі L. Тоді функція

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

буде аналітичною в $\overline{D}$, крім точки $z = z_0$. Виріжемо з області D круг малого радіуса ρ з центром в точці z_0 і застосуємо до функції $\varphi(z)$ формулу (16.7)

$$\oint_L \varphi(z)dz = \oint_{L_\rho} \varphi(z)dz. \qquad (16.10)$$

Оскільки $\lim\limits_{z=z_0} \varphi(z) = f'(z_0)$, то функцію $\varphi(z)$ можна **довизначити** таким чином: $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, після чого вона стане неперервною в замкненій області $\overline{D}$, а отже обмеженою: $\left|\varphi(z)\right| \le M,\ \forall\ z \in \overline{D}, M > 0$. Тепер за **Властивістю 5** для інтегралів, маємо

$$\left|\oint_{L_\rho} \varphi(z)dz\right| \le l \cdot M = 2\pi\rho M.$$

Тоді переходячи в рівності (16.10) до границі при $\rho \to 0$ отримаємо:

$$\oint_L \varphi(z)dz = 0,\ або\ \oint_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = 0.$$

Звідси можна записати:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz - f(z_0) \cdot \oint_L \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

Але з формули (16.8) маємо:

$$\oint_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

тому

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\cdot 2\pi i = 0.$$

Звідси отримаємо відому інтегральну формулу Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{16.11}$$

Оскільки z_0 довільна точка області D , то формулу (16.11) перепишемо так:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma,\ z\in D,\ \varsigma \in L. \tag{16.12}$$

Наслідок. З формули (16.12) випливає, що **значення аналітичної функції всередині контуру** L (тобто в області D) **цілком визначаються значеннями цієї функції тільки на контурі** L .

Замість простого контуру L можна вибрати складний контур, який складається із зовнішнього контуру і декількох внутрішніх контурів (рис.16.4).

Формулу Коші з успіхом можна використати для обчислення деяких інтегралів.

Приклад. Обчислити інтеграл: $\oint\limits_{|z=4|} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$.

Розв’язання. В крузі $|z| \le 4$ є дві точки $z = \pm 3i$, в яких знаменник підінтегральної функції дорівнює нулеві.

Перший спосіб (за формулою (16.12)). Розкладемо дріб

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = \left(\frac{1}{z-3i} - \frac{1}{z+3i}\right)\frac{1}{6i}.$$

Тоді заданий інтеграл можна представити таким чином:

$$\oint\limits_{|z=4|} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} = \frac{1}{6i}\oint\limits_{|z=4|} \frac{\frac{1}{z+9}}{z-3i}dz - \frac{1}{6i}\oint\limits_{|z=4|} \frac{\frac{1}{z+9}}{z+3i}dz = \frac{1}{6i}2\pi i \left.\frac{1}{z+9}\right|_{z=3i} - \frac{1}{6i}2\pi i \left.\frac{1}{z+9}\right|_{z=-3i} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{1}{3i+9} - \frac{\pi}{3}\frac{1}{9-3i} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3i+9} + \frac{1}{3i-9}\right) = -\frac{\pi i}{45}.$$

Другий спосіб (за формулою (16.6)). Розглянемо **тризв’язну область** (рис. 16.7), обмежену колом $|z| = 4$, і колами L_1 і L_2 з центрами в точках $z = \pm 3i$, які не перетинаються і лежать цілком в крузі $|z| \le 4$.

Тоді за формулою (16.6) дістанемо:

$$\oint\limits_{|z=4|} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} = \oint\limits_{L_1} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} + \oint\limits_{L_2} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} = .$$

$$= \oint\limits_{L_1} \frac{\frac{1}{(z+9)(z+3i)}}{z-3i}dz + \oint\limits_{L_2} \frac{\frac{1}{(z+9)(z-3i)}}{z+3i}dz = 2\pi i \left.\frac{1}{(z+9)(z+3i)}\right|_{z=3i} + 2\pi i \left.\frac{1}{(z+9)(z-3i)}\right|_{z=-3i} =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{(3i+9)6i} + \frac{1}{(-3i+9)(-6i)}\right) = \frac{2\pi i}{6i}\left(\frac{1}{3i+9} + \frac{1}{3i-9}\right) = -\frac{\pi i}{45}.$$

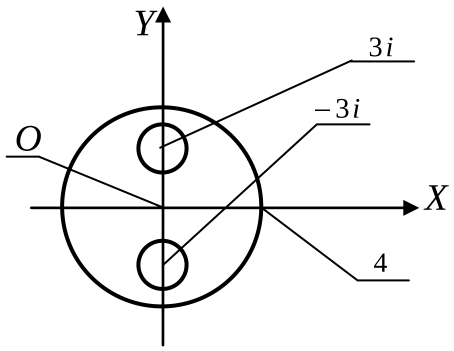

Рис. 16.7

§ 16.5. Аналітичність суми степеневого ряду. Розклад аналітичної функції в степеневий ряд. Ряд Тейлора.

Нагадаємо деякі **особливості** степеневих рядів.

Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – степеневий ряд і R – його радіус збіжності, причому $0 < r < R$. Будь-яка точка r, що **лежить всередині круга збіжності**, є точкою **абсолютної збіжності степеневого ряду,** тобто ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n r^n\right|$ є **збіжним**. Але при $|z| \le r$ маємо $\left|a_n z^n\right| \le \left|a_n r^n\right|$, тому степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ є **рівномірно збіжним** в крузі $|z| \le r$. Оскільки довільна замкнена область, що лежить всередині круга збіжності, може бути повністю розміщена в крузі $|z| \le r$ при **належному виборі** числа $0 < r < R$, то ми довели важливе **твердження (Теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду)**: **будь-який степеневий ряд є рівномірно збіжним всередині свого круга збіжності**.

Висновок. Оскільки члени степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ є аналітичними функціями, то із доведеної Теореми випливає, що **сума степеневого ряду є**

аналітичною функцією всередині свого круга збіжності і що степеневий ряд можна **довільне число раз почленно диференціювати всередині свого круга збіжності**. Отже, нові степеневі ряди, які в результаті диференціювання виникають, **мають не менший радіус збіжності** (насправді – **той же радіус збіжності**).

Аналогічно, степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ є **рівномірно збіжним всередині круга** збіжності з центром в точці z_0, а **його сума є аналітичною функцією всередині цього круга**.

Ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, який за область збіжності має кільце збіжності (рис.16.8), є **рівномірно збіжним всередині кільця** і **його сума є аналітичною функцією всередині цього кільця**.

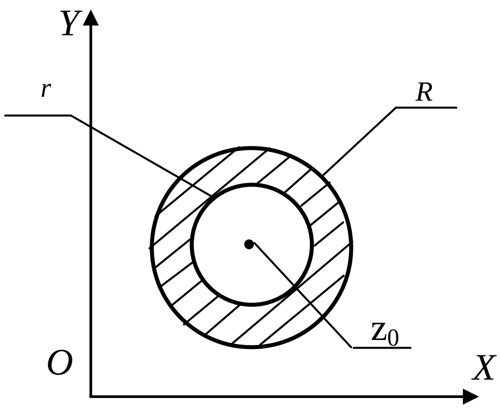

Рис.16.8

Тепер перейдемо до **формули Коші**. Вона має багато важливих теоретичних застосувань. Використаємо її для доведення однієї з центральних Теорем теорії аналітичних функцій.

Теорема (про розклад аналітичної функції в степеневий ряд). *Якщо функція* $f(z)$ – ***аналітична в крузі*** $|z - z_0| \le R$ *(включаючи його межу), то її можна розкласти в степеневий ряд за степенями* $z - z_0$*, який є збіжним в середині цього круга*.

Доведення. Не втрачаючи загальності, покладемо $z_0 = 0$ (загальний випадок зводиться підстановкою $z - z_0 = Z$ до випадку $Z_0 = 0$). За формулою Коші (16.12) для кола $|z| \le R$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma}\frac{1}{1-\frac{z}{\varsigma}}d\varsigma. \qquad (16.13)$$

Підінтегральну функцію запишемо в такому вигляді (користуючись геометричною прогресією зі знаменником $\frac{z}{\varsigma}$):

$$\frac{f(\varsigma)}{\varsigma}\frac{1}{1-\frac{z}{\varsigma}}=\frac{f(\varsigma)}{\varsigma}\cdot\left(1+\frac{z}{\varsigma}+\frac{z^2}{\varsigma^2}+\cdots+\frac{z^n}{\varsigma^n}\right)+\frac{f(\varsigma)}{\varsigma}\cdot\frac{z^{n+1}}{\varsigma^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\varsigma}}.$$

Оскільки $q=\left|\frac{z}{\varsigma}\right|<1$ (оскільки точка z – в крузі, а ς – на колі, що обмежує цей круг), то для залишкового члена геометричного ряду

$$r_n=\frac{1}{\varsigma}\cdot\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\varsigma}}.$$

маємо таку оцінку

$$|r_n|\le\frac{1}{R}\cdot q^{n+1}\cdot\frac{1}{1-q}.$$

Підставимо значення підінтегральної функції у вираз (16.13) і почленно його проінтегруємо. Тоді

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+R_n,$$

де

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma^{k+1}}d\varsigma,\quad R_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=R}f(\varsigma)\cdot r_n\cdot d\varsigma.$$

Теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що $R_n\to0$ при $n\to\infty$. Оскільки функція $f(\varsigma)$ є **неперервною на колі** $|z|=R$, то вона є **обмеженою на цьому колі**, тобто $|f(\varsigma)|\le M$. Тоді з **Властивості 5** для інтегралів маємо:

$$|R_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\varsigma|=R}f(\varsigma)\cdot r_n\cdot d\varsigma\right|\le\frac{1}{2\pi}M\,\frac{1}{R}q^{n+1}\frac{1}{1-q}2\pi R=\frac{Mq^{n+1}}{1-q}.$$

Оскільки $0<q<1$, то $R_n\to0$ при $n\to\infty$. Таким чином, функція $f(z)$ розкладена в степеневий ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k ,$$

де $a_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma|=R}\dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma^{k+1}}d\varsigma$.

Наслідок 1. *Функція* $f(z)$ ***, аналітична в області*** D *, має в цій області* ***похідні всіх порядків***.

Дійсно, за доведеною Теоремою функція $f(z)$ розкладається в степеневий ряд. Але сума степеневого ряду має похідні всіх порядків.

Наслідок 2. *Похідна від* ***аналітичної функції*** $f(z)$ *в області* D *є* ***аналітичною функцією в цій області***.

Це випливає з **Наслідку 1.**

Наслідок 3. *Кожна функція* $f(z)$, ***аналітична*** *в області* D *, може бути розкладена в околі довільної внутрішньої точки* $z_0\in D$ *в* ***ряд Тейлора***

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n ,$$

де

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma , \tag{16.14}$$

C – коло, всередині якого функція $f(z)$ **аналітична**.

Покажемо, що розвинення аналітичної функції $f(z)$ в крузі з центром в точці z_0 **в ряд Тейлора** є **одним-єдиним**.

Отже, нехай функцію $f(z)$ розкладено в крузі $\{|z-z_0|\le R\}$ з центром z_0 в **деякий степеневий ряд:** $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$, а контур Γ – концентричне коло меншого радіуса $r<R$ з центром z_0. Тоді на контурі Γ цей ряд є **рівномірно збіжним.** Помножимо рівність $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ на $\dfrac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$, після чого проінтегруємо її почленно вздовж Γ і помножимо ще на $\dfrac{1}{2\pi i}$. В результаті дістанемо:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(z-z_0)^{k-n-1}dz=a_n\,,$$

де враховано, що

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(z-z_0)^{k-n-1}dz=\begin{cases}0, & k\neq n;\\ 1, & k=n.\end{cases}$$

Отже, ми довели, що довільний степеневий ряд, в який розкладається аналітична функція $f(z)$ в крузі з центром в точці z_0, є **рядом Тейлора**.

Це дає можливість дати ще **одне Означення аналітичної функції**.

Означення. *Однозначна в області* D *функція* $f(z)$ ***називається аналітичною*** *в цій області, якщо для довільної точки* $z_0\in D$ *можна вказати окіл цієї точки, в якому функцію* $f(z)$ *можна розкласти в степеневий ряд за степенями* $z-z_0$.

Це означення належить німецькому математику **К.Вейєрштрассу**.

Наслідок 4. *Якщо функція* $f(z)$ ***аналітична в області*** D *і на її межі* L, *то справедлива формула (тут позначено* $f^{(0)}(z)=f(z)$):

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \ z_0\in D,\ \ z\in L, n=1,2,\cdots\,. \tag{16.15}$$

Це випливає з формули (16.14), оскільки в ній коло C, по якому ведеться інтегрування, можна замінити довільним замкненими кусково-гладким контуром (у тому числі і межею L, яка належить області D і всередині якого мітиться точка z_0.

Наслідок 5. **Оцінка модулей коефіцієнтів ряду Тейлора**.

Якщо на колі Γ модуль функції $f(z)$ не перевищує величини M, то позначивши через R радіус кола Γ і оцінюючи інтеграл у формулі (16.14) за правилом оцінки модуля інтеграла, дістанемо:

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R=\frac{M}{R^n}\,.$$

Отже, отримали наступні нерівності для оцінки величин $|a_n|$:

$$|a_n|\leq\frac{M}{R^n},\ (n=0,1,2,\cdots)\,. \tag{16.16}$$

З формули (16.16) безпосередньо випливає **Теорема Ліувілля**:

Теорема Ліувілля. Ціла функція (тобто аналітична і обмежена на всій z – **площині) є сталою.**

Дійсно, нехай на всій площині

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\ \left|f(z)\right|\le M\ .$$

Тоді для довільного R маємо $\left|a_n\right|\le\dfrac{M}{R^n},(n=0,1,2,\cdots)$, звідки після граничного переходу при $R\to\infty$ знайдемо $\left|a_n\right|\le 0\Rightarrow a_n=0$. Отже, $f(z)=a_0=const$.

З **Теореми Ліувілля** одразу випливає **основна Теорема алгебри**: *будь-який многочлен, відмінний від сталої, **має, щонайменше, один нуль**.*

§16. 6. Розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора.

Наведемо своєрідну таблицю з розвиненнями основних елементарних функцій в ряд Тейлора в околі точки $z_0=0$.

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots,\ |z|<1. \tag{16.17}$$

$$\mathrm{arctg}(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,\ |z|<1. \tag{16.18}$$

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\cdots,\ |z|<1. \tag{16.19}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3-\cdots+(-1)^{n-1}z^{n-1}+\cdots,\ |z|<1. \tag{16.20}$$

$$\mathrm{tg}(z)=z+\frac{2z^3}{3!}+\frac{16z^5}{5!}+\frac{272z^7}{7!}\cdots,\ |z|<\frac{\pi}{2}. \tag{16.21}$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots,\ z\in C\ . \tag{16.22}$$

$$\sin(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\ z\in C\ . \tag{16.23}$$

$$\cos(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}+\cdots,\ z\in C\ . \tag{16.24}$$

$$\operatorname{sh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ z \in C\ . \tag{16.25}$$

$$\operatorname{ch}(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \cdots,\ z \in C \tag{16.26}$$

Формули (16.22) – (16.26), за допомогою яких раніше визначалися функції e^z, $\sin z, \cos z$, тепер розглядаються як розвинення цих функцій у відповідні ряди Тейлора.

Приклади І. **Обчислити інтеграли вздовж заданих кривих**:

а). $\int\limits_L (2z+1)\overline{z}dz,\ L = \left\{ z \mid |z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi \right\}$; **б).** $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz,\ L = \left\{ (x,y) \mid y = 2x^2, 0 \le x \le 1 \right\}$.

Розв'язання. **Перший спосіб**. Перетворимо підінтегральну функцію так:

$$(2z+1)\overline{z} = 2|z|^2 + \overline{z} = 2(x^2+y^2) + x - iy = 2x^2 + 2y^2 + x - iy\ .$$

$$u = 2x^2 + 2y^2 + x;\ v = -y\ .$$

Скористаємось формулою (16.3), в результаті отримаємо:

$$\int\limits_L (2z+1)\overline{z}dz = \int\limits_L (2x^2 + 2y^2 + x)dx + ydy + i\int\limits_L -ydx + (2x^2+2y^2+x)dy\ .$$

Оскільки L – це верхня частина кола $|z| = 1$, то $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, тому

$$\int\limits_L (2z+1)\overline{z}dz = \int\limits_0^\pi [(2\cos^2 t + 2\sin^2 t + \cos t)(-\sin t) + \sin t \cos t]dt +$$

$$+i\int\limits_0^\pi [-\sin t(-\sin t) + (2\cos^2 t + 2\sin^2 t + \cos t)\cos t]dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi (-2\sin t)dt + i\int\limits_0^\pi (1 + 2\cos t)dt = [2\cos t + i(t + 2\sin t)]\Big|_0^\pi = -4 + i\pi\ .$$

Другий спосіб. Зробимо заміну змінної: $z = e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$.

Тоді отримаємо:

$$\int\limits_L (2z+1)\overline{z}dz = \int\limits_0^\pi (2e^{i\varphi}+1)e^{-i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_0^\pi (2e^{i\varphi}+1)d\varphi =$$

$$= i\left(\frac{2e^{i\varphi}}{i} + \varphi\right)\Bigg|_0^\pi = \left(2e^{i\varphi} + i\varphi\right)\Big|_0^\pi = -4 + i\pi\ .$$

б). Тут $\operatorname{Im} z = y, u = y, v = 0$, тому за формулою (16.3) дістанемо:

$$\int_L \operatorname{Im} z dz = \int_L y dx + i\int_L y dy .$$

Оскільки $y = 2x^2, dy = 4xdx, 0 \le x \le 1$, то

$$\int_L \operatorname{Im} z dz = \int_0^1 2x^2 dx + i\int_0^1 8x^3 dx = \left(\frac{2x^3}{3} + i\frac{8x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i .$$

Приклади ІІ. **Обчислити інтеграли від аналітичних функцій**:

а). $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$; **б)**. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z^2 + 1} dz$; **в)**. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$; **г)**. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$.

Розв'язання. а). Всередині круга $|z| \le 1$ знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль тільки в точці $z_0 = 0$. Для застосування формули (16.11) перетворимо заданий інтеграл у такий спосіб:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z(z+2)} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z \cos \pi z}{z+2}}{z} dz .$$

Тут $z_0 = 0$ і функція $f(z) = \frac{e^z \cos \pi z}{z+2}$ – аналітична в крузі $|z| \le 1$. Тому за формулою (16.11) отримаємо:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = 2\pi i \left.\frac{e^z \cos \pi z}{z+2}\right|_{z=0} = \pi i .$$

б). $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z^2 + 1} dz$. Всередині круга $|z - i| \le 1$ підінтегральна функція має тільки одну особливу точку $z = i$. Запишемо інтеграл у вигляді

$$J = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z+i}}{z-i} dz .$$

Функція $f(z) = \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z+i}$ в цьому крузі аналітична. Тому за формулою Коші дістанемо:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z^2+1}dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \left.\frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi .$$

в). $J = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz$. Всередині круга $|z| \le 1$ знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль тільки в точці $z_0 = 0$, кратність якого дорівнює **трьом**. Ця точка належить області $D:\{|z| \le 1\}$, обмеженій контуром інтегрування $L:\{|z| = 1\}$. Розглянемо **двозв'язну область**, обмежену колом $|z| = 1$ і колом L_1 з центром в точці $z_0 = 0$, яке лежить цілком в крузі $D:\{|z| \le 1\}$.

Скористаємось формулою (16.15) для аналітичної в крузі $D:\{|z| \le 1\}$ функції $f(z) = \cos z$:

$$\oint\limits_{L} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0),\ \ z_0 = 0,\ \ z \in L:\{|z| = 1\},\ n = 1,2,\cdots .$$

В нашому випадку $n = 2$. Знайдемо другу похідну від цієї функції та обчислимо її значення в точці $z_0 = 0$.

$$f'(z) = (\cos z)' = -\sin z;\ f''(z) = (-\sin z)' = -\cos z;\ f''(0) = -1 .$$

Тепер обчислимо шуканий інтеграл:

$$J = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\pi i .$$

г). $J = \oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}$. В область інтегрування $D:\{|z-3| \le 6\}$ попадає тільки одна точка, яка є трикратним нулем знаменника: $z_0 = 2$. Розглянемо двозв'язну область, обмежену колом $|z-3| = 6$ і колом L_1 з центром в точці $z_0 = 2$, яке лежить цілком в крузі $|z-3| \le 6$.

Запишемо інтеграл J в такому вигляді:

$$\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)}dz = \oint\limits_{L_1} \frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^3}dz .$$

Знову скористаємось формулою (16.15) для аналітичної в крузі $|z-3|\le 6$ функції $f(z)=\dfrac{z}{z+4}$. Знайдемо другу похідну від цієї функції та обчислимо її значення в точці $z_0=2$.

$$f'(z)=\left(\frac{z}{z+4}\right)'=\frac{4}{(z+4)^2};\ f''(z)=\left(\frac{4}{(z+4)^2}\right)'=-\frac{8}{(z+4)^3};\ f''(2)=-\frac{1}{27}.$$

Тепер можна обчислити шуканий інтеграл:

$$J=\oint\limits_{|z-3|=6}\frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)=-\frac{\pi i}{27}.$$

Зауваження. При інтегруванні многозначної функції **необхідно виділити її однозначну вітку.** Це досягається заданням значення многозначної функції в деякій точці кривої інтегрування. Якщо контур L замкнений, то початковою точкою z_0 шляху інтегрування вважається та точка, в якій задано значення підінтегральної функції.