

Олимпиадная математика 7 класс Комбинаторика 2

Определение. Рассмотрим n элементное множество.

Через P_n обозначим количество перестановок этого множества.

Рассмотрим целое число k , такое что $0 \leq k \leq n$.

Через A_n^k обозначим количество способов выбрать k элементов из n элементного множества с учетом порядка выбора.

Через C_n^k обозначим количество способов выбрать k элементов из n элементного множества без учета порядка выбора.

Свойства.

$$1. P_n = n! := n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$2. A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$3. C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Задания.

1. а) Сколько способами можно сделать из лент шести разных цветов трёхцветный горизонтальный флаг?
б) А если на флаге обязательно должен быть красный цвет?
в) А если цветов на флаге может быть меньше трёх, но рядом полосы одинаковых цветов стоять не должны? (Флаги, отличающиеся друг от друга переворотом, считаем разными.)
2. На званый обед приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места за круглым столом нужно поставить табличку с именем гостя, причём никакие два лица одного пола не должны сидеть рядом. Сколько способами можно расставить таблички? Способы, отличающиеся поворотом стола, считаются одинаковыми.
3. На полке у Вовочки стоят 7 книжек про Гарри Поттера и 4 различных учебника. Собирая портфель, он выбирает с полки 6 книг, из них не менее двух учебников. Сколько способов у Вовочки собрать портфель?
4. Укротитель хочет вывести одного за другим на арену 5 львов и 4 тигров, притом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколько способами он может расположить зверей? Тигров между собой не различаем, как и львов.
5. В сериале «Тайна Санта-Барбары» участвует 20 героев. Каждую серию происходит одно из событий: некоторый герой узнаёт Тайну, некоторый герой узнаёт, что кто-то знает Тайну, некоторый герой узнаёт, что кто-то не знает Тайну. Какое наибольшее число серий может продолжаться сериал?
6. Сколько есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?
7. Известно, что в выпуклом n -угольнике ($n > 3$) никакие три диагонали не проходят через одну точку. Найдите число точек (отличных от вершины) пересечения пар диагоналей.
8. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если каждая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно делится на 12!