Олимпиадная математика школы 1568. 10 класс
Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)

1. (**Неравенство треугольника**) Докажите неравенство:

$$\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}\geqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

2. Пусть $a+2b+3c\geqslant 14$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2\geqslant 14$.

3. Докажите, что $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2}\leqslant a^2+b^2+c^2$.

4. Для положительных чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n}.$$

5. Положительные числа x,y,z таковы, что $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant x+y+z.$$

6. Докажите неравенство: $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta\leqslant 2$.

7. Из точки M внутри треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Какое минимальное значение принимает сумма $\dfrac{BC}{MA_1}+\dfrac{AC}{MB_1}+\dfrac{AB}{MC_1}$? Где при этом находится точка M?

8. Для положительных чисел докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$