Деление с остатком. Разделить с остатком число $a$ на число $b$ — это значит найти целые числа $q$ и $r$ такие, что $a = bq+r$, причём $0 \leqslant r < b$. Число $q$ называется *неполным частным*, а число $r$ — *остатком*. Такая пара чисел $q$ и $r$ существует и единственна.

Арифметика остатков.

- Сумма чисел $a$ и $b$ при делении на $n$ даёт тот же остаток, что и сумма их остатков.
- Разность чисел $a$ и $b$ при делении на $n$ даёт тот же остаток, что и разность их остатков.
- Произведение чисел $a$ и $b$ при делении на $n$ даёт тот же остаток, что и произведение их остатков.
- $k$-я степень числа $a$ при делении на $n$ даёт тот же остаток, что и $k$-я степень его остатка.

Воспоминание. Любое натуральное число при делении на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр. Аналогичный факт верен и для числа 3.

1. (а) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 даёт остаток 3, а при делении на 12 — остаток 1.

   (б) Может ли число при делении на 6 давать остаток 4, а при делении на 9 — остаток 5?

   (в) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, при делении на 5 — остаток 4, при делении на 6 — остаток 5, при делении на 7 — остаток 6, при делении на 8 — остаток 7.

2. Найдите остаток от деления числа $1! + 2! + 3! + \ldots + 15!$ на 15.

3. Известно, что остаток от деления $a$ на 100 равен 48, а остаток от деления $b$ на 10 равен 7. Чему равен остаток $a + b$ от деления на 10? А $a - b$? А $b - a$?

4. Какие остатки может давать

   (а) степень двойки при делении на 7? А на 11?

   (б) точный квадрат при делении на 3? А на 4? А на 5?

5. Какой остаток даёт число $2^{2024}$ при делении на 3? А на 5? А на 16? А на 31?

6. Существует ли точный квадрат, десятичная запись которого состоит из

   (а) 17 нулей, 13 единиц и 10 двоек? (б) 17 нулей, 13 единиц и 11 двоек?

7. Натуральное число $s$ назовём *интересным*, если 2024 при делении на $s$ даёт остаток 26. Сколько существует интересных чисел?

8. Натуральное число $k$ таково, что число $2^k - 1$ делится на 11. Докажите, что оно делится и на 31 тоже.

9. По кругу расставлены натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 200$ в некотором порядке. Может ли оказаться так, что сумма любых 10 подряд идущих чисел делится на 10?

10. На доске написаны числа 2 и 3. Каждую минуту Федя перемножает все записанные на доске числа, прибавляет 1 и записывает на доску наибольший простой делитель получившегося числа. Появится ли когда-нибудь на доске число 5?