

Докажите, что (при любых $n \geq 1$) верны следующие равенства.

1 $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

2 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

5 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

6 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

7 $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

8 $\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$.

9 Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n > 1 + nx$, при $x > -1$, $x \neq 0$, $n \geq 2$.