*Летняя школа МММФ 2023.*
*30.06.2023-19.07.2023. Группа 9(3).*

# Вписанные углы.

**Необходимые понятия и факты:** центральные и вписанные углы, равенство вписанных углов, два критерия вписанного четырехугольника, перпендикулярность касательной и радиуса, угол между касательной и хордой, пересечение биссектрисы треугольника с описанной окружностью.

**1.** Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Описанные окружности треугольников $AOB$ и $COD$ пересекаются в точке $M$ на основании $AD$. Докажите, что треугольник $BMC$ равнобедренный.

**2.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$. Известно, что центр описанной окружности треугольника $BB_1C_1$ лежит на прямой $AC$. Найдите угол $C$ треугольника.

**3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Описанная окружность $\omega$ треугольника $ABC$ пересекает прямую $A_1C_1$ в точках $A'$ и $C'$. Касательные к $\omega$, проведенные в точках $A'$ и $C'$, пересекаются в точке $B'$. Докажите, что прямая $BB'$ проходит через центр окружности $\omega$.

**4.** Постройте остроугольный треугольник $ABC$, зная три точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$, в которых продолжения его высот пересекают описанную окружность.

**5.** В квадрате $ABCD$ из точки $D$ как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины $A$ и $C$. На $AD$ как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Отрезок прямой, соединяющей произвольную точку $P$ дуги $AC$ с точкой $D$, пересекает полуокружность $AD$ в точке $K$. Докажите, что длина отрезка $PK$ равна расстоянию от точки $P$ до стороны $AB$.

**6.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AD$, $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $I$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает прямые $BE$ и $CF$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $I$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности.

**7.** В треугольнике $ABC$ $(AB < BC)$ точка $I$ – центр вписанной окружности, $M$ – середина стороны $AC$, $N$ – середина дуги $ABC$ описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

**8.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AD$ и $BE$. Углы $CAD$ и $CBE$ равны $30°$. Доказать, что треугольник $ABC$ правильный.

**9.** Из точки $M$, случайно выбранной на окружности, опускаются перпендикуляры $MP$ и $MQ$ на диаметры $AB$ и $CD$. Докажите, что длина отрезка $PQ$ не зависит от положения точки $M$.

**10.** Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов $A$ и $B$ лежит на стороне $CD$.

Пустая страница для удобства печати.