

1. Между планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
2. (а) В Австралии 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с восемью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
(б) Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связан.
3. **(Лемма о рукопожатиях)** Докажите, что в любом графе:
(а) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер;
(б) число вершин нечётной степени чётно.
4. (а) Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
(б) на клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?
5. У Ани с кафедры МАТиС всего 28 одногруппников. У каждых двух из 28 различное число кентов в этой группе. Сколько кентов у Ани?
6. Из полного графа на 100 вершин выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.
7. После оранжевой дискотеки выяснилось, что каждый мальчик четко следил, чтобы количество девочек, с которыми он танцевал, делилось на 3. Также все девочки, кроме Ани, признались, что количество их партнеров по танцам делится на 3. Аня не призналась, но остальные догадались, что у нее количество танцевальных партнеров также делится на 3. Как они до этого догадались?
8. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.