

Олимпиадная математика 6 класс
Инварианты

0. а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа и и записать вместо них их сумму. В конце осталось одно число. Какое?
б) Тот же вопрос, если вместо суммы можно записать произведение.
1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?
2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?
3. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b и стереть их. А на их месте написать числа
а) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;
б) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.
Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?
4. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2021?
5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?
6. 100 фишек выставлены в ряд.
а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?
б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?
7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
8. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если $a \geq b$, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?
9. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные — черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если
а) n чётно ;
б) n нечётно и $n > 1$;
в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).