

У графа нет цикла, есть только путь

1. (Существование эйлерова цикла)

- (а) Докажите, что если в графе существует эйлеров цикл, то все степени вершин чётны.
- (б) Докажите, что если в графе все степени вершин чётны, то существует эйлеров цикл.

2. (Существование эйлерова пути)

- (а) Докажите, что если в графе существует эйлеров путь, то все степени вершин чётны, кроме может быть двух.
- (б) Докажите, что если в графе все степени вершин чётны кроме может быть двух, то существует эйлеров путь.

- 3. В графе степень каждой вершины не меньше d . Докажите, что в нем найдется цикл длиной не менее $d + 1$.
- 4. Докажите, что связный граф можно обойти, пройдя по каждому ребру ровно два раза.
- 5. В связном графе k вершин имеет нечётную степень. На какое наименьшее количество путей можно разбить все его рёбра?
- 6. (а) Дан кусок проволоки длиной 12 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 1 см?
(б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
- 7. В графе n вершин. Найдите наибольшее возможное число ребер в этом графе, если диаметр равен 1? диаметр равен 2?
- 8. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?
- 9. В графе 20 вершин, степень каждой не меньше 10. Доказать, что в нём есть гамильтонов путь.
- 10. В связном графе выбрали две вершины на расстоянии, равном диаметру графа, и удалили одну из них вместе со всеми выходящими ребрами. Докажите, что граф остался связным.