Олимпиадная математика

20.09.25 10е.

Неравенства между средними.

Необходимые понятия и факты: среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратичное нескольких чисел, условия существования, неравенства между средними, условия выполнения и достижения равенств, доказательство методом Штурма.

Докажите следующие неравенства (1-10). Все переменные могут быть любыми действительными неотрицательными числами, кроме того, в некоторых задачах на них указаны дополнительные условия.

1. $(a+b)^4+(b+c)^4+(c+d)^4+(d+a)^4 \geqslant 64abcd.$

2. $a^8+b^8 \geqslant \dfrac{1}{128}$, где $a+b=1$.

3. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc\cdot(a+b+c)$.

4. $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ac}{a+c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{2}$, где $a,b,c>0$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}$, где $a \geqslant 1$.

6. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a\cdot(b+c+d+e)$.

7. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geqslant \dfrac{25}{2}$, где $a,b>0,\ a+b=1$.

8. $a^2+b^2 \geqslant 2\sqrt{2}\cdot(a-b)$, где $a\cdot b=1$.

9. $\dfrac{a}{b^3c}+\dfrac{b}{c^3a}+\dfrac{c}{a^3b} \geqslant \dfrac{2}{b^2+c^4}+\dfrac{2}{c^2+a^4}+\dfrac{2}{a^2+b^4}$, где $a,b,c>0$.

10. $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$, где $a,b,c>0$.