Лабораторная работа №2
Создание математического текста

БГУ,ММФ,1 курс, 5 группа, Бельская Екатерина Артуровна

26 марта 2020 г.

Задание 1. Математические выражения

1. $$\max\{< c, x > | Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

2. $$A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$$

3. $$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

4. Пример выносной формулы с нумерацией и ссылкой на формулу
$$X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m_-. \tag{1}$$
Смотри формулу (1).

5. $$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

6. $$\lim_{\Delta x \to 2} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

7. Пример использования окружения **array**
$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

8. Пример использования окружения **array**

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\sin(\alpha x), & \text{если } x<0\\ \mathrm{tg}(\beta x), & \text{если } x>0\end{array}\right.$$

9. Пример использования окружения **eqnarray**

$$\begin{eqnarray}\gamma^2+\chi\alpha &=& \beta \tag{2}\\ \phi+\eta &=& \pi \tag{3}\end{eqnarray}$$

10. Пример использования окружения **eqnarray**

$$\begin{eqnarray}h(x) &=& \int_0^\pi \sin x\,dx \tag{4}\\ &=& 2.\nonumber\end{eqnarray}$$

Задание 2. Математический текст

В математическом анализе исходят из определения функции по Лобачевскому и Дирихле. Если каждому числу x из некоторого множества F чисел в силу какого-либо закона приведено в соответствие число y, то этим определена функция

$$y=f(x)$$

от одного переменного x. Аналогично определяется функция

$$f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$$

от n переменных, где $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — точка n-мерного пространства; рассматриваются также функции

$$f(x)=f(x_1,x_2,\ldots)$$

от точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ некоторого бесконечномерного пространства, которые, впрочем, чаще называют функционалами [3].

Задание 3. Математический текст

Теорема 0.1 (Критерий Коши). *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится в* $\mathbb{R}$ *,если и только если она фундаментальна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Предположим, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится в $\mathbb{R}$, т. е. $\lim_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R}$. По определению, это значит, что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon : |x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Заменим n на m и получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon : |x_m - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя данные неравенства проведём оценку выражения

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. данная последовательность является фундаментальной.

$\Leftarrow$ Теперь предположим, что исходная последовательность является фундаментальной, тогда необходимо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R}$. Полагая, что в условии (5) $m = n_\varepsilon$, будем иметь $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, что равносильно такому условию:

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon : x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$$

или

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset [x_{n_\varepsilon} - \varepsilon, x_{n_\varepsilon} + \varepsilon],$$

и, значит,

$$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant \inf X_n \leqslant \sup X_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим

$$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon. \tag{6}$$

Из этих неравенств следует что,

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n - \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant 2\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, видим, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Поэтому на основании уже известных теорем заключаем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}$ существует, а из неравенств (6) следует, что этот предел — число [4]. $\square$

Список литературы

[1] Отикер Т. Не очень краткое введение в LaTeX 2e (перевод Б. Тоботрас) — 2003.

[2] Котельников И. А., Чеботаев П. З. LaTeX по-русски (3-е изд.) — Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004.

[3] Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Советская Энциклопедия. т. 3 Коо-Од. 1982.

[4] Конспект по матматическому анализу, 1 сем.