1. [2 punts] Demostreu que un graf d'ordre n i mida m és un arbre si i només si és acíclic i $m = n - 1$.

   Suposem que el graf és un arbre. En particular, és acíclic i només cal veure que $m = n-1$. Ho fem per inducció sobre n. Si $n = 1$, és el graf nul N_1, de mida $m = 0$, que és efectivament $1 - 1$. Suposem ara que tot arbre d'ordre $< n$ té mida igual a l'ordre menys 1 (hipòtesi d'inducció), i considerem un arbre T d'ordre n. Sabem que tot arbre té fulles. En triem una, diguem-li u, i considerem el graf $T - u$. Continua essent connex perquè $g(u) = 1$ i sabem que quan se suprimeix un vèrtex x d'un arbre queden exactament $g(x)$ components connexos. A més, $T - u$ és acíclic perquè ho era T. Per tant, $T - u$ és arbre d'ordre $n - 1$. Per hipòtesi d'inducció, la seva mida és $n - 2$ i, per tant, la mida de T era $n - 2 + 1 = n - 1$.

   Recíprocament, suposem que el graf és acíclic i de mida $m = n - 1$. Per tal de veure que és arbre, només queda provar que és connex i ho veiem per reducció a l'absurd. Suposem que no ho fos, i sigui $r \geq 2$ el nombre de components connexos. Si $G_1, \dots, G_r$ en són els components connexos, cadascun és connex, per definició de component connex, i acíclic, perquè ho és el graf sencer. Pel que acabem de veure, la mida de cadascun d'ells és, doncs, $m_i = n_i - 1$, $i = 1, \dots, r$, on n_i és l'ordre de G_i. Per tant, la mida del graf sencer és

$$m = \sum_{i=1}^{r} m_i = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} n_i - r = n - r \leq n - 2,$$

   on a la darrera igualtat hem usat la hipòtesi que $r \geq 2$. Ara bé, per hipòtesi tenim també que $m = n - 1$, així que arribem a un absurd. Per tant, no pot ser $r \geq 2$ i el graf és connex.

2. Sigui $G = (V, A)$ un graf.

   (a) [1 punt] Si G és connex d'ordre 30 i amb només un cicle, que és de longitud 16, quina és la seva mida?

   (b) [1 punt] Si G no és connex, proveu que G no pot ser autocomplementari (és a dir, isomorf al seu complementari).

   (c) [1 punt] Si G és d'ordre 20 i 10-regular, quin és el diàmetre de G?

   (d) [1 punt] Si $G = K_{r,s}$, amb $s \geq 1$, per a quines $r \geq s$ té G un camí hamiltonià?

   (a) *Com que el cicle no és de longitud 30, el graf no pot ser un C_{30}. Per altra banda, si a és una aresta qualsevol del cicle, $G - a$ serà un graf connex, perquè l'aresta no és pont per ser d'un cicle, i acíclic, perquè hem eliminat l'únic cicle que hi havia a G. Per tant, $G - a$ és un arbre. Ara, la mida d'un arbre és l'ordre menys 1, així que la mida de $G - a$ és 29, i d'aquí deduïm que la de G era 30.*

   (b) *Si un graf no és connex, el seu complementari sí que ho és. En efecte, siguin u, v vèrtexs qualssevol de G. Aleshores:*

- *si u, v són del mateix component connex de G, tinc $u-v$ camí a G^c de la forma uwv, amb w qualsevol vèrtex d'un altre component connex de G;*
- *si u, v són de components connexos diferents de G, tinc $u-v$ camí a G^c de la forma uv.*

Per tant, a G^c hi ha camí entre qualsevol parell de vèrtexs i G^c és connex. Ara, si G^c és connex no pot ser isomorf a G perquè G no ho és, i el caràcter connex es manté per isomorfismes. Per tant, G no és autocomplementari.

(c) *Siguin u, v vèrtexs qualssevol de G no adjacents (el graf no pot ser un complet ja que hauria de ser 19-regular). Per hipòtesi, cadascun d'ells és adjacent a 10 vèrtexs, cap dels quals pot ser u o v perquè hem suposat que no són adjacents. Ara bé, només hi ha 18 vèrtexs diferents de u i de v, així que no tots els vèrtexs adjacents a u poden ser diferents dels vèrtexs adjacents a v. Deduïm, doncs, que tenen almenys un vèrtex adjacent comú i que la distància de u a v és 2. Per tant, com que això és cert per a qualsevol parell de vèrtexs no adjacents, el diàmetre de G és 2.*

(d) *Siguin $x_1, \ldots, x_r$ i $y_1, \ldots, y_s$ els vèrtexs de cada part estable de $K_{r,s}$. Si $r = s$, $K_{r,s}$ és hamiltonià, en particular, té camí hamiltonià. Per exemple, el camí $x_1y_1x_2y_2 \cdots x_ry_r$. Si $r = s+1$ ja no és hamiltonià (perquè les parts estables d'un bipartit hamiltonià han de tenir el mateix cardinal), però continua tenint camí hamiltonià, per exemple, el camí $x_1y_1x_2y_2 \cdots x_sy_sx_{s+1}$. Finalment, si $r \geq s+2$ ja no és ni hamiltonià, pel mateix motiu d'abans, ni tampoc té camí hamiltonià. En efecte, en qualsevol camí a $K_{r,s}$ els vèrtexs consecutius són de parts estables necessàriament diferents. Així, si el camí comença en algun dels vèrtexs x_i, reindexant si cal els vèrtexs, serà necessàriament de la forma $x_1y_1x_2y_2 \cdots x_sy_sx_{s+1}$ i a partir d'aquí ja no podrà continuar sense repetir algun dels vèrtexs y_j.*

3. Sigui $G_k = (V_k, A_k)$, $k \geq 3$, el graf connex definit pels conjunts de vèrtexs i d'arestes següents:

$$V_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, h_1, h_2, \ldots, h_k\},$$
$$A_k = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_1\} \cup \{v_1h_1, v_2h_2, \ldots, v_kh_k\}.$$

(a) [1 punt] Calculeu l'ordre, la mida, la seqüència de graus, el conjunt de vèrtexs de tall i el conjunt d'arestes pont de G_k en funció de k.

El graf és un cicle de longitud k (el format pels vèrtexs $v_1, \ldots, v_k$) juntament amb k vèrtexs addicionals (els $h_1, \ldots, h_k$) adjacents cadascun a un vèrtexs diferent del cicle. Per tant, l'ordre i la mida valen $2k$, la seqüència de graus és $(3, \overset{k)}{\ldots}, 3, 1, \overset{k)}{\ldots}, 1)$ (els vèrtexs v_i són tots de grau 3 i els h_i tots de grau 1), el conjunt de vèrtexs de tall és $\{v_1, \ldots, v_k\}$ i el conjunt d'arestes pont és $\{v_1h_1, \ldots, v_kh_k\}$.

(b) [1 punt] Per a quins valors de k és G_k bipartit? En cas que no ho sigui, quantes arestes cal suprimir com a mínim per tal que sigui bipartit el graf resultant?

Per tal que el graf sigui bipartit ho ha de ser qualsevol dels seus subgrafs. En particular, el cicle definit pels vèrtexs $v_1, \ldots, v_k$. Per tant, només quan k és parell G_k pot ser bipartit (només els cicles de longitud parella són bipartits), i efectivament per k parell ho és, ja que només cal pintar cada vèrtex h_i del color contrari al del corresponent v_i. Les parts estables d'una partició que posa de manifest el caràcter bipartit de G_k per k parell són, doncs, si $k = 2l$

$$V_1 = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2l-1}, h_2, h_4, \ldots, h_{2l}\}, \qquad V_2 = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2l}, h_1, h_3, \ldots, h_{2l-1}\}.$$

En el cas k senar no pot ser bipartit perquè G_k conté un cicle de longitud senar. Però només cal suprimir una aresta qualsevol del cicle per fer-lo bipartit. En efecte, suprimint una aresta qualsevol del cicle, per exemple v_1v_2, ens queda un graf acíclic (hem destruit l'únic cicle que hi havia) i connex (en ser d'un cicle, no era aresta pont) i, per tant, un arbre, i tots els arbres d'ordre ≥ 2 són grafs bipartits.

(c) [1 punt] Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G_k per tal que sigui eulerià?

G_k és connex però tots els vèrtexs són de grau senar, així que no és eulerià. Per tal de fer-lo eulerià, cal fer que tots els vèrtexs tinguin grau parell afegint arestes. Si el fem eulerià, el valor mínim dels graus dels vèrtexs $v_1, \ldots, v_k$ serà de 4 (ja que són de grau 3) i el dels vèrtexs $h_1, \ldots, h_k$ serà de 2 (ja que són de grau 1). Situant-nos en aquest cas de graus tots parells i el més petits possibles, pel lema de les encaixades ens calen

$$m = \frac{1}{2}(4k + 2k) = 3k$$

arestes. Com que ja en tenim $2k$, cal afegir com a mínim k arestes, i amb k arestes efectivament és suficient. Només cal afegir les arestes $h_1v_2, h_2v_3, \ldots, h_{k-1}v_k, h_kv_1$.

(d) [1 punt] Partint del vèrtex v_1, apliqueu l'algorisme BFS al graf G_6 considerant primer els vèrtexs $v_1, \ldots, v_6$ i després els vèrtexs $h_1, \ldots, h_6$, en tots dos casos en ordre creixent. Indiqueu les arestes successives per les quals va passant i obtingueu les distàncies des del vèrtex v_1 a la resta de vèrtexs.

En aplicar BFS al G_6 partint de v_1 i amb l'ordre que ens diuen dels vèrtexs, les arestes que es van recorrent són, successivament

$$v_1v_2, v_1v_6, v_1h_1, v_2v_3, v_2h_2, v_6v_5, v_6h_6, v_3v_4, v_3h_3, v_5h5, v_4h_4.$$

El vector de distàncies des de v_1 a la resta de vèrtexs en l'ordre indicat és

$$(0, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2).$$