Matemàtiques 1 - GEI - FIB 29-10-2018
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) Doneu la definició d'arbre i 3 caracteritzacions.
   (b) Demostreu que en tot graf d'ordre $n \geq 2$ hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.

2. Sigui $k \geq 3$. Considereu un graf G_k que té exactament dos components connexos: un és isomorf a $K_{1,k-1}$ i l'altre al graf trajecte T_k.
   a) Calculeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k per a obtenir un graf G que sigui eulerià.
   b) És el graf G de l'apartat anterior hamiltonià? Si no ho és, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per a fer-ho hamiltonià? (no cal que segueixi sent eulerià).

3. Sigui $K_{n,n}$, $n \geq 2$, el graf bipartit complet on els vèrtexs d'una part estable estan etiquetats de 1 a n, i els vèrtexs de l'altra part estable estan etiquetats de $n+1$ a $2n$.
   (a) Apliqueu els algorismes DFS i BFS a $K_{n,n}$ començant pel vèrtex 1 i seguint l'ordre numèric dels vèrtexs. Doneu una representació gràfica dels arbres obtinguts sense que es tallin les arestes.
   (b) Per a cada un dels dos arbres generadors de $K_{n,n}$ obtinguts a l'apartat anterior doneu el radi, el diàmetre i el conjunt dels vèrtexs centrals.

4. Sigui $r \geq 1$ un enter. Sigui $H_r = (V_r, A_r)$ el graf tal que V_r és el conjunt de les paraules de longitud r amb l'alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ i A_r està definit d'acord a la regla següent: dos paraules són adjacents si i sols si difereixen en una única posició. Per exemple, per a $r = 2$ el conjunt de vèrtexs és $V_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 00 és $\{01, 02, 10, 20\}$.
   a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf H_r.
   b) És H_r un graf bipartit per a algun valor de r?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 45m
- Tots els problemes valen el mateix
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 4 problemes per separat.
- Sense llibres, ni apunts, ni calculadores
- Publicació de les notes: 13/11/2018. Revisió de l'examen: 14/11/2018 a les 12:15 (s'informarà del lloc al racó).

1. (a) Doneu la definició d'arbre i 3 caracteritzacions.

   Solució. Un arbre és un graf connex i acíclic.

   Si graf T és un graf d'ordre n i mida m, les condicions següents són equivalents:

   a) T és un arbre
   b) T és acíclic i $m = n - 1$
   c) T és connex i $m = n - 1$
   d) T és connex i tota aresta és pont
   e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T
   f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle

   (Calia donar, doncs, 3 de les propietats entre b)–f)).

   (b) Demostreu que en tot graf d'ordre $n \geq 2$ hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.

   Solució. El grau $g(v)$ d'un vèrtex v de G és el nombre d'arestes incidents amb v. Per tant, és un valor entre 0 i $n - 1$, de manera que hi ha exactament n valors diferents possibles. L'única manera de que els graus dels n vèrtexs de G siguin diferents és que hi hagi exactament un vèrtex de grau i per a cada valor de $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si $n \geq 2$ vol dir que hi ha un vèrtex de grau 0 i un vèrtex de grau $n - 1$, amb $n - 1 \neq 0$. És a dir, hi hauria alhora un vèrtex aïllat i un vèrtex adjacent a tots els altres vèrtexs, i això és una contradicció.

2. Sigui $k \geq 3$. Considereu un graf G_k que té exactament dos components connexos: un és isomorf a $K_{1,k-1}$ i l'altre al graf trajecte T_k.

   a) Calculeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k per a obtenir un graf G que sigui eulerià.

   Solució. Un graf és eulerià si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Calculem el nombre de vèrtexs de grau senar de G_k:

   - si k és parell, aleshores $k - 1$ és senar i G_k té exactament $k + 2$ vèrtexs de grau senar (els dos extrems de T_k i tots els vèrtexs de $K_{1,k-1}$);
   - si k és senar, aleshores $k - 1$ és parell i aleshores G_k té exactament $k + 1$ vèrtexs de grau senar (els dos extrems de T_k i les $k - 1$ fulles de $K_{1,k-1}$).

   En els dos casos, el nombre de vèrtexs de grau senar és parell, de manera que per a obtenir un graf eulerià caldrà afegir a G_k:

   - almenys $(k + 2)/2$ arestes, si k és parell;
   - almenys $(k + 1)/2$ arestes, si k és senar.

   I sempre ho podem aconseguir emparellant els vèrtexs de grau senar de la manera següent:

   - si k és parell, afegim una aresta entre un extrem de T_k i el vèrtex de grau $k - 1$ de $K_{1,k-1}$; una aresta entre l'altre extrem de T_k i una fulla de $K_{1,k-1}$; i finalment, una aresta emparellant les fulles restants de $K_{1,k-1}$ (vegeu la Figura 1a).

- si k és senar, per a cada extrem de T_k, afegim una aresta que l'uneixi amb una fulla de $K_{1,k-1}$, i després afegim arestes emparellant les fulles restants de $K_{1,k-1}$ (vegeu la Figura 1b).

ja que en tots dos casos obtenim un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell.

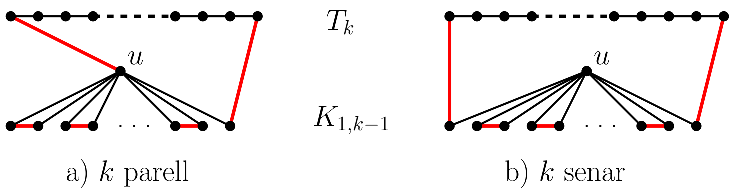

Figure 1: Si afegim a G_k (a) les $(k+2)/2$ arestes vermelles, si k és parell, i (b) les $(k+1)/2$ arestes vermelles, si k és senar, obtenim un graf G eulerià.

b) És el graf G de l'apartat anterior hamiltonià? Si no ho és, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per a fer-ho hamiltonià? (no cal que segueixi sent eulerià).

Solució. Si $k = 3$, aleshores G és el cicle d'ordre 6, que és hamiltonià. Si $k \geq 4$, G no és hamiltonià ja que el vèrtex u de grau $k-1$ en $K_{1,k-1}$ és un vèrtex de tall ($G-u$ té almenys un component connex isomorf a K_2). Observem que per a $k \geq 4$ el graf $G-u$ té $k/2$ components connexos, si k és parell, i $(k-1)/2$ components connexos, si k és senar. Sabem que al suprimir un vèrtex d'un graf hamiltonià s'obté un graf connex. Per tant, per tal d'obtenir un graf hamiltonià cal afegir a G almenys $\frac{k}{2} - 1 = \frac{k-2}{2}$ arestes, si k és parell, i almenys $\frac{k-1}{2} - 1 = \frac{k-3}{2}$ arestes, si k és senar. A més, veiem a la Figura 2 que es pot aconseguir en els dos casos, ja que afegint les arestes indicades obtenim un graf hamiltonià. Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per obtenir un graf hamiltonià és $\frac{k-2}{2}$, si k és parell, i $\frac{k-3}{2}$, si k és senar.

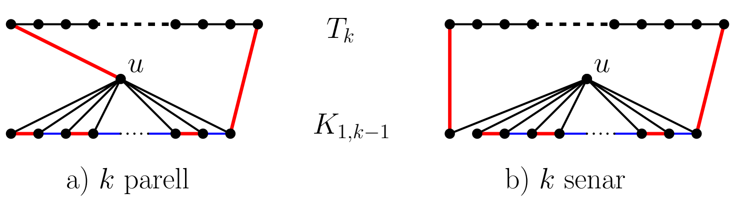

Figure 2: Si afegim a G (a) les $(k-2)/2$ arestes blaves, si k és parell, i (b) les $(k-3)/2$ arestes blaves, si k és senar, obtenim un graf G hamiltonià.

3. Sigui $K_{n,n}$, $n \geq 2$, el graf bipartit complet on els vèrtexs d'una part estable estan etiquetats de 1 a n, i els vèrtexs de l'altra part estable estan etiquetats de $n+1$ a $2n$.

   (a) Apliqueu els algorismes DFS i BFS a $K_{n,n}$ començant pel vèrtex 1 i seguint l'ordre numèric dels vèrtexs. Doneu una representació gràfica dels arbres obtinguts sense que es tallin les arestes.

   Solució. A la Figura 3 tenim el graf $K_{n,n}$ i els arbres generadors que s'obtenen a l'aplicar els algorismes DFS i BFS.

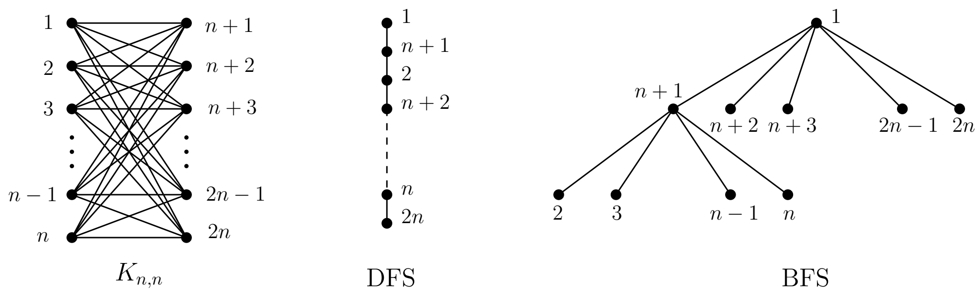

Figure 3: El graf bipartit complet $K_{n,n}$, i els arbres generadors obtinguts a l'aplicar els algorismes DFS i BFS respectivament.

(b) Per a cada un dels dos arbres generadors de $K_{n,n}$ obtinguts a l'apartat anterior doneu el radi, el diàmetre i el conjunt dels vèrtexs centrals.

Solució. L'arbre obtingut amb DFS és el trajecte T_{2n}, que té diàmetre $2n-1$ i radi n, ja que els vèrtexs tenen excentricitat des de n fins a $2n-1$. Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat igual al radi, i per tant són $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ i $\lceil \frac{n}{2} \rceil + n$.

L'arbre obtingut amb BFS s'anomena *biestrella*. Els vèrtexs 1 i $n+1$ tenen excentricitat 2, i tots els altres (o sigui, les fulles) tenen excentricitat 3. Per tant, el radi és 2 i el diàmetre és 3. Els vèrtexs centrals són, per tant, els vèrtexs 1 i $n+1$.

4. Sigui $r \geq 1$ un enter. Sigui $H_r = (V_r, A_r)$ el graf tal que V_r és el conjunt de les paraules de longitud r amb l'alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ i A_r està definit d'acord a la regla següent: dos paraules són adjacents si i sols si difereixen en una única posició. Per exemple, per a $r = 2$ el conjunt de vèrtexs és $V_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 00 és $\{01, 02, 10, 20\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf H_r.

Solució. L'ordre de H_r és el nombre de paraules de longitud r amb alfabet $\{0, 1, 2\}$, o sigui, 3^r, ja que tenim 3 possibles elements per posar a cadascuna de les r posicions de la paraula. El graf H_r és $2r$-regular, ja que una paraula qualsevol $x_1 x_2 \dots x_r$ és adjacent a les $2r$ paraules que s'obtenen canviant l'element x_i d'una posició qualsevol $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ pels dos elements de $\{0, 1, 2\}$ diferents de x_i. Per tant, la seqüència de graus de H_r és $(\underbrace{2r, 2r, \dots, 2r}_{3^r)})$. Pel Lema de les Encaixades, i tenint en compte que el graf és regular de grau $2r$, obtenim que la mida del graf H_r és:

$$|A_r| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V_r} g(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V_r} 2r = \frac{1}{2} 2r |V_r| = \frac{1}{2} 2r 3^3 = r\, 3^r.$$

b) És H_r un graf bipartit per a algun valor de r?

Solució. El graf H_r no és mai bipartit perquè conté cicles de longitud senar. Concretament, H_r conté cicles de longitud 3, ja que per a $x_2, \dots, x_r \in \{0, 1, 2\}$ qualssevol, els vèrtexs $0x_2 \dots x_r$, $1x_2 \dots x_r$ i $2x_2 \dots x_r$ són adjacents dos a dos. Per exemple, els vèrtexs $00 \dots 00$, $10 \dots 0$ i $20 \dots 0$ formen un cicle de longitud 3.