Matemàtiques 1 - FIB — 07-01-2020

Examen final — Part F2: Àlgebra Lineal

1. [3 punts]

a) Doneu la definició de combinació lineal i de vectors linealment independents.

b) Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 vectors diferents d'un espai vectorial E. Demostreu les afirmacions següents si són sempre certes o doneu-ne un contraexemple si són falses en general.

i) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

ii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.

iii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

iv) Si v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents, aleshores v_4 és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.

2. [3 punts] Considereu el subespai S_a de $\mathbb{R}^4$ generat per:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\a\end{pmatrix}\right\}.$$

a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

b) Doneu una base de S_{-1} i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Quines condicions han de satisfer x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sigui de S_{-1}?

d) Determineu si algun dels vectors següents és de S_{-1}: $u = \begin{pmatrix}25\\12\\-12\\-25\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}31\\14\\14\\-31\end{pmatrix}$.

3. [4 punts]

a) Sigui $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que

$$f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

i) Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

ii) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f i determineu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

b) La matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix}-3&-4&0\\-4&3&0\\-12&-6&5\end{pmatrix}.$$

i) Trobeu el polinomi característic, i els valors i vectors propis d'f. Comproveu que f diagonalitza i doneu una base B en que diagonalitzi, la matriu P de canvi de base de B a la base canònica i la matriu diagonal D associada a f en la base B. Quina relació hi ha entre A, D i P?

ii) En cas que f sigui bijectiva calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base B donada a l'apartat anterior.

Instruccions

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan i els sistemes d'equacions lineals amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- Cal entregar els 3 exercicis per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils, ...

Informacions

- Les notes es publicaran com a tard el dia 16 de gener a la tarda.
- La revisió es farà el divendres 17 de gener a les 15:15 a l'aula A5-202.

Model de solució

1. [3 punts]

a) *Doneu la definició de combinació lineal i de vectors linealment independents.*

Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$.

Una combinació lineal dels vectors $v_1, \dots, v_k \in E$ és qualsevol vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, on $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

Els vectors $v_1, \dots, v_k$ són linealment independents si l'única manera d'obtenir el vector zero com a combinació lineal d'aquests vectors és amb tots els escalars igual a zero, és a dir:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_E,\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

b) *Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 vectors diferents qualssevol d'un espai vectorial E. Demostreu les afirmacions següents si són sempre certes o doneu-ne un contraexemple si són falses en general.*

i) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.*
És fals en general. Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 no són linealment independents.

ii) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.*
És cert. Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores hi ha una combinació lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_E$ amb algun escalar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Per tant, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + 0 v_4 = 0_E$, amb algun escalar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$, d'on deduïm que v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.

iii) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.*
És cert. Suposem que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E$, on $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, veurem que ha de ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. En efecte, si $\alpha_4 \neq 0$, aleshores tindríem $v_4 = \frac{\alpha_1}{\alpha_4} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} v_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} v_3$, és a dir, v_4 seria combinació lineal de v_1, v_2, v_3, que contradiu la hipòtesi donada. Per tant, ha de ser $\alpha_4 = 0$, i aleshores obtenim $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_E$, d'on deduïm que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, per ser v_1, v_2, v_3 linealment independents.

iv) *Si v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents, aleshores v_4 és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.*
És fals en general. Per exemple, els vectors $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ són linealment dependents, però v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.

2. [3 punts] *Considereu el subespai S_a de $\mathbb{R}^4$ generat per:*

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\a\end{pmatrix} \right\}.$$

a) *Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.*

La dimensió de S_a és el rang de la matriu que té per files o columnes els vectors donats.

Mètode I.

Posem els vectors per columnes i fem transformacions elementals per files a aquesta matriu fins tenir una matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\-1&0&-2&a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

d'on deduïm que el rang de la matriu és 2, si $a = -1$, i el rang és 3, si $a \neq -1$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -1 \\ 3, & \text{si } a \neq -1 \end{cases}$$

Mètode II.

Posem els vectors per files i fem transformacions elementals per files a aquesta matriu fins tenir una matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\2&1&1&-2\\1&-1&-1&a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

d'on deduïm que el rang de la matriu és 2, si $a = -1$, i el rang és 3, si $a \neq -1$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -1 \\ 3, & \text{si } a \neq -1 \end{cases}$$

b) *Doneu una base de S_{-1} i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^4$.*

Mètode I. Si a l'apartat anterior hem posat els vectors que generen S_{-1} per columnes i hem fet transformacions elementals per files per calcular el rang, una base de S_{-1} està formada pels dos vectors columna de la primera matriu corresponents a les columnes amb pivots no nuls de la matriu escalonada equivalent. En aquest cas, una base de S_{-1} està formada per la primera i segona columnes de la primera matriu:

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

i per ser

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

la podem completar fins a una base de $\mathbb{R}^4$ amb els vectors de la base canònica

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és a dir,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és una base de $\mathbb{R}^4$ on els dos primers vectors formen una base de S_{-1}.

Mètode II. Si a l'apartat anterior hem posat els vectors que generen S_{-1} per files i hem fet transformacions elementals per files per calcular el rang, una base de S_{-1} està formada pels dos vectors fila no nuls de l'última matriu,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

i per ser

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=4$$

i la podem completar fins a una base de $\mathbb{R}^4$ amb els vectors de la base canònica

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és a dir,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és una base de $\mathbb{R}^4$ on els dos primers vectors formen una base de S_{-1}.

c) *Quines condicions han de satisfer x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sigui de S_{-1}?*

Mètode I. Un vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ és de S_{-1} si és combinació lineal dels vectors de la base de S_{-1}, és a dir, si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\\-1&0&t\end{pmatrix}=2.$$

Si sumem la primera fila a la quarta, i després restem la segona fila a la tercera, obtenim:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\\-1&0&t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\\0&0&x+t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-y\\0&0&x+t\end{pmatrix}$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si els elements de la tercera fila són nuls, és a dir, si

$$\begin{cases}z-y=0\\x+t=0\end{cases}.$$

Mètode II. Un vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ és de S_{-1} si és combinació lineal dels vectors de la base de S_{-1}, és a dir, si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\x&y&z&t\end{pmatrix}=2.$$

Si restem a la tercera fila la primera multiplicada per x i la segona multiplicada per y, obtenim:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\x&y&z&t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&z-y&t+x\end{pmatrix},$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si els elements de la tercera fila són nuls, és a dir, si

$$\begin{cases}z-y=0\\t+x=0\end{cases}.$$

d) *Determineu si algun dels vectors següents és de S_{-1}:* $u=\begin{pmatrix}25\\12\\-12\\-25\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}31\\14\\14\\-31\end{pmatrix}$.

Comprovem si es satisfan les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior. El vector u no és de S_{-1}, ja que no satisfà la primera de les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior (té les coordenandes segona i tercera diferents). En canvi, el vector v és de S_{-1}, ja que es compleixen les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior: la segona coordenada és igual a la tercera, i la quarta és igual a la primera canviada de signe.

3. [4 punts]

a) *Sigui $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que*

$$f(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

i) *Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.*
Sigui

$$C_M=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$$

la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i

$$C=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

la base canònica de $\mathbb{R}^3$

Mètode I.

Observem que els vectors (matrius) de la base canònica es poden obtenir com a diferència de les matrius anteriors:

- $f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- $f(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$
- $f(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},$

- $f(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

La matriu associada s'obté posant per columnes les imatges de les matrius de la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, és a dir:

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Mètode II. Amb la informació donada tenim directament la matriu associada en les bases

$$B = \{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i la base canònica de $\mathbb{R}^3$, només cal posar per columnes les imatges de les matrius de B:

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

La matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i de $\mathbb{R}^3$, $M_C^{C_M}(f)$, s'obté a partir de $M_C^B(f)$ fent un canvi de base. Si $P_{C_M}^B$ és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B en la base C_M, aleshores:

$$M_C^{C_M}(f) = M_C^B(f)P_B^{C_M} = M_C^B(f)(P_{C_M}^B)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculem la inversa de $P_{C_M}^B$ amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Per tant,

$$(P_{C_M}^B)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

i la matriu associada en bases canòniques és:

$$M_C^{C_M}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

ii) *Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f i determineu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva.*

La dimensió del subespai $\mathrm{Im}f$ és igual al rang de la matriu associada A. Fem transformacions elementals per files per obtenir el rang:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Per tant, $\dim \mathrm{Im}f = \mathrm{rang}\, A = 3$, i $\dim \mathrm{Ker}f = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rang} A = 4 - 3 = 1$. Un base de $\mathrm{Im}f$ està formada per 3 columnes linealment independents de A, per exemple, les tres primeres, ja que al calcular el rang de A, els pivots han quedat a les tres primeres columnes. O sigui, una base de $\mathrm{Im}f$ és

$$\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\}.$$

Per trobar una base del nucli, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té com a matriu de coeficients la matriu associada A. Si fem transformacions elementals per files, obtenim sistemes equivalents. Per tant, tenint en compte els càlculs del primer apartat, el sistema és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

La solució del sistema és, doncs, $x = 0; y = 2t; z = t$, $t \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\mathrm{Ker}f = \{\begin{pmatrix}0 & 2t\\ t & t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} =< \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} > .$$

Per tant, una base del nucli és $\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$.

La dimensió de l'espai de sortida de f és 4 i la de l'espai d'arribada és 3. Hem vist que el rang de la matriu associada a f és 3 i coincideix amb la dimensió de l'espai d'arribada, però no amb la dimensió de l'espai de sortida. Per tant, l'aplicació és exhaustiva, però no injectiva, i no és bijectiva (de fet, es pot deduir directament que l'aplicació no pot ser bijectiva perquè les dimensions dels espais de sortida i d'arribada són diferents).

b) *La matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) *Trobeu el polinomi característic, i els valors i vectors propis d'f. Comproveu que diagonalitza i doneu una base B en que diagonalitzi, la matriu P de canvi de base de B a la base canònica i la matriu diagonal D associada a f en la base B. Quina relació hi ha entre A, D i P?*

El polinomi característic és:

$$\det \begin{pmatrix} -3-x & -4 & 0 \\ -4 & 3-x & 0 \\ -12 & -6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x) \det \begin{pmatrix} -3-x & -4 \\ -4 & 3-x \end{pmatrix}$$

$= (5-x)((-3-x)(3-x)-16) = (5-x)(x^2-25) = -(x-5)^2(x+5)$.

Les arrels del polinomi característic són 5, de multiplicitat 2, i -5, de multiplicitat 1.

Els valors propis són les arrels del polinomi característic, o sigui, 5 i -5.

Els vectors propis de valor propi 5 són les solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $\det(A-5Id)$.

Resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3-5 & -4 & 0 \\ -4 & 3-5 & 0 \\ -12 & -6 & 5-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -12 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu del sistema té rang 1, per tant, el sistema té dos graus de llibertat, i el subespai de vectors propis de valor propi 5 té dimensió 2. La solució del sistema és: $y = -2x; x, z \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Una base és

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Els vectors propis de valor propi -5 són les solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $\det(A+5Id)$.

Resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3+5 & -4 & 0 \\ -4 & 3+5 & 0 \\ -12 & -6 & 5+5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -12 & -6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu del sistema té rang 2, per tant, el sistema té un grau de llibertat, i el subespai de vectors propis de valor propi -5 té dimensió 1. Donem la solució del sistema en funció de y: $x = 2y; z = 3y, y \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\{\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\} = \{y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\}.$$

Una base és

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

L'endomorfisme diagonalitza ja que el polinomi característic té 2 arrels, 5 de multiplicitat 2 i -5, de multiplicitat 1, i hem vist a l'apartat anterior que la dimensió del subespai de vectors propis de valor propi 5 és 2 i la dimensió del subespai de vectors de valor propi -5 és 1.

Una base en que diagonalitza està formada per vectors propis, en aquest cas, tal com hem vist a l'apartat anterior,

$$B = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

i la matriu de canvi de base és: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriu diagonal associada a f en base B és: $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

i la relació que hi ha entre aquestes matrius és $D = P^{-1}AP$.

ii) *En cas que f sigui bijectiva calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base B donada a l'apartat anterior.*
L'endomorfisme f és bijectiu, ja que el rang de la matriu associada a f és $\operatorname{rang} D = 3$. La matriu associada a f^{-1} en la base B és $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$.