Matemàtiques 1 - GEI - FIB 28-10-2019
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (2 punts)

a) Enuncieu el lema de les encaixades. Demostreu que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

b) Definiu circuit eulerià i graf eulerià. Definiu cicle hamiltonià i graf hamiltonià. Doneu en cada cas un exemple de graf:

(i) eulerià i hamiltonià;
(ii) eulerià, però no hamiltonià;
(iii) hamiltonià, però no eulerià;
(iv) ni eulerià, ni hamiltonià.

2. (4 punts) Sigui $n \geq 2$. Considereu el graf producte $G_n = T_n \times K_4$, on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte T_n és $\{1, 2, \ldots, n\}$, on 1 i n són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet K_4 és $\{a, b, c, d\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf G_n en funció de n. És G_n regular per a algun valor de n?

b) Per a quins valors de n és hamiltonià el graf G_n? En cas que ho sigui, doneu un cicle hamiltonià.

c) Per a quins valors de n és bipartit el graf G_n?

d) Dibuixeu els arbres generadors de G_2 obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_2. Preneu com a vèrtex inicial $(1, a)$ considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent: $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$.
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Definició de graf producte. Siguin $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafs, aleshores $G_1 \times G_2$ és el graf que té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V_1 \times V_2$, i dos vèrtexs (u_1, u_2), (v_1, v_2) són adjacents en $G_1 \times G_2$ si i només si $u_1 = v_1$ i $u_2v_2 \in A_2$, o bé $u_2 = v_2$ i $u_1v_1 \in A_1$.

3. (4 punts) Sabem que un graf G té exactament 4 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau $k > 3$.

(a) Deduïu que k ha de ser 4, 6 o 8. Doneu en cada cas l'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf.

(b) Demostreu que G té almenys un cicle.

(c) Demostreu que si $k = 8$, aleshores el graf G ha de ser connex.

(d) Suposem que G és connex, que $k = 4$, i a més, al suprimir els quatre vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf G' que és eulerià. Quin ha de ser aquest graf G'? Construïu un possible graf G a partir de G'.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra. Cal lliurar els 3 problemes per separat.
- No es poden utilitzar llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ...
- Publicació de les notes: 05/11/2019.
- Revisió de l'examen: 06/11/2019 a les 12:15 a l'aula A6102.

Model de solució

1. (2 punts)

a) Enuncieu el lema de les encaixades. Demostreu que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Solució. El lema de les encaixades diu que la suma dels graus de tots els vèrtexs d'un graf és igual a dues vegades la seva mida.
És a dir, si $G = (V, A)$ és un graf de mida m i $g(v)$ representa el grau del vèrtex $v \in V$, aleshores

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

Tenint en compte el lema de les encaixades, deduïm que

$$2m = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{g(v) \text{ parell}} g(v) + \sum_{g(v) \text{ senar}} g(v),$$

i per tant,

$$\sum_{g(v) \text{ senar}} g(v) = 2m - \sum_{g(v) \text{ parell}} g(v),$$

és un nombre parell, ja que la suma de nombres parells és sempre parell. Per altra banda, la suma de nombres senars és parell si i només si el nombre de sumands és parell. Per tant, hi ha d'haver un nombre parell de sumands a l'expressió

$$\sum_{g(v) \text{ senar}} g(v),$$

o, el que és el mateix, hi ha d'haver un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

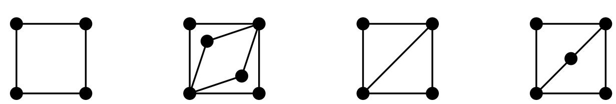
b) Definiu circuit eulerià i graf eulerià. Definiu cicle hamiltonià i graf hamiltonià. Doneu en cada cas un exemple de graf que sigui:

(i) eulerià i hamiltonià;
(ii) eulerià, però no hamiltonià;
(iii) hamiltonià, però no eulerià;
(iv) ni eulerià, ni hamiltonià.

Solució. Un circuit eulerià és un recorregut tancat que passa per totes les arestes de G una vegada i només una. Un graf és eulerià si és connex i conté un circuit eulerià.

Un cicle hamiltonià és un cicle que conté tots els vèrtexs de G. Un graf és hamiltonià si conté un cicle hamiltonià.

A la figura següent es mostren exemples dels grafs demanats en cada cas:



(i) *(ii)* *(iii)* *(iv)*

Els grafs (i), (ii) són eulerians perquè són connexos i tots els vèrtexs tenen grau parell. Els grafs (iii), (iv) no són eulerians perquè tenen algun vèrtex de grau senar. Els grafs (i), (iii) són hamiltonians perquè hi ha un cicle d'ordre 4 que conté els 4 vèrtexs del graf. Els grafs (ii), (iv) no són hamiltonians perquè al suprimir respectivament els dos vèrtexs de grau 4 i els dos vèrtexs de grau 3 s'obtenen respectivament 4 i 3 components connexos (és a dir, s'obtenen més components connexos que nombre de vèrtexs suprimim).

2. (4 punts) Sigui $n \geq 2$. Considereu el graf producte $G_n = T_n \times K_4$, on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte T_n és $\{1, 2, \dots, n\}$, on 1 i n són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet K_4 és $\{a, b, c, d\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf G_n en funció de n. És regular per a algun valor de n?

Solució. El nombre de vèrtexs de G_n és $4n$. El grau dels vèrtexs és $g(u, v) = g_{T_n}(u) + g_{K_4}(v)$, és a dir, per a tot $v \in \{a, b, c, d\}$

$$g(1, v) = g(n, v) = 1 + 3 = 4;$$
$$g(i, v) = 2 + 3 = 5, \text{ si } i \neq 1, n.$$

Per tant, la seqüència de graus és $\overbrace{5, \dots, 5}^{4n-8}, \overbrace{4, \dots 4}^{8}$. Notem que si $n = 2$, aleshores el graf és 4-regular, i si $n > 2$, aleshores no és regular perquè hi ha vèrtexs de grau 4 i de grau 5. La mida es pot calcular tenint en compte el lema de les encaixades:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{(i,v) \in V(G_n)} g(i, v) = \frac{1}{2}(5(4n - 8) + 4 \cdot 8) = 10n - 4.$$

b) Per a quins valors de n és hamiltonià el graf G_n? En cas que ho sigui, doneu un cicle hamiltonià.

Solució. El graf G_n és hamiltonià per a qualsevol valor de n, ja que es pot donar un cicle hamiltonià en tots els casos:

$$(1, a), (2, a), \dots, (n - 1, a), (n, a), (n, b), (n - 1, b), \dots, (2, b), (1, b),$$
$$(1, c), (2, c), \dots, (n - 1, c), (n, c), (n, d), (n - 1, d), \dots, (2, d), (1, d), (1, a).$$

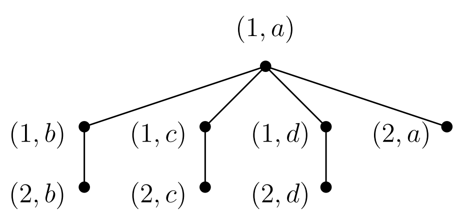
c) Per a quins valors de n és bipartit el graf G_n?
Solució. En cap cas, ja que G_n conté cicles de longitud senar, per exemple:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, a).$$

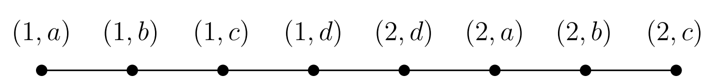
d) Dibuixeu els arbres generadors de G_2 obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_2. Preneu com a vèrtex inicial $(1, a)$ considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent: $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$.
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Solució. Els arbres que s'obtenen són:

BFS:



DFS:



Els vèrtexs de l'arbre BFS s'obtenen en l'ordre següent:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d).$$

Els vèrtexs de l'arbre DFS s'obtenen en l'ordre següent:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, d), (2, a), (2, b), (2, c).$$

No són isomorfs, ja que en el primer cas hi ha un vèrtex de grau 4 i en el segon, tots els vèrtexs tenen grau com a molt 2 (és un graf trajecte).

3. (4 punts) Sabem que un graf G té exactament 4 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau $k > 3$.

(a) Deduïu que k ha de ser 4, 6 o 8. Doneu en cada cas l'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf.

Solució. Pel lema de les encaixades,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} g(v) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + k = 16 + k,$$

per tant, k ha de ser parell. Per altra banda, el graf té 10 vèrtexs, per tant, $k \leq 9$. Deduïm doncs que $k \in \{4, 6, 8\}$.

L'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf és segons el cas:

k	ordre	mida	seqüència de graus
4	10	10	4332221111
6	10	11	6332221111
8	10	12	8332221111

(b) Demostreu que G té almenys un cicle.

Solució. En un graf acíclic, la mida és com a molt l'ordre menys 1, però tal com veiem a la taula anterior, en tots els casos la mida és més gran o igual que l'ordre. Per tant, en tots els casos ha de tenir algun cicle.

(c) Demostreu que si $k = 8$ el graf G ha de ser connex.

Solució. Si $k = 8$, aleshores hi ha almenys un vèrtex u de grau 8 que juntament amb els 8 vèrtexs adjacents a aquest, són del mateix component connex, és a dir, el component connex de u tindrà almenys 9 vèrtexs. Per ser el graf d'ordre 10, si no fos connex hauria de tenir un vèrtex aïllat, i això és una contradicció ja que tots els vèrtexs tenen grau almenys 1.

(d) Suposem que G és connex, que $k = 4$, i a més, al suprimir els quatre vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf G' que és eulerià. Quin ha de ser aquest graf G'? Construïu un possible graf G a partir de G'.

Solució. Per ser G connex, els vèrtexs de grau 1 són adjacents a vèrtexs de grau almenys 2. Si suprimim els 4 vèrtexs de grau 1 obtindrem doncs un graf d'ordre 6 on els graus s'obtindràn a partir de $4, 3, 3, 2, 2, 2$ restant en total 4 unitats. Però el graf resultant ha de ser eulerià, per tant, ha tenir tots els vèrtexs de grau parell i diferent de 0, és a dir, almenys 2, ja que G' ha de ser connex. L'única possibilitat és que els graus dels vèrtexs de G' siguin $2, 2, 2, 2, 2, 2$, que correspon al graf cicle d'ordre 6. Un possible graf G és el de la figura: