Matemàtiques 1 - FIB | 8-1-2016
Examen F1 | Grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) [0.5 punts] Doneu la definició de la matriu d'incidències d'un graf.
   (b) [1.5 punts] Enuncieu i proveu el Lema de les encaixades.

2. Sigui G un graf amb dos components connexos G_1 i G_2. G_1 és d'ordre $r \geq 3$ i mida $m_1 = [r(r-1)/2] - 1$, i G_2 és un arbre d'ordre r.
   (a) [1 punt] Calculeu la mida del graf complementari G^c en funció de r.
   (b) [1 punt] Calculeu el radi i el diàmetre de G^c.
   (c) [2 punts] Proveu que G^c és hamiltonià però no eulerià.

3. Direm que un graf G té la *propietat SBG* ("subgraf bipartit gran") si té un subgraf generador H que és bipartit i tal que $\text{mida}(H) \geq \dfrac{\text{mida}(G)}{2}$.
   (a) [1 punt] Comproveu que tots els grafs d'ordre 2 i 3 tenen la propietat SBG.
   (b) [2 punts] Sigui v un vèrtex de G. Proveu que si $G - v$ té la propietat SBG, aleshores G també la té.
   (*Indicació*: Si V_1 és una de les parts estables d'un subgraf generador bipartit de $G-v$, distingiu dos casos, segons que v sigui adjacent a menys de $g(v)/2$ vèrtexs de G o a $g(v)/2$ o més.)
   (c) [1 punt] Proveu que el graf complet K_n té la propietat SBG per a tot $n \geq 2$.

Informacions:

- La durada de l'examen és de 2h.
- Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full diferent i escriviu amb tinta negra o blava.
- Si us cal, podeu utilitzar un apartat per tal de respondre'n un altre encara que el primer no l'hàgiu fet.
- Les notes es publicaran al Racó de la FIB el dia ?? de gener i la revisió serà el dia ?? de gener a les ?? (el lloc s'anunciarà amb antel·lació al Racó).

Model de solució

1. (a) [0.5 punts] Doneu la definició de la matriu d'incidències d'un graf.
   (b) [1.5 punts] Enunicieu i proveu el Lema de les encaixades.

   Sigui $G = (V, A)$ *un graf amb* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *i* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

   (a) La matriu d'incidència de G *és la matriu* $M_I(G)$ *de tipus* $n \times m$ *tal que l'element que hi ha a la fila* i*, columna* j*, és*

$$\begin{cases} 1 & \textit{si } v_i \textit{ i } a_j \textit{ són incidents;} \\ 0 & \textit{altrament.} \end{cases}$$

   (b) El lema de les encaixades afirma que

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

   Demostració. *Sigui* X *el nombre d'uns que hi ha a la matriu* $M_I(G)$*. Provarem el lema trobant dues expressions per a* X *i igualant-les.*

   Observem primer que a cada columna de $M_I(G)$ *hi ha exactament dos uns; més concretament, si els extrems de l'aresta* a_j *són* v_{i_1} *i* v_{i_2}*, aleshores a les files* i_1 *i* i_2 *de la columna* j *hi ha un 1, i a les altres files, un zero. Per tant,* $X = \sum_{j=1}^{m} 2 = 2m$.

   D'altra banda, a la fila i *de* $M_I(G)$ *hi ha un 1 per cada aresta incident amb* v_i*; per tant, hi ha tants uns com el grau de* v_i*. Aleshores,* $X = \sum_{i=1}^{n} g(v_i) = \sum_{v \in V} g(v)$.

   Igualant les dues expressions trobades per a X *arribem a la igualtat de l'enunciat.*

2. Sigui G un graf amb dos components connexos G_1 i G_2. G_1 és d'ordre $r \geq 3$ i mida $m_1 = [r(r-1)/2] - 1$, i G_2 és un arbre d'ordre r.

   (a) Calculeu la mida del graf complementari G^c en funció de r.
   (b) Calculeu el radi i el diàmetre de G^c.
   (c) Proveu que G^c és hamiltonià però no eulerià.

   (a) L'ordre de G *és* $n = 2r$*. Per altra banda, com que* G_2 *és arbre, la seva mida és* $m_2 = r - 1$*, així que la mida de* G *és*

$$m(G) = m(G_1) + m(G_2) = \frac{r(r-1)}{2} - 1 + r - 1 = \frac{r^2 - r - 2 + 2r - 2}{2} = \frac{r^2 + r - 4}{2}.$$

   La mida de G^c *és doncs*

$$\begin{aligned} m(G^c) &= \frac{2r(2r-1)}{2} - m(G) \\ &= \frac{4r^2 - 2r}{2} - \frac{r^2 + r - 4}{2} \\ &= \frac{3r^2 - 3r + 4}{2} \end{aligned}$$

   (b) Denotem per $x_1, \ldots, x_r$ *i* $y_1, \ldots, y_r$ *els vèrtexs de* G_1 *i* G_2 *respectivament. Calculem-ne les excentricitats a* G^c.

- *Excentricitats dels* x_i $(i = 1, \ldots, r)$.

  Com que G_1 *és el complet* K_r *menys una aresta, que podem suposar (si convé reindexant els vèrtexs) que és l'aresta* x_1x_2, *a* G^c *tindrem aquesta aresta* x_1x_2 *i cap altra aresta del tipus* $x_ix_{i'}$. *Per altra banda, a* G^c *tindrem totes les arestes del tipus* x_iy_j, *amb* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, *ja que no hi són a* G. *Deduïm que les excentricitats dels* x_i *a* G^c *són totes 2 perquè* $r \geq 3$ *i, per tant, calen 2 arestes per anar des de* x_1 *o* x_2 *a qualsevol* x_i *per* $i \geq 3$, *i perquè de qualsevol* x_i *a qualsevol* y_j *només cal una aresta.*

- *Excentricitats dels* y_i $(i = 1, \ldots, r)$.

  Són totes també 2. En efecte, a G^c *cada* y_j *és adjacent a tots els* x_i *però no pot ser-ho a tots els* $y_{j'}$, *ja que si ho fos voldria dir que a* G_2 *el vèrtex* y_j *no és adjacent a cap altre* $y_{j'}$, *cosa que no pot ser perquè en aquest cas* G_2 *no seria connex i, per tant, un arbre.*

Per tant, el radi i el diàmetre són $r(G^c) = D(G^c) = 2$.

(c) Calculem els graus dels vèrtexs i comprovem que es compleix la condició de Dirac. Com abans, suposem que x_1x_2 *és l'única aresta del tipus* $x_ix_{i'}$ *present a* G^c. *Tenim que*

$$g_{G^c}(x_i) = \begin{cases} 1 + r, & si\ i \in \{1, 2\} \\ r, & si\ i \in \{3, \ldots, r\} \end{cases}$$

ja que x_1 *és adjacent a* x_2 *i a tots els* y_j *i anàlogament* x_2, *mentre que els* x_i, $i \geq 3$, *només ho són als* y_j. *Per altra banda, del grau de* y_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$ *només podem dir que és*

$$g_{G^c}(y_j) \geq r + 1,$$

ja que és adjacent a tots els x_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ *i almenys a un* $y_{j'}$ *per l'argument anterior. En tots els casos es té doncs que*

$$g_{G^c}(v) \geq r,$$

v *vèrtex qualsevol de* G^c. *Com que* r *és la meitat de l'ordre de* G^c, *es compleix Diraci queda provat que* G^c *és hamiltonià. Alternativament, es tracta d'observar que el subgraf generat per les arestes entre els vèrtexs de* G_1 *i* G_2 *és un bipartit complet* $K_{r,r}$, *el qual sabem que és hamiltonià. Com que aquest subgraf és a més generador, deduïm que el propi graf* G^c *també és hamiltonià.*

Per altra banda, no pot ser eulerià ja que tant si r *és parell com si és senar, a* G^c *hi ha vèrtexs de grau senar perquè hi ha tant vèrtexs de grau* r *(per exemple, els vèrtexs* $x_3, \ldots, x_r$*) com vèrtexs de grau* $r + 1$ *(els vèrtexs* x_1, x_2*).*

3. Direm que un graf G té la *propietat SBG* ("subgraf bipartit gran") si té un subgraf generador H que és bipartit i tal que $\text{mida}(H) \geq \dfrac{\text{mida}(G)}{2}$.

   (a) [1 punt] Comproveu que tots els grafs d'ordre 2 i 3 tenen la propietat SBG.

   (b) [2 punts] Sigui v un vèrtex de G. Proveu que si $G - v$ té la propietat SBG, aleshores G també la té.

   (c) [1 punt] Proveu que el graf complet K_n té la propietat SBG per a tot $n \geq 1$.

Recordem que un subgraf de G és generador si conté tots els vèrtexs de G.

(a) Tots els grafs d'ordre 2 i 3 són bipartits, excepte el graf complet K_3, que és l'únic que té un cicle de longitud senar. Per tant, si $G \ncong K_3$, podem prendre $H = G$ i clarament és generador i $\mathrm{mida}(H) = \mathrm{mida}(G) \geq \frac{\mathrm{mida}(G)}{2}$. *Si $G \cong K_3$, prenem $H = K_3 - a$, on a és una aresta qualsevol de K_3. Tenim que H és bipartit, generador (ja que no hem eliminat cap vèrtex) i* $\mathrm{mida}(H) = 2 > \frac{3}{2} = \frac{\mathrm{mida}(G)}{2}$.

Una altra manera de resoldre aquest apartat seria dibuixant els 6 grafs no isomorfs d'ordres 2 i 3, i comprovant un per un que tenen un subgraf bipartit que conté tots els vèrtexs i almenys la meitat de les arestes.

(b) La hipòtesi ens diu que el graf $G - v$ conté un subgraf generador bipartit H tal que $\mathrm{mida}(H) \geq \frac{\mathrm{mida}(G-v)}{2}$. *Anomenem V_1 i V_2 les parts estables del subgraf H; per ser H generador, tenim que $V_1 \cup V_2$ conté tots els vèrtexs de G excepte v. Sabem també que* $\mathrm{mida}(G - v) = \mathrm{mida}(G) - g(v)$ *(on $g(v)$ és el grau de v en el graf G).*

Hem de veure que G té un subgraf generador bipartit H' tal que $\mathrm{mida}(H') \geq \frac{\mathrm{mida}(G)}{2}$.

El vèrtex v és adjacent a $g(v)$ vèrtexs de G; aquests $g(v)$ vèrtexs estan repartits entre V_1 i V_2. (Vegeu la figura.)

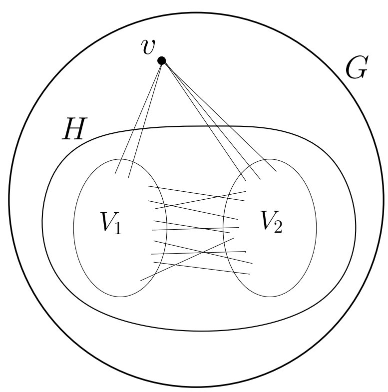

Figure 1: Representació esquemàtica del graf de l'exercici 3(b).

Distingim 2 casos:

- *v és adjacent a $\geq g(v)/2$ vèrtexs de V_1:*
  prenem H' com el graf amb parts estables V_1 i $V_2 \cup \{v\}$, amb totes les arestes de H més totes les arestes de la forma vx amb $x \in V_1$. La seva mida és

  $$\mathrm{mida}(H') \geq \mathrm{mida}(H) + \frac{g(v)}{2} \geq \frac{\mathrm{mida}(G-v)}{2} + \frac{g(v)}{2} = \frac{\mathrm{mida}(G) - g(v)}{2} + \frac{g(v)}{2} = \frac{\mathrm{mida}(G)}{2}.$$

- *v és adjacent a $< g(v)/2$ vèrtexs de V_1:*
  en aquest cas v ha de ser adjacent a $> g(v)/2$ vèrtexs de V_2, per tant podem raonar igual que en el primer cas, canviant els rols de V_1 i V_2.

(c) Una manera de provar-ho és fent inducció sobre $n \geq 2$. El cas base és $n = 2$, però ja hem vist a l'apartat (a) que K_2 té la propietat SBG. Per fer el pas inductiu, suposem que per algun $n \geq 3$ fixat el graf K_{n-1} té la propietat SBG (hipòtesi d'inducció) i demostrem

que K_n també la té. Sigui v un vèrtex qualsevol de K_n. Tenim que $K_n - v = K_{n-1}$, que té la propietat SBG per hipòtesi d'inducció. Aleshores l'apartat (b) garanteix que K_n també té la propietat SBG.

Una altra manera de provar-ho és fent un raonament directe. Si n és parell, K_n conté un subgraf generador isomorf a $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. Tenim

$$\mathrm{mida}(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}) = \frac{n^2}{4} \geq \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{\mathrm{mida}(K_n)}{2}.$$

Si n és senar, K_n conté un subgraf generador isomorf a $K_{\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2}}$. Tenim

$$\mathrm{mida}(K_{\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2}}) = \frac{(n+1)(n-1)}{4} = \frac{n^2-1}{4} \geq \frac{n^2-n}{4} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{\mathrm{mida}(K_n)}{2}.$$