Qualsevol sistema d'equacions s'ha de discutir i/o resoldre pel mètode de Gauss, i el càlcul de la inversa d'una matriu s'ha de fer pel mètode de Gauss-Jordan.

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$.
   (a) [1 punt] Doneu la definició de combinació lineal i d'independència lineal de una família de vectors de E.
   (b) [1 punt] Demostreu que un conjunt de vectors de E és linealment dependent si, i només si, algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres.

2. [4 punts] (tots els apartats valen igual) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$ següent

$$F_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z + t = 0,\ 3x + 2y - 3z + (2+\lambda)t = 0,\ y - 3z + (-2\lambda - 1)t = 0 \right\}.$$

   (a) Doneu la dimensió de F_λ en funció del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Doneu una base B del subespai F_{-2}. Completeu aquesta base de F_{-2} a una base W de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Doneu el vector de coordenades del vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_{-2}$ en la base B de l'apartat (b).
   (d) Considereu el subespai $G = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Quines condicions ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ per ser vector de G?

3. Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y + 2z \\ x + 2y - z \\ -x + y + 7z \end{pmatrix}.$$

   (a) [0,5 punts] Doneu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) [1 punt] Doneu la dimensió i una base de la imatge de f. Esbrineu si f és exhaustiva i/o injectiva.
   (c) [1,5 punts] Doneu la matriu associada a f en la base B, sent

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (d) [1 punt] Doneu els valors propis de f i esbrineu si f és diagonalitzable.

Solució.

1. (a) Una combinació lineal d'una família de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de E és qualsevol vector $v \in E$ de la forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

per a escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qualssevol.

Una família de vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és linealment independent si l'única combinació lineal d'ells igual al vector zero és la combinació lineal nul·la, és a dir, si

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_K v_K = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ és una família linealment dependent. Vol dir que no és linealment independent i, per tant, que existeixen escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ no tots nuls tals que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_E$. Si convé reordenant els vectors, podem suposar que és $\lambda_1 \neq 0$. Podem aleshores aïllar el vector v_1 i obtenir que

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_k v_k) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k$$

i.e. v_1 és combinació lineal de la resta de vectors.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocament, si un dels vectors, que podem suposar que és v_1, és combinació lineal de la resta tenim que

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

per a certs escalars $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Per tant

$$v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_k v_k = 0_E$$

i.e. es té una combinació lineal no nul·la de tots els vectors que dóna el vector zero.

2. (a) Atès que F_λ és el subespai de solucions d'un sistema lineal homogeni, tenim que $\dim(F_\lambda) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{rang}(A_\lambda)$, on A_λ és la matriu associada al sistema. Calculem el rang

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2+\lambda \\ 0 & 1 & -3 & -2\lambda - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2' \leftarrow f_2 - 3f_1 \\ f_3' \leftarrow f_3 + f_2' \end{matrix}$$

EL rang de A_λ és 2 si, i només si, $\lambda = -2$. Per tant, $\dim(F_\lambda) = 2$ si $\lambda = -2$, altrament la dimensió és 1.

(b) Per trobar una base de F_{-2} n'hi ha prou en trobar la solució en forma parmètrica del sistema (acabem de fer els càlculs començats a l'apartat anterior per resoldre el sistema, ara en el cas $\lambda = -2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1' \leftarrow f_1 + f_2 \\ \end{matrix}$$

Tenim doncs $x = -z + 2t$ i $y = 3z - 3t$. Donat un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F_{-2}$ tenim que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

així els vectors $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generen F_{-2}, i com té dimensió 2, $B = \{v_1, v_2\}$ és una base.

Atès que $\mathbb{R}^4$ té dimensió 4, només cal trobar dos vectors v_3, v_4 tals que el conjunt $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sigui linealment independent per tal que W sigui una base de $\mathbb{R}^4$. Prenem per v_3 i v_4 els dos primers vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^4$, com que la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang 4, els vectors v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents. Per tant, W és una base de $\mathbb{R}^4$.

(c) El vector de coordenades v_B té per components els escalars $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha = 2, \quad \beta = 1 \longrightarrow v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$ si, i només si, existeixen dos escalars λ_1, λ_2 tals que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'aquesta condició s'obté un sistema que cal imposar que tingui solució:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 3 & 1 & t \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x - y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t + x - 2y \end{array}\right).$$

El sistema té solució, si i només si, el rang de la matriu associada i ampliada és el mateix, 2 en aquest cas. Per tant, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$ si, i només si, $z = 0$ i $t + x - 2y = 0$.

3. (a) Cerquem les imatges dels vectors de la base canònica $\mathcal{C}$ i amb ells formarem la matriu $M = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ associada a l'endomorfisme.

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Sabem que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang} M$ i $\mathrm{Im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$, on e_1, e_2, e_3 són els vectors de la base canònica. Calculem el rang de M

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} f_1' \leftarrow f_2 \\ f_2' \leftarrow f_1 \\ f_3' \leftarrow f_3 + f_1' \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; f_3'' \leftarrow f_3' - 3f_2'$$

El rang de M és 2, així la dimensió de la imatge és 2 i una base de la imatge és $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. L'aplicació no és ni injectiva ni exhautiva ja que el rang de la matriu no coincideix amb la dimensió de l'espai.

(c) Sabem que $M_B^B(f) = P_B^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C}}^B$, on

$$P_{\mathcal{C}}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } P_B^{\mathcal{C}} = \left(P_{\mathcal{C}}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu $P_B^{\mathcal{C}}$ la trobem mitjançant el mètode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \; f_3' \leftarrow -f_3 + f_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \; \begin{array}{l} f_1' \leftarrow f_1 - f_3' \\ f_2 \leftarrow f_2' - f_3' \end{array}$$

La matriu demanada és

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Els valors propis de f són les arrels del polinomi característic:

$$p_f(x) = \det(M - x\, I_3) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & 7-x \end{vmatrix} = -x^3 + 9x^2 - 16x = -x(x^2 - 9x + 16).$$

Les arrels són 0, $(9+\sqrt{17})/2$ i $(9-\sqrt{17})/2)$. Com que l'espai té dimensió 3 i l'endomorfisme té tres valors propis diferents, f diagonalitza.