Matemàtiques 1 - FIB — 22-11-2017
Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (2 punts) *Demostreu que si un graf connex té ordre n i mida m, aleshores $m \geq n - 1$.*

   Per inducció sobre $n \geq 1$, l'ordre del graf.

   Per a $n = 1$ la proposició és certa ja que si el graf té ordre 1 té mida 0.

   Suposem certa la propietat per a tot graf connex d'ordre $n \geq 1$ i provem que també ho és per a tot graf connex d'ordre $n+1$. Sigui $G = (V, A)$ un graf connex d'ordre $n+1$ i mida m. Hem de provar que $m \geq n$. Si tots els vèrtexs de G tenen grau més gran o igual que 2, aleshores aplicant el lema de les encaixades tenim que

   $$2m = \sum_{v \in V} g(v) \geq 2(n+1)$$

   i, per tant, $m \geq n+1 > n$. En cas que G tingui un vèrtex v de grau 1, considerem el graf $G' = G - v$

   - G' té ordre n i mida $m - 1$,
   - G' és connex, ja que el nombre de components connexos d'un graf menys un vèrtex és, com a molt, el grau del vèrtex eliminat, i en aquest cas el vèrtex eliminat té grau 1.

   Així, aplicant la hipòtesi d'inducció al graf $G - v$, tindrem que $m - 1 \geq n - 1$, d'on resulta que $m \geq n$, tal com volíem provar.

2. (3 punts) *Sigui $G = (V, A)$ un graf on $|V| = n$, $|A| = m$, i $m = n - 2$. Sigui $k \geq 2$ el nombre de components connexos de G.*

   (a) *Proveu que si $k = 2$ els components connexos de G són arbres, i si $k = 3$, algun dels components connexos de G té un cicle.*

   Per a $k = 2$, siguin G_1 i G_2 els components connexos de G. Tenim que

   $$n - 2 = m = \text{mida}\,(G_1) + \text{mida}\,(G_2) \geq (\text{ordre}\,(G_1) - 1) + (\text{ordre}\,(G_2) - 1) = n - 2.$$

   Per tant, la mida dels components connexos és exactament el seu ordre menys 1 i, com que són grafs connexos, són arbres.

   Per $k = 3$, si els components connexos de G són tots arbres, G és un bosc i té mida $n - 3$. Com que la mida de G no és aquesta per hipòtesi, algun component connex no és un arbre. Aquest component connex no arbre, com que és un graf connex ha de tenir cicles, ja que un arbre és un graf connex i acíclic.

(b) *Sigui G^c el graf complementari de G. Proveu que $D(G^c) \leq 2$. En quin cas $D(G^c) = 1$?*

Siguin $x, y \in V$ vèrtexs diferents de G^c qualssevol. Si x i y són a components connexos diferents de G, a G^c són adjacents i la seva distància a G^c és 1. Si x i y són al mateix component connex de G, sigui z un vèrtex d'un altre component connex de G. Aquest vèrtex z és adjacent a x i y a G^c, així hi ha el camí xzy de longitud dos a G^c, per tant la distància entre x i y a G^c és menor igual que 2, el que indica que el diàmetre de G^c és com a molt 2.

Si el diàmetre de G^c és 1 significa que tots els vèrtexs de G^c són adjacents dos a dos, és a dir, és isomorf a K_n. Tenim, doncs, que $G = (G^c)^c \backsimeq K_n^c \backsimeq N_n$, i com per hipòtesi $m = n - 2$, tenim $n = 2$. Així, $D(G^c) = 1$ si, i només si, G és un graf nul de 2 vèrtexs.

3. (3 punts) *En la seqüència de graus d'un graf G apareixen només els valors* 14*,* 15 *i* 16*.*

(a) *Proveu que la mida de G és almenys 121. Doneu un exemple que tingui mida exactament 121.*

Si el grau màxim de G és 16, el graf té almenys un vèrtex de grau 16 i ordre 17 com a mínim. Com que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar, G ha de tenir almenys dos vèrtexs de grau 15. Aplicant el lema de les encaixades tenim que

$$\text{mida}\,(G) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} g(v) \geq (16 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 14 \cdot (17 - 3))/2 = 121.$$

Considerem el graf complet K_{17} amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, x_2, \ldots, x_{17}\}$. Sigui $W = \{x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_{15}x_{16}, x_{16}x_{17}\}$ un conjunt d'arestes de K_{17}, de fet són les arestes del camí $x_2x_3 \ldots x_{17}$. El graf $G - W$ té un vèrtex de grau 16, x_1, dos vèrtexs de grau 15, x_2 i x_{17}, i la resta de vèrtexs tenen grau 14. Per tant, G és l'exemple que demana l'enunciat,

(b) *Suposeu que no hi ha dos vèrtexs de grau 14 adjacents. Demostreu que G té un camí de longitud almenys 15.*

Si ens en recordem, podem usar l'exercici 2.3 de la llista de problemes (exercici obligatori de taller) que diu: si un graf té grau mínim d, té un camí de tongitud d. Altrament, veiem com fem per provar que es té aquest camí. Sigui $x_0x_1 \ldots x_k$ un camí a G. Si $k \geq 15$ ja ho tenim. Si $k < 14$, com que el grau mínim de G és 14, hi ha algun vèrtex $x_{k+1} \notin \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ que és adjacent a x_k, de manera que tenim un camí $x_0x_1 \ldots x_kx_{k+1}$ una unitat més llarg. Repetim el procès fins obtenir el camí $x_0x_1 \ldots x_{14}$ de longitud 14.

Si x_{14} té grau 15 o 16 hi ha algun vèrtex $y \notin \{x_0, \ldots, x_{13}\}$ adjacent a ell, i afegint-ho a la seqüència contruïm el camí $x_0, \ldots, x_{14}y$ de longitud 15. Si x_0 té grau 15 o 16 procedim de la mateixa manera allargant el camí pel principi.

Suposem ara que x_0 i x_{14} tenen grau 14. En aquest cas x_0 i x_{14} no són adjacents, per tant hi ha algun vèrtex $z \notin \{x_1, \ldots, x_{13}\}$ que és adjacent a x_{14}, i amb aquest vèrtex tenim el camí $x_0x_1 \ldots x_{14}z$ de longitud 15.

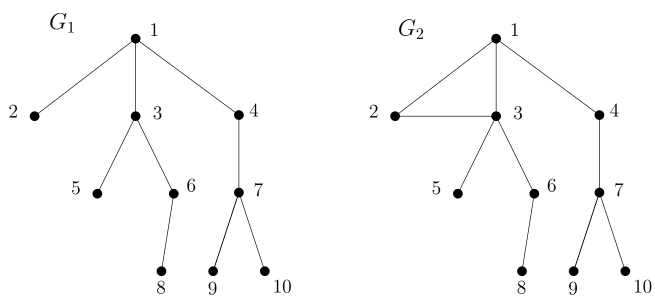
(c) *Suposem ara que l'ordre és 29 i que només hi ha un vèrtex de grau 14. Demostreu que G és hamiltonià.*

El Teorema d'Ore diu que si en un graf d'ordre $n \geq 3$ per a tot parell de vèrtexs x i y diferents i no adjacents la suma dels seus graus és com a mínim n, el graf és hamiltonià.

En el nostre cas, si x i y són vèrtexs de G tenim que $g(x) + g(y) \geq 15 + 14 = 29$, ja que com hi ha exactament un vèrtex de grau 14 la resta tenen grau mínim 15. Aleshores, aplicant el teorema d'Ore, el graf G és hamiltonià.

4. (2 punts) *Sigui* $T = (V, A)$ *un arbre on* $V = [10]$ *i* $A = \{12, 13, 14, 35, 36, 47, 68, 79, 7\,10\}$). *Suposem que* T *és l'arbre generador d'un graf* G *obtingut aplicant l'algorisme BFS amb vèrtex inicial* 1 *i triant en cada pas els vèrtexs seguint l'ordre numèric.*

   (a) *Doneu dos grafs* G_1 *i* G_2 *no isomorfs amb conjunt de vèrtexs* V *que tinguin aquest arbre generador* T *obtingut a l'aplicar el BFS tal com diu l'enunciat. Quina és la mida màxima que poden tenir aquests grafs?*



Prenem $G_1 = T$ i $G_2 = T + 23$. Aquests grafs no són isomorfs ja que tenen mides diferents. Apliquem l'algorisme BFS a G_2 començant pel vèrtex 1 (la taula de la pàgina següent indica els passos que es segueixen) i veiem que el conjunt d'arestes visitades és $\{12, 13, 14, 35, 36, 47, 68, 79, 7\,10\}$, és a dir, l'arbre obtingut és T.

Esbrinem ara quin és el nombre màxim d'arestes que pot tenir G. Observem que, per obtenir T a partir d'un graf G arbitrari, l'esquema a seguir de l'algorisme és exactament el mateix que el de la taula presentada. Analitzem vèrtex a vèrtex:

- 1 no pot ser adjacent a més vèrtexs, altrament a T hauria de tenir grau > 3.
- 2 no pot ser adjacent als vèrtexs 5, 6, ...,10, perquè si ho fos, al no estar aquests vèrtexs visitats quan 2 és el primer de la cua, l'algorisme els visitaria quan 2 fos primer de la cua i T tindria arestes incidents a 2. Ara bé, 2 pot ser adjacent a 3 i 4, ja que quan és primer de la cua aquests vèrtexs ja han estat visitats.
- repetint els arguments anteriors:
  - 3 no pot ser adjacent a 7, 8, 9 i 10, però sí a 4;
  - 4 no pot ser adjacent a 8, 9 i 10, però sí a 5 i 6;
  - 5 no pot ser adjacent a 8, 9 i 10, però sí a 6 i 7;
  - 6 no pot ser adjacent a 9 i 10, però sí a 7;
  - 7 pot ser adjacent a 8;
  - els vèrtexs 8, 9 i 10 poden ser adjacents 2 a 2 a G.

Resumint, les arestes possibles són 23, 24, 34, 45, 46, 56, 57, 67, 78, 89, 8 10 i 9 10. El nombre màxim d'arestes que pot tenir G és 21 (les 9 de T més aquestes 12).

Taula: algorisme BFS aplicat a G_2

	1r cua	acció	cua	vèrtexs visitats	afegir aresta
Iniciar			1	{1}	
	1	2 demana torn	1 2	{1,2}	12
	1	3 demana torn	1 2 3	{1,2,3}	13
	1	4 demana torn	1 2 3 4	{1,2,3,4}	14
	1	avança la cua	2 3 4	{1,2,3,4}	
	2	avança la cua	3 4	{1,2,3,4}	
	3	5 demana torn	3 4 5	{1,2,3,4,5}	35
	3	5 demana torn	3 4 5 6	{1,2,3,4,5,6}	36
	3	avança la cua	4 5 6	{1,2,3,4,5,6}	
	4	7 demana torn	4 5 6 7	{1,2,3,4,5,6,7}	47
	4	avança la cua	5 6 7	{1,2,3,4,5,6,7}	
	5	avança la cua	6 7	{1,2,3,4,5,6,7}	
	6	8 demana torn	6 7 8	{1,2,3,4,5,6,7,8}	68
	6	avança la cua	7 8	{1,2,3,4,5,6,7,8}	
	7	9 demana torn	7 8 9	{1,2,3,4,5,6,7,8,9}	79
	6	10 demana torn	7 8 9 10	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}	7 10
	7	avança la cua	8 9 10	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}	
	8	avança la cua	9 10	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}	
	9	avança la cua	10	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}	
	10	avança la cua		{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}	

(b) *Pot ser G un graf eulerià? Pot tenir G un senderó eulerià? En cas afirmatiu doneu un exemple de G.*

En aplicar l'algorisme BFS començant al vèrtex 1 es visiten tots els vèrtexs adjacents a 1, així a T i a G 1 té el mateix grau, 3. Per tant, G no és eulerià ja que té vèrtexs de grau senar.

El graf G pot tenir un senderó eulerià, només cal tingui exactament dos vèrtexs de grau senar. Escollim entre les arestes possibles descrites a l'apartat anterior i definim $G = T + \{23, 57, 89\}$. Aquest graf G té tots els vèrtexs de grau parell llevat de 1 i 10 que tenen grau senar.