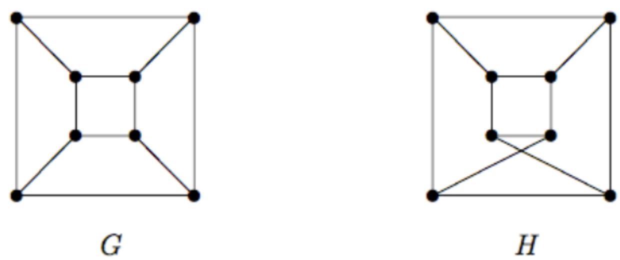
JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) [1 punt] Enuncieu el teorema de caracterització dels arbres.
   (b) [1 punt] Proveu que tot arbre d'ordre $n \geq 2$ té almenys dues fulles.

2. [4 punts]

   a) Esbrineu si els grafs de la figura són isomorfs. En cas afirmatiu, justifiqueu-ho donant un isomorfisme; en cas negatiu, justifiqueu-ho donant una propietat que un tingui i l'altre no.



   b) Considereu el graf bipartit complet $K_{3,6}$ amb parts estables $V_0 = \{1, 2, 3\}$ i $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, i sigui $G = K_{3,6} - \{1a, 2b, 3c\}$. Trobeu-ne les excentricitats dels vèrtexs, el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals.

   c) Sigui G un graf connex on els graus dels vèrtexs només són 1, 2, 3 i 4. Sabem que G té 30 vèrtexs de grau 1, i que el nombre de vèrtexs de grau 2 és el doble del nombre de vèrtexs de grau 3 i el quàdruple del nombre de vèrtexs de grau 4. Trobeu quants vèrtexs de grau 4 ha de tenir G per a poder assegurar que és un arbre.

   d) Siguin u i v dos vèrtexs d'un graf G tals que $d(u, v) \geq 3$. Demostreu que en G^c tot altre vèrtex w és adjacent a u o a v

3. [4 punts]

   Considereu el graf $M_r = (V_r, A_r)$, $r \geq 1$, on $V_r = \{0, 1, \ldots, 2r\}$ i A_r és el conjunt d'arestes definides per les adjacències següents:

$$0 \sim i, \ \forall \, i \in \{1, \ldots, 2r\}$$
$$2i \sim 2i - 1, \ \forall \, i \in \{1, \ldots, r\}$$

   (a) Doneu l'ordre, el grau dels vèrtexs i la mida de M_r en funció de $r \geq 1$.
   (b) Doneu l'arbre generador de M_5 que s'obté aplicant l'algorisme DFS partint del vèrtex 0 i seguint l'ordre natural dels vèrtexs.
   (c) Per a quins valors de r el graf M_r és eulerià i per a quins valors té senderó eulerià?
   (d) Per a quins valors de r el graf M_r és hamiltonià i per a quins valors té camí hamiltonià?

Model de solució

1. (a) El teorema diu que donat qualsevol graf $T = (V, A)$ d'ordre n i mida m són equivalents els enunciats següents:

    - T és un arbre;
    - T és acíclic i $m = n - 1$;
    - T és connex i $m = n - 1$;
    - T és connex i tota aresta és pont;
    - per cada parell de vèrtexs $u, v \in V$ de T existeix un i només un u-v camí a T;
    - T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle.

   (b) Sigui $T = (V, A)$ l'arbre, i anomenem r el nombre de fulles. Com que T és arbre d'ordre n, la seva mida és $n - 1$. Pel lema de les encaixades tenim aleshores que

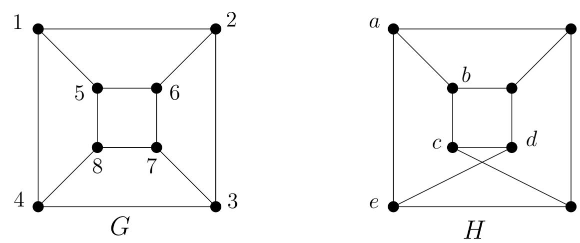
$$2(n-1) = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V,\ g(v)=1} g(v) + \sum_{v \in V,\ g(v)>1} g(v),$$

   on el sumatori l'hem desdoblat en un sumatori sobre les fulles i un altre sobre la resta de vèrtexs. El primer sumatori val r i el segon no sabem quant val, però sí que sabem que és més gran o igual que el doble del nombre de sumands, ja que és sobre vèrtexs v tals que $g(v) \geq 2$. Com que el nombre de sumands és $n - r$, deduïm que

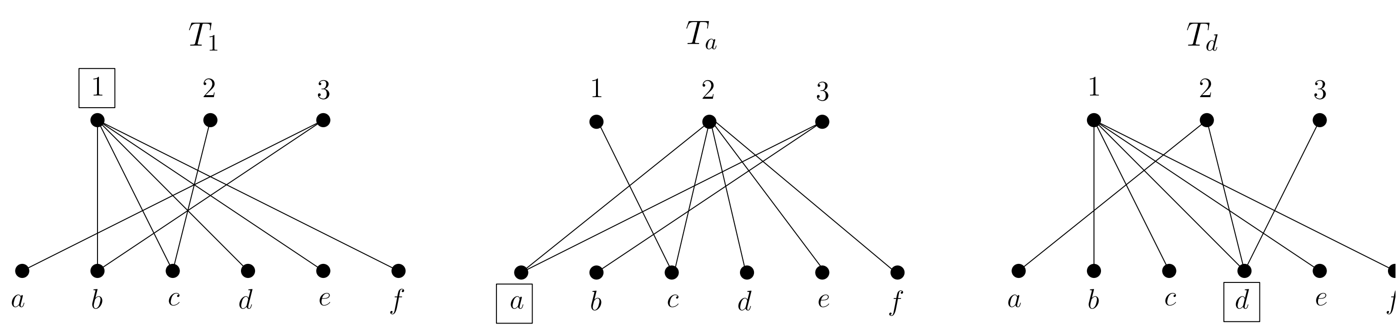
$$2(n-1) \geq r + 2(n-r) = 2n - r.$$

   Simplificant queda que $r \geq 2$.

2. (a) Els grafs no són isomorfs. El graf G és bipartit amb parts estables $\{1, 3, 8, 6\}$ i $\{2, 4, 5, 7\}$, i H no és bipartit ja que té cicles de longitud senar, com per exemple el cicle de longitud 5 $abcdea$. Alternativament, una altra justificació és que el graf G té diàmetre 3 i el graf H té diàmetre 2.



   (b) Per calcular l'excentricitat d'un vèrtex x necessitem saber la distància d'aquest vèrtex a qualsevol altre del graf. Aplicant l'algorisme BFS a G, començant en el vèrtex x, s'obté l'arbre de les distàncies d'aquest vèrtex a qualsevol altre. Els arbres de la figura de sota ens donen els arbres de les distàncies des del vèrtex 1 (arbre T_1), des del a (arbre T_a) i des del d (arbre T_d). Així $\mathsf{e}(1) = \mathsf{e}(a) = 3$ i $\mathsf{e}(d) = 2$.



Per la simetria del graf, tenim que $\mathtt{e}(2) = \mathtt{e}(3) = \mathtt{e}(1)$, $\mathtt{e}(b) = \mathtt{e}(c) = \mathtt{e}(a)$ i $\mathtt{e}(e) = \mathtt{e}(f) = \mathtt{e}(d)$.

El diàmetre del graf és 3, el màxim de les excentricitats dels vèrtexs, i el radi és 2, el mínim de les excentricitats. Els vèrtexs centrals són d, e, i f.

(c) Siguin n l'ordre de G i r el nombre de vèrtexs de grau 4. Tenint en compte que el nombre de vèrtexs de grau 3 és $2r$ i el de grau 2 és $4r$, l'ordre és $n = 30 + r + 2r + 4r = 30 + 7r$. Com que el graf G és connex serà un arbre si, i només si, la mida és $n - 1$. Usant el lema de les encaixades, G serà arbre si, i només si,

$$2(n-1) = 30 + 2 \cdot 4r + 3 \cdot 2r + 4 \cdot r \;\Leftrightarrow\; 2(29 + 7r) = 30 + 18r \;\Leftrightarrow\; r = 7$$

Per tant, G serà arbre si, i només si, té 7 vèrtexs de grau 4.

(d) Si la distància entre u i v és 3 no hi ha cap vèrtex a G que sigui adjacent a tots dos, ja que si hi hagués un vèrtex z amb $z \sim u$ i $z \sim v$ el graf G tindria un u-v camí de longitud 2, el que es contradiu amb el fet que la distància $d(u, v)$ sigui 3. Així, tot altre vèrtex w o no és adjacent a cap dels dos vèrtexs u i v, o és adjacent únicament a un d'ells. Així, a G^c tot altre vèrtex w o és adjacent a tots dos vèrtexs u i v o exactament a un (al que no ho és a G).

3. (a) L'ordre és $n = 2r + 1$. Els graus dels vèrtexs són $g(0) = 2r$ (0 és adjacent a la resta de vèrtexs) i $g(k) = 2$ si $k > 0$ (cada vèrtex $k \neq 0$ és adjacent a 0 i $k + 1$ si k és senar i a 0 i $k - 1$ si k és parell). La mida és doncs

$$m = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2r} g(k) = \frac{1}{2}(2r) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2r} 2 = r + 2r = 3r.$$

(b) El graf M_5 té per conjunt de vèrtexs $V_5 = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ i per conjunt d'arestes $A_5 = \{01, 02, \ldots, 0(10), 12, 34, 56, 78, 9(10)\}$. En aplicar l'algorisme DFS partint del vèrtex 0 i seguint l'ordre natural, es visita el vèrtex 1, de 1 passem a 2. Atès que 2 és adjacent a vèrtexs que ja s'han visitat (0 i 1), l'algorisme torna a 1, però els vèrtexs adjacent a 1 també els ha visitat l'algorisme, així que l'algorisme torna a 0. Seguint l'ordre, el següent vèrtex no visitat adjacent a 0 és el 3, de 3 passem a 4. Anàlogament al cas anterior, els vèrtexs adjacents a 4 ja estan visitats, i els adjacents a 3 també, així que tornem al 0. Repetint el procés amb els vèrtexs que queden per visitar i emmagatzemant les arestes per les que es passa, s'obté l'arbre generador definit per les arestes

$$\{01, 12, 03, 34, 05, 56, 07, 78, 09, 9(10)\}.$$

(c) El graf M_r és connex per a qualsevol $r \geq 1$: si k, k' són dos vèrtexs qualssevol diferents de 0 es té el camí $k0k'$, i des de 0 es pot anar a quaslevol $k \neq 0$ a través de l'aresta $0k$. Per tant:

- M_r és eulerià si i només si tots els graus són parells, la qual cosa passa per a qualsevol $r \geq 1$. M_r és doncs eulerià per a qualsevol $r \geq 1$.
- M_r té senderó eulerià si i només si existeixen exactament dos vèrtexs de grau senar, la qual cosa no passa mai.

(d) Si $r = 1$ és hamiltonià, ja que és simplement un cicle C_3. En canvi, no és hamiltonià per a cap $r \geq 2$, ja que el vèrtex 0 sempre és de tall (en suprimir-lo passem d'un component connex a $r \geq 2$ components connexos, tots ells isomorfs a un T_2). Per altra banda, només existeix camí hamiltonià si $r = 1, 2$. En efecte, per $r = 1$ és isomorf a un graf cicle C_3, el qual té per camí hamiltonià qualsevol recorregut de longitud 2. Per $r = 2$, un camí hamiltonià és per exemple 12034. En canvi, si $r \geq 3$, com que 0 és vèrtex de tall tal que $M_r - 0$ té r components connexos, els camins a M_r entre vèrtexs de components connexos diferents de $M_r - 0$ han de passar necessàriament per 0. Però això significa que qualsevol recorregut que passi per tots els vèrtexs de M_r haurà de passar $r - 1 \geq 2$ cops per 0 i, per tant, no serà camí. No hi ha, doncs, cap camí hamiltonià si $r \geq 3$.