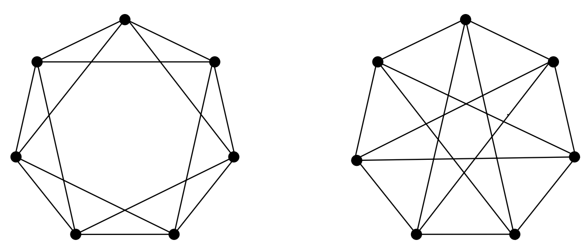
Matemàtiques 1 - GEI - FIB | 8-1-2019
Examen Final F1 | Part F1: Teoria de grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. [3 punts] Justifiqueu si les afirmacions següents són certes o falses.
   (a) Un graf d'ordre 10 i mida 9 és sempre connex.
   (b) La longitud d'un camí d'un graf no pot ser mai més gran que el diàmetre.
   (c) Un graf eulerià no té cap aresta pont.

2. [3 punts]
   (a) Esbrineu si els grafs següents són isomorfs. Si ho són doneu un isomorfisme, i si no ho són justifiqueu-ho.



   (b) Esbrineu si el complementari del primer graf de la figura anterior és bipartit.
   (c) Sigui T un arbre d'ordre 61 amb grau màxim 50 i exactament 57 fulles. Sabent que en la seqüència de graus de T hi apareixen només 4 valors diferents, trobeu totes les possibles seqüències de graus que pot tenir T.

3. [4 punts] Sigui K_n un graf complet d'ordre $n \geq 4$ amb conjunt de vèrtexs $[n]$. Considereu $G_n = K_n - B$, on B és el conjunt d'arestes $\{12, 23, \ldots, (n-1)n, n1\}$.
   a) Doneu els arbres generadors que s'obtenen en aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_8, començant pel vèrtex 1. Considereu que l'algorisme escull els vèrtexs en ordre numèric ascendent.
   b) Quant val el diàmetre $D(G_n)$?
   c) Per a quins valors de n és G_n un graf eulerià?
   d) Per a quins valors de n és G_n un graf hamiltonià?

Informacions

- Durada de l'examen: 2h
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra i cal lliurar els 3 problemes per separat.
- Publicació de les notes: 16/1/2019. Revisió de l'examen: 17/1/2019 a les 14:00 (s'informarà del lloc amb antel·lació).

Solució.

1. [3 punts] Justifiqueu si les afirmacions següents són certes o falses.

   (a) Un graf d'ordre 10 i mida 9 és sempre connex.

   Solució. Fals. No sempre és cert. Per exemple, el graf cicle d'ordre 9 juntament amb un vèrtex aïllat és un graf d'ordre 10 i mida 9 no connex.

   (b) La longitud d'un camí d'un graf no pot ser mai més gran que el diàmetre.

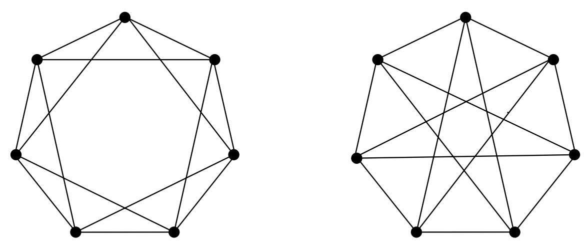
   Solució. Fals. Per exemple, el graf cicle d'ordre 5 té diàmetre 2, però hi ha camins de longitud 4: per exemple, suprimint una aresta del cicle s'obté un camí de longitud 4.

   (c) Un graf eulerià no té cap aresta pont.

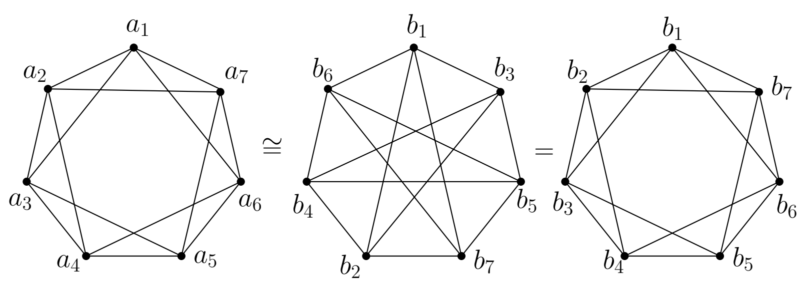
   Solució. Cert. Un graf G eulerià té un circuit eulerià, és a dir, un recorregut tancat que passa per totes les arestes una vegada i només una. Si suprimim una aresta a, s'obté un recorregut obert que passa per tots els vèrtexs de G, per tant $G - a$ és connex i a no és aresta pont.

2. [3 punts]

   (a) Esbrineu si els grafs següents són isomorfs. Si ho són doneu un isomorfisme, i si no ho són justifiqueu-ho.



   Solució. Els dos grafs són isomorfs. Si etiquetem els vèrtexs del graf de l'esquerra amb $V_1 = \{a_1, \ldots, a_7\}$ i els vèrtexs del graf de la dreta amb $V_2 = \{b_1, \ldots, b_7\}$ tal com s'indica a la figura següent, veiem que un isomorfisme està donat per l'aplicació $f : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que $f(a_i) = b_i$, per a tot $i \in \{1, \ldots, 7\}$.



   (b) Esbrineu si el complementari del primer graf de la figura anterior és bipartit.

   Solució. El graf de l'esquerra de la figura té ordre 7 i és 4-regular. El complementari és doncs 2-regular. Els grafs 2-regulars són unió de cicles. En aquest cas, només pot ser o bé un cicle d'ordre 7, o bé la unió d'un cicle d'ordre 3 i un d'ordre 4. En els dos casos, el graf té un cicle d'ordre senar. Per tant, el complementari no és bipartit.

(c) Sigui T un arbre d'ordre 61 amb grau màxim 50 i exactament 57 fulles. Sabent que en la seqüència de graus de T hi apareixen només 4 valors diferents, trobeu totes les possibles seqüències de graus que pot tenir T.

Solució. Sabem que hi ha 57 vèrtexs de grau 1 i un vèrtex de grau 50, per tant, a més d'aquests 58 vèrtexs hi ha exactament 3 vèrtexs que tenen graus d_1, d_2, d_3 amb $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq 50$. Pel lema de les encaixades, la suma dels graus és dues vegades la mida, i la mida d'un arbre d'ordre 61 és 60. Per tant,

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 2 \cdot 60 = 120,$$
$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 57 + 50 + d_1 + d_2 + d_3.$$

d'on deduïm que:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 13.$$

Aquesta igualtat implica que d_1, d_2, d_3 són diferents de 50. Per tant, hi ha d'haver un valor repetit en d_1, d_2, d_3, ja que a la seqüència de graus hi ha 4 valors diferents i dos d'aquests valors són 1 i 50. Si d_1, d_2, d_3 són a, a, b, amb $2 \leq a, b \leq 50$, aleshores $b = 13 - 2a$. Si $a \in \{2, 3, 4, 5\}$, aleshores $b \in \{3, 5, 7, 9\}$. No pot ser $a \geq 6$, ja que aleshores $b \leq 1$. Per tant hi ha 4 possibles seqüències de graus:

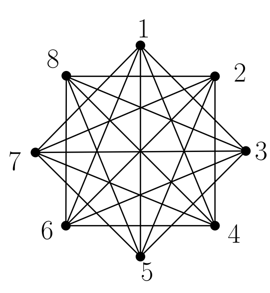
$$S_1 = (1, \ldots, 1, 2, 2, 9, 50),\ S_2 = (1, \ldots, 1, 3, 3, 7, 50),$$
$$S_3 = (1, \ldots, 1, 4, 4, 5, 50),\ S_4 = (1, \ldots, 1, 3, 5, 5, 50),$$

on el nombre d'uns en tots els casos és exactament 57.

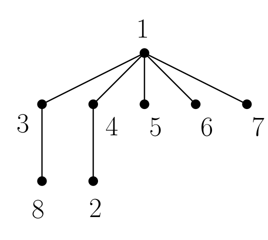
3. [4 punts] Sigui K_n un graf complet d'ordre $n \geq 4$ amb conjunt de vèrtexs $[n]$. Considereu $G_n = K_n - B$, on B és el conjunt d'arestes $\{12, 23, \ldots, (n-1)n, n1\}$.

a) Doneu els arbres generadors que s'obtenen en aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_8, començant pel vèrtex 1. Considereu que l'algorisme escull els vèrtexs en ordre numèric ascendent.

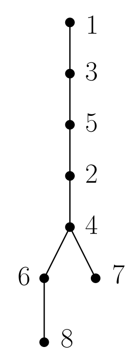
Solució. Vegeu en la figura següent els arbres BFS i DFS obtinguts, on l'ordre en què afegim els vèrtexs és $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 2$ en el BFS i $1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 7$ en el DFS.



G_8



BFS



DFS

b) Quant val el diàmetre $D(G_n)$?

Solució. El diàmetre és el màxim de les excentricitats. A més, tots els vèrtexs de G_n tenen la mateixa excentricitat per simetria. El diàmetre de G_4 és ∞ perquè G_4 és no connex (és la unió de dos K_2). Si $n \geq 5$, l'excentricitat del vèrtex 1 és 2, ja que 1 és adjacent a tots els vèrtexs excepte 2 i n, i a més, si $n \geq 5$, els vèrtexs 2 i n són adjacents a 4 i a 3 respectivament. Per tant, el diàmetre de G_n és 2 si $n \geq 5$.

c) Per a quins valors de n és G_n un graf eulerià?

Solució. El graf G_n és $n-3$ regular. El graf G_4 no és eulerià perquè no és connex. Si $n \geq 5$, el graf G_n és connex (perquè hem vist a l'apartat anterior que el seu diàmetre és finit), i per tant és eulerià si i només si tots els vèrtexs tenen grau parell, és a dir, si i només si $n-3$ és parell. Aquesta condició és equivalent a que n sigui senar.

d) Per a quins valors de n és G_n un graf hamiltonià?

Solució. Tot vèrtex de G_n té grau $n-3$. Si $n \geq 6$, aleshores $n-3 \geq \dfrac{n}{2}$ ja que

$$n-3 \geq \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2n-6 \geq n \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Per tant, pel Teorema de Dirac, G és hamiltonià quan $n \geq 6$. El graf G_5 és un cicle de longitud 5 i per tant és hamiltonià, i el graf G_4 no és hamiltonià ja que no és connex.