JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) [0.5 punts] Doneu la definició de senderó i de senderó eulerià.

   (b) [1.5 punts] Demostreu que un graf connex conté un senderó eulerià si i només si té exactament dos vèrtexs de grau senar.

Solució.

(a) Un senderó és un recorregut obert que no repeteix arestes. Un senderó eulerià és un senderó que passa per totes les arestes del graf.

(b) Sigui $G = (V, A)$ el graf i $R : ux_0x_1 \cdots x_kv$ un senderó eulerià de G. Considerem el graf $G' = (V', A')$ definit per

$$V' = V \cup \{z\}, \quad A' = A \cup \{zu, zv\},$$

amb $z \notin V$. El recorregut $R' : zux_0x_1 \cdots x_kvz$ és aleshores un circuit eulerià de G' i, per tant, G' és graf eulerià. Això implica que tots els vèrtexs de G' són de grau parell, i com que els graus dels vèrtexs $x_0, x_1, \ldots, x_k$ són els mateixos a G que a G', deduïm que u, v eren els únics vèrtexs de grau senar de G.

Recíprocament, si G té dos vèrtexs de grau senar u, v i la resta de grau parell, en el graf $G' = (V', A')$ definit anteriorment tots els vèrtexs seran de grau parell (z és de grau 2 i els graus de u, v han augmentat en una unitat, mentre que els graus a G' de la resta de vèrtexs de G ón els mateixos que a G). Per tant, com que G' també és connex, és eulerià. Però si $C : xux_1 \cdots x_kvx$ és un circuit eulerià de G', aleshores $R : ux_1 \cdots x_kv$ és un senderó eulerià de G.

2. (a) [1 punt] Proveu que no existeix cap arbre d'ordre $n \geq 5$ tal que el seu complementari també és un arbre.

   Solució. *Un arbre d'ordre n té mida $n - 1$, així que si el complementari també fos un arbre, hauria de ser també de mida $n - 1$. Com que la mida d'un graf més la del seu complementari és la mida del graf complet del mateix ordre, i.e. $n(n - 1)/2$ en aquest cas, això voldria dir que n hauria de ser tal que*

$$n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - (n - 1) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

   i això implica que o bé $n = 1$ o bé $n = 4$. Per tant, si l'arbre és d'ordre $n \geq 5$ el complentari no pot ser també un arbre.

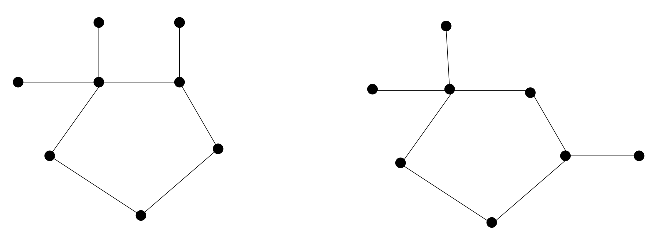
   (b) Un graf G d'ordre 8 té tres vèrtexs de grau 1, tres de grau 2, un de grau 3, i un de grau k, amb $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(i) [1 punt] Proveu que si $k = 4$, aleshores G té almenys un cicle.

Solució. *Si $k = 4$, la seqüència de graus és $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$. Del lema de les encaixades, deduïm que la mida és $m = 8$. Per altra banda, sabem que la mida d'un bosc (graf acíclic) d'ordre n i k components connexos és $n - k$. Per tant, si G fos acíclic hauria de ser $k = 0$, que no pot ser perquè el nombre k de components connexos de qualsevol graf és $k \geq 1$. Per tant, G ha de contenir almenys un cicle.*

(ii) [1 punt] Suposem que $k = 4$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu tots els possibles grafs G llevat d'isomorfismes.

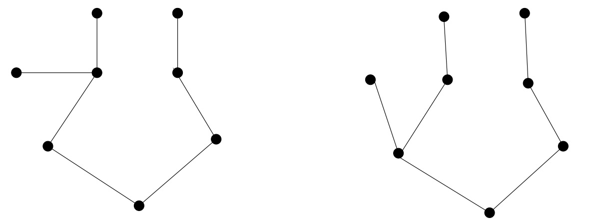
Solució. *Observem primer que si G és connex, contindrà exactament un cicle. En efecte, treient una aresta d'algun cicle, queda un graf connex (l'aresta no era pont perquè era d'un cicle) de mida 7 i, per tant, un arbre. Això vol dir que G s'obté afegint una aresta a un arbre, i sabem que això crea exactament un cicle. Com que té 3 fulles i és d'ordre 8, l'ordre del cicle és ≤ 5. Per altra banda, si G' és el graf que s'obté en suprimir-li les 3 fulles, G' és d'ordre 5 i mida 5 (per tant, pel mateix raonament d'abans, un arbre al qual se li ha afegit una aresta) i per hipòtesi eulerià. Però si és eulerià ja no pot tenir fulles, així que G' ha de ser necessàriament un cicle C_5. Com que a G hi ha un vèrtex de grau 4, dues de les 3 fulles de G han de ser adjacents al mateix vèrtex d'aquest cicle, i l'altra a un altre vèrtex del cicle, perquè ha d'haver-hi un vèrtex de grau 3. Llevat isomorfisme, hi ha doncs dues possibilitats, segons que els vèrtexs d'on pengen les fulles siguin adjacents o no.*



Un raonament alternatiu és el següent. Sabem que la seqüència de graus de G és $4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$. Si G és connex, dos vèrtexs de grau 1 no poden ser adjacents. Per tant, els vèrtexs de grau 1 són adjacents a vèrtexs de grau ≥ 2. En suprimir un vèrtex de grau 1, el grau del vèrtex que li és adjacent disminueix en una unitat. Si un vèrtex de grau 1 és adjacent a un vèrtex de grau 2, en suprimir-lo quedarà un vèrtex de grau < 2, i el graf resultant no podrà ser eulerià. Per tant, tots els vèrtexs de grau 1 són adjacents als vèrtexs de grau 3 i 4. Per tal que en suprimir-los ens quedi un graf eulerià, és a dir, amb tots els vèrtexs de grau parell, hi ha d'haver un vèrtex de grau 1 adjacent al vèrtex de grau 3 i els altres dos, adjacents al vèrtex de grau 4. Llavors, la seqüència de graus del graf G', obtingut en suprimir els tres vèrtexs de grau 1 és necessàriament $2, 2, 2, 2, 2$. En ser G' eulerià, ha de ser connex, i per tant és un cicle d'ordre 5. El graf G s'obté en afegir un vèrtex de grau 1 adjacent a un vèrtex del cicle i els altres dos vèrtexs de grau 1 adjacents a un segon vèrtex del cicle. Ho podem fer de dues maneres diferents llevat d'isomorfismes, segons si els dos vèrtexs del cicle d'on penjen els vèrtexs de grau 1 són o no adjacents.

(iii) [1 punt] Determineu quin ha de ser el valor de k si G és un arbre. Trobeu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat.

Solució. *Si G ha de ser arbre, la seva mida ha de ser 7. Usant el lema de les encaixades deduïm aleshores que $14 = 12 + k$, així que ha de ser $k = 2$. Dos exemples d'arbres no isomorfs amb seqüència de graus $(3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$ són*



Són no isomorfs perquè el vèrtex de grau 3 en un graf és adjacent a dos de grau 2 i en l'altre ho és a un de grau 1 i un de grau 2.

3. Donat un enter $k \geq 2$, sigui $G_k = (V_k, A_k)$ el graf amb conjunt de vèrtexs

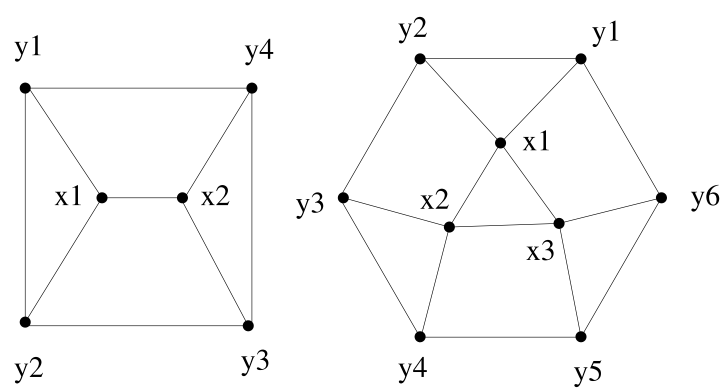
$$V_k = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_{2k-1}, y_{2k}\}$$

i conjunt d'arestes A_k definides per les adjacències següents:

$$\begin{array}{lll} x_1 \sim x_k, & x_i \sim x_{i+1} & \text{per a} \quad 1 \leq i < k, \\ y_1 \sim y_{2k}, & y_j \sim y_{j+1} & \text{per a} \quad 1 \leq j < 2k, \\ x_i \sim y_{2i}, & x_i \sim y_{2i-1} & \text{per a} \quad 1 \leq i \leq k. \end{array}$$

(a) [1 punt] Dibuixeu els grafs G_2 i G_3. Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G_k en funció de k.

Solució. *Els grafs G_2 i G_3 són*



En general, G_k, per a $k \geq 3$, és d'ordre $3k$, mida $3k + 2k = 5k$ (el graf consisteix en dos cicles C_k i C_{2k}, que fan $3k$ arestes, connectats de manera que cada vèrtex de C_k és adjacent a 2 vèrtexs de C_{2k}, que fan les $2k$ arestes restants). Els graus dels vèrtexs en el cas $k \geq 3$ són

$$g(x_i) = 4, \; i = 1, \ldots, k$$

$$g(y_j) = 3, \; j = 1, \ldots, 2k.$$

En canvi, G_2 és 3-regular.

(b) [1 punt] És G_k hamiltonià? I 2-connex?

Solució. *G_k és hamiltonià. Un cicle hamiltonià és, per exemple, el cicle*

$$x_1 y_2 y_3 x_2 y_4 y_5 x_3 y_6 \cdots y_{2k-1} x_k y_{2k} y_1 x_1$$

Com que és hamiltonià, és necessàriament 2-connex (no pot tenir vèrtexs de tall).

(c) [1 punt] Doneu l'arbre generador de G_4 obtingut aplicant l'algoritme BFS a partir del vèrtex x_1 i triant els vèrtexs d'acord amb l'ordre $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_8$. Calculeu el diàmetre de l'arbre obtingut i digueu quins són els seus vèrtexs centrals.

Solució. *Aplicant l'algoritme BFS s'obté l'arbre que apareix a la Fig. 1, on les arestes estan etiquetades d'acord amb el seu ordre d'aparició. Pel que fa al diàmetre, és el màxim de les excentricitats. Per tal de calcular-lo, calculem l'excentricitat de cada vèrtex (és a dir, per a cada vèrtex calculem la distància a la qual es troba el vèrtex més allunyat), i s'obtenen els valors que s'especifiquen a la Fig. 2. El diàmetre d'aquest arbre és doncs $D = 5$, i els vèrtexs centrals (i.e. els vèrtexs que tenen excentricitat mínima) són x_1 i x_2.*

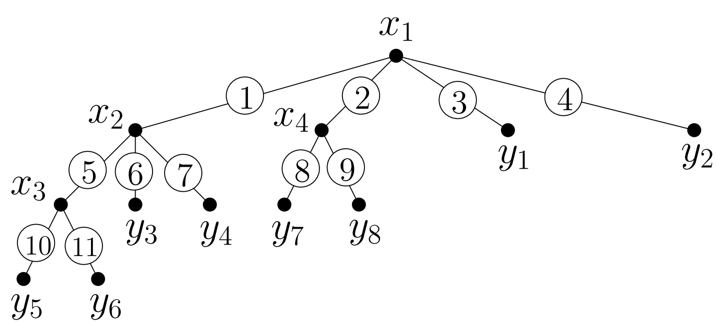


Figure 1: Arbre generador resultant d'aplicar BFS.

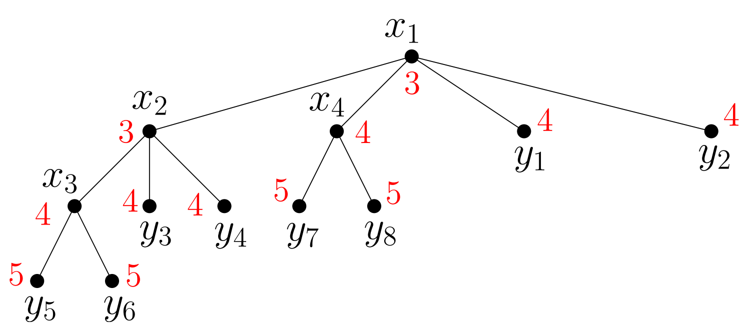


Figure 2: Excentricitats dels vèrtexs de l'arbre anterior.

(d) [1 punt] És G_k bipartit per algun $k \leq 2$? En cas que G_3 i G_4 no ho siguin, quin és el nombre mínim d'arestes que cal suprimir de cadascun per tal de convertir-los en grafs bipartits?

Solució. *G_k no és bipartit per a cap $k \geq 2$ perquè té cicles de longitud senar. Per exemple, el cicle $x_1 y_1 y_2 x_1$. Per tal de fer-lo bipartit cal eliminar tots els cicles de longitud senar. Quin és el nombre mínim d'arestes que cal suprimir depèn de k.*

- *Si* $k = 4$*, el graf conté* 4 *cicles de longitud senar que no comparteixen cap aresta, que són els cicles* $x_i y_{2i-1} y_{2i} x_i$ *per a tot* $i = 1, 2, 3, 4$*. Per tant, cal eliminar-ne almenys* 4*, una de cadascun d'aquests cicles. A més, si eliminem les* 4 *arestes* $x_1y_1, x_2y_4, x_3y_5, x_4y_8$*, ja queden només cicles de longitud parella. Per tant, el mínim d'arestes que cal suprimir en aquest cas és* 4*. Suprimint les arestes indicades, els subconjunts* $V_1 = \{x_1, x_3, y_1, y_3, y_5, y_7\}$ *i* $V_2 = \{x_2, x_4, y_2, y_4, y_6, y_8\}$ *defineixen una partició del conjunt de vèrtexs en parts estables respecte de les adjacències.*
- *Si* $k = 3$*, aleshores el graf conté* 4 *cicles de longitud senar que no comparteixen cap aresta, que són els* 3 *cicles d'abans* $x_i y_{2i-1} y_{2i} x_i$ *per a tot* $i = 1, 2, 3$*, més el cicle* $x_1x_2x_3x_1$*. Per tant, cal eliminar-ne almenys* 4*, una de cadascun d'aquests cicles. A més, si eliminem les* 4 *arestes de la forma* x_1y_1, x_2y_4, x_3y_5 *i l'aresta* x_1x_3*, ja queden només cicles de longitud parella. Per tant, el mínim en aquest cas també és* 4*. Suprimint les arestes indicades, els subconjunts* $V_1 = \{x_1, x_3, y_1, y_3, y_5\}$ *i* $V_2 = \{x_2, y_2, y_4, y_6\}$ *defineixen una partició del conjunt de vèrtexs en parts estables respecte de les adjacències.*