1. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal entre espais vectorials.

   (a) [0.5 punts] Doneu la definició de la matriu associada a f en unes bases $B_E = \{b_1, \dots, b_n\}$ i $B_F = \{w_1, \dots, w_m\}$ de E i F, respectivament.

   (b) [1.5 punts] Demostreu que l'antiimatge del vector zero de F és un subespai de E.

   Solució.

   (a) És la matriu que té per columnes els vectors de coordenades de les imatges per f dels vectors de B_E en la base B_F.

   (b) Es tracta de provar que el nucli de f és un subespai. Hem de veure que és no buit i que és tancat per sumes i per producte per escalars. És no buit perquè conté almenys el vector 0_E (tota aplicació lineal envia el zero al zero). Siguin $v, v' \in \mathrm{Ker}(f)$, de manera que $f(v) = f(v') = 0_F$. Usant la linealitat de f deduïm que

   $$f(v + v') = f(v) + f(v') = 0_F + 0_F = 0_F.$$

   Per tant, $v + v' \in \mathrm{Ker}(f)$ i el nucli és tancat per sumes. Anàlogament, si $v \in \mathrm{Ker}(f)$, de $f(v) = 0_F$ i de la linealitat de f deduïm que per a qualsevol escalar λ és té que

   $$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0_F = 0_F.$$

   Per tant, $\lambda v \in \mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Ker}(f)$ també és tancat per producte per escalars.

2. Considerem el subespai $F_a = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$ de $M_2(\mathbb{R})$, amb $a \in \mathbb{R}$.

   (a) [1 punt] Trobeu el valor de a per al qual F_a és de dimensió 2.

   (b) [1 punt] Sigui $a = a_0$ el valor de a obtingut a l'apartat anterior. Trobeu les condicions, en la forma d'un sistema d'equacions lineals homogeni en x, y, z, t, per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de F_{a_0}.

   (c) [1 punt] Raoneu que $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ i $B' = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ són bases de F_{a_0}.

   (d) [1 punt] Calculeu la matriu canvi de base $P^B_{B'}$.

   Solució.

   (a) Com que els dos primers generadors no són proporcionals i, per tant, són linealment independents, la dimensió de F és com a mínim 2. Cal buscar, doncs, per a quin, o quins, valors de a els tres vectors són linealment dependents, que en aquest cas vol dir que la matriu que té per columnes els corresponents vectors de coordenades en base canònica és de rang 2. Escalonant aquesta matriu dóna:

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & (a-4)/3 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Per tant, la dimensió de F és 2 si i només si $a = -1$.

   (b) La matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de F_{-1} si i només si és combinació lineal dels dos primers generadors, que per l'apartat anterior sabem que són una base de F_{-1}. Per tant, busquem les condicions de compatibilitat del sistema d'equacions corresponent a l'equació matricial

   $$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. del sistema d'equacions en λ, μ

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ 0 &= z \\ 2\lambda + \mu &= t \end{aligned}$$

Per a trobar-les escalonem la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & (y-2x)/3 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t-y \end{array}\right)$$

El sistema és compatible, doncs, si $t - y = 0$ *i* $z = 0$.

(c) A l'apartat (a) ja hem vist que B *és família linealment independent i que genera* F_{-1} *perquè el tercer generador n'és combinació lineal. Per tant, és base de* F_{-1}*. Per tal de provar que els vectors de* B' *també formen una base, com que no són proporcionals i, per tant, linealment independents, i* F_{-1} *sabem que és de dimensió 2, només cal comprovar que són tots dos de* F_{-1}*. Això ho veiem comprovant simplement que els seus coeficients satisfan les dues equacions de l'apartat anterior.*

(d) Les columnes de $P_{B'}^{B}$ *són els vectors de coordenades dels vectors de* B *en la base* B'*. Per tant, busquem l'expressió de les dues matrius de* B *com a combinació lineal de les de* B'*. L'equació matricial*

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) + \mu \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

equival al sistema d'equacions en λ, μ

$$\begin{aligned} 2\mu &= 1 \\ \lambda + \mu &= 2 \\ 0 &= 0 \\ \lambda + \mu &= 2 \end{aligned}$$

la solució del qual és $\mu = 1/2$ *i* $\lambda = 3/2$*. Per altra banda, l'equació matricial*

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) + \mu \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

equival al sistema d'equacions en λ, μ

$$\begin{aligned} 2\mu &= -1 \\ \lambda + \mu &= 1 \\ 0 &= 0 \\ \lambda + \mu &= 1 \end{aligned}$$

la solució del qual és $\mu = -1/2$ *i* $\lambda = 3/2$*. Per tant, la matriu buscada és*

$$P_{B'}^{B} = \left(\begin{array}{cc} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x - 12y - 4z \\ y \\ -6y - z \end{array}\right).$$

   (a) [0.5 punts] Trobeu la matriu associada a f en base canònica.

(b) [1 punt] Calculeu el nucli i la imatge de f, donant-ne la dimensió i una base en cada cas, i determineu si f és injectiva i/o exhaustiva.

(c) [1.5 punts] Calculeu l'antiimatge del subespai $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

(d) [1 punt] Determineu si f és diagonalitzable i, en cas que ho sigui, doneu la matriu diagonal.

Solució. *(a) Aplicant la definició de f obtenim que*

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f en base canònica és

$$M_{B_c}^{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) El nucli ve donat pel conjunt de solucions del sistema d'equacions lineals homogeni de matriu la matriu anterior (són els vectors que s'apliquen per f al zero). Escalonant la matriu ampliada corresponent s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

de manera que el sistema és compatible determinat i la única solució és el vector zero. Per tant, el nucli de f és de dimensió zero i no té base. Això ja ens diu que f és injectiva (correspon a què el rang de $M_{B_c}^{B_c}(f)$ sigui 3, que és la dimensió de l'espai de partida). Per altra banda, la imatge és el subespai generat pels vectors imatge de la base i, per tant, per les tres columnes de la matriu de f. Com que hem vist que aquesta matriu és de rang 3, deduïm que la imatge és de dimensió 3 i, per tant, tot $\mathbb{R}^3$. Una base és qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ (la donada per les columnes de f, la canònica o qualsevol altra). D'aquí també deduïm que f és exhaustiva i, per tant, bijectiva.

(c) Per tal de trobar l'antiimatge del subespai que ens donen només cal trobar l'antiimatge del generador, ja que l'antiimatge de qualsevol múltiple seu serà el mateix múltiple de la seva antiimatge per linealitat. Per trobar l'antiimatge del generador cal resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Escalonant la matriu ampliada dóna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

la solució del qual, fent marxa enrere (és sistema compatible determinat), és el vector $\begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$. Per tant,

$$f^{-1}\left(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle\right) = \langle \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle.$$

(d) El polinomi característic de f és

$$c_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -12 & -4 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & -6 & -1-x \end{vmatrix} = -(1-x)^2(1+x),$$

la qual cosa vol dir que hi ha dos VAPs, $\lambda_1 = 1$ *de multiplicitat algebraica* $m_1 = 2$ *i* $\lambda_2 = -1$ *de multiplicitat algebraica* $m_2 = 1$. *Per tal de determinar si* f *diagonalitza només cal veure si la multiplicitat geomètrica de* λ_1 *també és 2 o no, i això vol dir calcular la dimensió del corresponent subespai propi, és a dir, del nucli de* $f - Id$. *Aquest ve donat pel conjunt de solucions del sistema*

$$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema escalonat equivalent és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, té 2 graus de llibertat, així que la multiplicitat geomètrica de λ_1 *és efectivament 2 i* f *diagonalitza. La matriu diagonal serà, agafant la base de vectors propis ordenada de la manera adient*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$