JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. [2 punts] Siguin u i v vèrtexs diferents d'un graf G. Demostreu que si G conté un $u-v$ recorregut de longitud k, aleshores conté un $u-v$ camí de longitud com a molt k.

2. (a) Sigui G un arbre amb un nombre senar de fulles i tal que el seu complementari és eulerià.
      (i) [0.75 punts] Proveu que G és d'ordre parell.
      (ii) [0.75 punts] Proveu que G té un nombre senar de vèrtexs de grau ≥ 3.
   (b) [1 punt] Proveu que si un graf G té algun vèrtex de grau senar aleshores existeix un $u-v$ camí a G, amb u, v dos vèrtexs diferents de grau senar.
   (c) [1.5 punts] Sigui G un graf connex d'ordre n i mida m. Proveu que G conté almenys $m-n+1$ subgrafs cicle diferents.

3. Donat un enter $k \geq 3$, sigui $G_k = (V_k, A_k)$ el graf amb conjunt de vèrtexs

$$V_k = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}$$

   i conjunt d'arestes A_k definides per les adjacències següents:

$$\begin{aligned}
&x_i \sim x_{i+1}, \text{ per a } 1 \leq i < k;\\
&x_k \sim x_1;\\
&y_i \sim y_{i+1}, \text{ per a } 1 \leq i < k;\\
&y_k \sim y_1;\\
&x_i \sim y_i, \text{ per a } 1 \leq i \leq k.
\end{aligned}$$

   (a) [1 punt] Dibuixeu els grafs G_3 i G_4. Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G_k en funció de k.
   (b) [1 punt] És G_k hamiltonià? I 2-connex?
   (c) [1 punt] Doneu l'arbre generador de G_6 obtingut aplicant l'algoritme BFS a partir del vèrtex x_1 i triant els vèrtexs d'acord amb l'ordre $x_1, \ldots, x_6, y_1, \ldots, y_6$. Calculeu el diàmetre d'aquest arbre generador.
   (d) [1 punt] Sigui G'_k el graf que s'obté en afegir un nou vèrtex z i fer-lo adjacent a tots els vèrtexs de G_k. És G'_k eulerià?

Solució.

1. Es fa per inducció sobre k.

   Pas base. Si $k = 1$, el $u - v$ recorregut només passa pels vèrtexs u i v, per tant és un camí.

   Pas inductiu. Suposem que si G conté un $u - v$ recorregut de longitud l, amb $1 \geq l < k$, llavors conté un $u - v$ camí de longitud $\leq l$ (hipòtesi inducció). Veiem aleshores que si conté un $u - v$ recorregut de longitud k també conté un $u - v$ camí de longitud $\leq k$. Sigui $R = x_0 x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_k$ un $u - v$ recorregut de longitud $k > 1$. Si tots els vèrtexs són diferents, és un camí i no hi ha res a provar. Altrament, existeixen dos enters i, j, amb $0 \leq i < j \leq k$, tals que $x_i = x_j$. El $u - v$ recorregut $R' = x_0 x_1 \cdots x_i x_{j+1} \cdots x_k$ és de longitud s estrictament menor que k. Per hipòtesi d'inducció, hi ha un $u - v$ camí a G de longitud $leqs$, per tant, de longitud $< k$.

2. (a) Sigui G un arbre amb un nombre senar de fulles i tal que el seu complementari és eulerià.

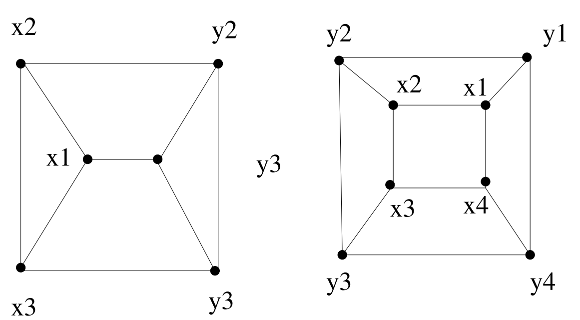
   (i) Sigui n l'ordre de l'arbre, i sigui u una fulla. Aleshores el seu grau al complementari és $g_{G^c}(u) = n - 2$, i sabem que és parell, ja que el complementari és eulerià. Per tant, n és parell.

   (ii) Observem primer que G no pot tenir vèrtexs de grau 2. En efecte, si v és un tal vèrtex, el seu grau a G^c seria $g_{G^c}(v) = n - 1 - g_G(v)$ seria senar perquè hem vist que n és parell, i això no pot ser perquè G^c és eulerià, així que tots els graus han de ser parells. Per tant, el nombre de vèrtexs de grau ≥ 3 és l'ordre n de G, un parell, menys el nombre de fuloles, per hipòteis un senar. Per tant, és un nombre senar.

   (b) Suposem que G té un vèrtex u de grau senar, i considerem el component connex de u. Com que el nombre de vèrtexs de grau senar de qualsevol graf és parell, deduïm que aquest component connex ha de tenir almenys un altre vèrtex de grau senar, diguem-li v. Per tant, a G es té un $u - v$ camí, amb u i v de grau senar.

   (c) Com que G és connex, existeix un arbre generador T de G, la mida del qual serà $n - 1$ i tindrem que $m \geq n1$. Si $m = n - 1$, aleshores $G = T$ és directament un arbre i no té cap cicle, i el nombre de cicles coincideix amb $m - n + 1 = n - 1 - n + 1 = 0$. Considerem el cas $m > n - 1$. En un arbre e sabem que l'addició d'una aresta crea exactament un cicle. Així cadascuna de les $m - (n - 1)$ arestes diferents de G que no són de T pertany a un cicle diferent de G. Per tant, el nombre de cicles és $\geq m - (n - 1) = m - n + 1$.

3. (a) Els grafs G_3 i G_4 són els següents:



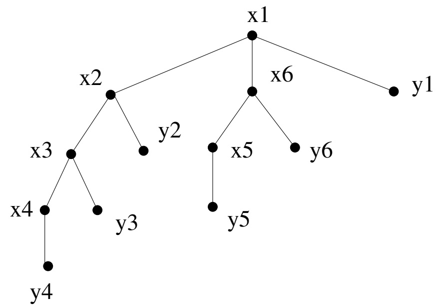
   En general, G_k és un "prisma" amb bases dos cicles C_k i amb els vèrtexs corresponents de cada cicle adjacents. Per tant, l'ordre és $2k$, la mida és $3k$ i tots els graus són 3, i.e. G_k és 3-regular.

   (b) És hamiltonià. Un cicle hamiltonià és, per exemple, el cicle

$$x_1 x_2 \cdots x_k y_k y_{k-1} \cdots y_1 x_1$$

És 2-connex, i.e. no té vèrtexs de tall, ja que tot graf hamiltonià és 2-connex.

(c) L'arbre generador que s'obté és el següent:



El seu diàmetre és 7, essent els dos vèrtexs y_4, y_5 a distància 7.

(d) G'_k és connex. Per anar de qualsevol vèrtex u a qualsevol v sempre es pot fer passant per z, i z és adjacent a tots els vèrtexs (llevat d'ell mateix). Per altra banda, el grau de z és $2k$ i la resta de vèrtexs, com que a G_k tenien grau 3 i ara són a més adjacents a z, són de grau 4. Per tant, tots els vèrtexs són de grau parell i G'_k és eulerià.