Matemàtiques 1 - FIB | 17-1-2017
Examen Final F2 | Àlgebra lineal

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. [2 punts] Siguin E i F dos espais vectorials, $f\colon E \to F$ una aplicació lineal.
   (a) Digueu què ha de satisfer f per tal de ser una aplicació lineal.
   (b) Proveu que f està unívocament determinada per la imatge d'una base qualsevol $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de E.

2. Considereu l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ dels polinomis de grau menor o igual a 2 i amb coeficients reals.
   (a) [1.5 punts] Proveu que $B = \{-1 + 2x + 3x^2, x - x^2, x - 2x^2\}$ és una base de $P_2(\mathbb{R})$ i calculeu la matriu de canvi de base de base canònica a base B.
   (b) [0.5 punts] Trobeu les coordenades de $p(x) = 3 - x + 2x^2$ en la base B.
   (c) [1 punt] Sigui $F = \langle 3 - x + 2x^2, 1 + x, 8 + 4x^2\rangle$. Trobeu la dimensió i una base de F, i completeu la base de F a una base de $P_2(\mathbb{R})$ en cas que no ho sigui.
   (d) [1 punt] Trobeu la condició o condicions que han de satisfer els coeficients d'un polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2$ per tal que sigui de F.

3. (a) Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   (i) [1 punt] Utilitzant que f és lineal, deduïu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
   (ii) [1 punt] Trobeu la dimensió i una base de $\mathrm{Ker}(f)$. És f exhaustiva?

   (b) [2 punts] Esbrineu si és diagonalitzable l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té per matriu en base canònica

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Informacions:

- La durada de l'examen és de 2h15m.
- Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full o fulls diferents i escriviu amb tinta negra o blava.
- Si us cal, podeu utilitzar un apartat per tal de respondre'n un altre encara que el primer no l'hàgiu fet.
- Les notes es publicaran al Racó el dia 23 de gener i la revisió serà el dia 24 de gener a les 9h30 (l'aula s'anunciarà quan es publiquin les notes).

Solució.

(1) (a) f és lineal si preserva sumes i porductes per escalars, és a dir, per a tot parell de vectors $u, v \in E$ i tot escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, s'ha de complir

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

(b) Si coneixem $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$, podem deduir la imatge de qualsevol altre vector $v \in E$ expressant-lo com a combinació lineal dels vectors de la base $\{b_1, \dots, b_n\}$ i utilitzant que f és lineal. Així, si $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, per les propietats de linealitat de f es té que

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) \\ &= f(\lambda_1 b_1) + \cdots + f(\lambda_n b_n) \\ &= \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n), \end{aligned}$$

on a la segona igualtat utilitzem que f preserva sumes i a la tercera que preserva el producte per escalars.

(2) (a) Com que $P_2(\mathbb{R})$ és de dimensió 3, només cal veure que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una família linealment independent (qualsevol família linealment independent de n vectors en un espai de dimensió n també és automàticament conjunt de generadors i, per tant, base). Per tal de veure que són LI comprovem que el rang de la matriu que té els coeficients de cada polinomi per columnes és 3. La matriu és

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és efectivament de rang 3.

La matriu $P_B^{B_c}$ de canvi de base canònica a base B és la inversa de $P_{B_c}^B$, que és la matriu que té per columnes els components de B en base B_c. Aquesta és la matriu anterior, així que només cal calcular la matriu inversa de l'anterior. Apliquem mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu demanada és

$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Només cal utilitzar la matriu canvi de base anterior: les coordenades en la base B s'obtenen multiplicant les coordenades en base canònica per la matriu $P_B^{B_c}$ per l'esquerra. Per tant, són

$$P_B^{B_c}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -16 \end{pmatrix}$$

(c) Per trobar la dimensió, s'ha de calcular el rang de la matriu que té els coeficients dels polinomis per columnes (ens dóna el nombre màxim de vectors LI). Apliquem mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant F és de dimensió 2, i una base de F és la formada pels dos primers generadors ja que els pivots han quedat a les dues primeres columnes, i.e. $\{3 - x + 2x^2, 1 + x\}$.

Per tal de completar-la a una base de tot $P_2(\mathbb{R})$ només cal afegir el polinomi de la base canònica x^2 ja que la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és de rang 3. Alternativament, es poden escriure els coeficients dels dos polinomis base de F com a files d'una matriu, escalonar i completar amb el vector de la base canònica que faci de la nova matriu 3×3 una de rang 3.

(d) Per tal de ser de F, han de ser combinació lineal de la base de F, i això correspon a què sigui compatible el sistema d'equacions equivalent a la condició

$$a_0 + a_1 + a_2x^2 = \lambda(3 - x + 2x^2) + \mu(1 + x)$$

amb λ, μ com a incògnites. Aquest és el sistema 3×2 de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & a_0 \\ -1 & 1 & a_1 \\ 2 & 0 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -a_1 \\ 2 & 0 & a_2 \\ 3 & 1 & a_0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -a_1 \\ 0 & 2 & a_2 + 2a_1 \\ 0 & 4 & a_0 + 3a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -a_1 \\ 0 & 1 & (a_2 + 2a_1)/2 \\ 0 & 0 & a_0 - a_1 - 2a_2 \end{array}\right)$$

Per tant, la condició de compatibilitat del sistema és que $a_0 - a_1 - 2a_2 = 0$, i aquesta és la condició que ha de satisfer el polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2$ per ser de F.

(3) (a) (i) Utilitzant la linealitat de f i la tercera condició tenim que

$$2f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Utilitzant ara la segona condició i la linealitat tenim que

$$-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix},$$

i per tant

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Finalment, utilitzant la tercera condició tenim que

$$2f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$$

i per tant

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f en base canònica és

$$\begin{pmatrix}0&2&-2\\1&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$$

(ii) El nucli és el subespai de solucions del sistema d'equacions homogeni

$$\begin{pmatrix}0&2&-2\\1&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i la seva dimensió és el nombre de graus de llibertat del sistema. Escalonant la matriu del sistema s'obté

$$\begin{pmatrix}0&2&-2\\1&-1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Per tant, la dimensió de $\mathrm{Ker}(f)$ és 1, i una base ve donada per qualsevol solució no nul·la del sistema, que és equivalent a

$$\begin{aligned}x-y+2z&=0\\y-z&=0\end{aligned}\tag{1}$$

la solució general del qual és $x=-z$ i $y=z$, amb z qualsevol. Fent $z=1$ tenim que

$$\mathrm{Ker}(f)=\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle.$$

L'aplicació no és exhaustiva. De fet, la dimensió de la imatge, que és el rang de la matriu de f, és 2, així que f és una aplicació que envia tot $\mathbb{R}^3$ a un pla que passa per l'origen.

(b) Calculem primer el polinomi característic.

$$c_f(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ 1 & -1-x & 2 \\ 1 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2x^2 - x = -x(x-1)^2.$$

Els VAP's de f són les arrels de $c_f(x)$ i, per tant, són $\lambda_1 = 0$, de multiplicitat algebraica 1, i $\lambda_2 = 1$, de multiplicitat algrebraica 2. Per tal de saber si diagonalitza, només cal calcular la dimensió del subespai E_2 de VEPs de VAP $\lambda_2 = 1$. Aquest subespai és el conjunt de solucions del sistema d'equacions lineals homogeni

$$(M(f) - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i la seva dimensió és el nombre de graus de llibertat del sistema. La matriu del sistema és

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, E_2 és de dimensió 2 i f diagonalitza.