Probabilitat i Estadística 1
Grau de Ciència i Enginyeria de Dades
Problemes Tema 1

1 Espais de Probabilitat

1.1 Espais de probabilitat finits.

1. En cadascun dels experiments següents, determineu l'espai mostral (o conjunt de resultats):
   (a) Triem una família de tres fills i anotem els sexes dels fills ordenats per edats.
   (b) En un procés de fabricació, triem quatre peces i anotem si cada peça és defectuosa o no.
   (c) Obrim un llibre per qualsevol pàgina i comptem el nombre d'errors d'impremta.
   (d) D'una baralla de 52 cartes n'extraiem dues amb reemplaçament.
   (e) La mateixa situació que a 1d però sense reemplaçament.

2. Si els esdeveniments A i B són disjunts, sota quines condicions A^c i B^c són disjunts?

   Resultat: $A \cup B = \Omega$

3. Considerem dos esdeveniments A i B tals que $\mathrm{P}(A) = 0.4$ i $\mathrm{P}(B) = 0.7$. Determineu els possibles valors que pot prendre $\mathrm{P}(A \cap B)$.

   Resultat: $0.1 \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq 0.4$

4. En una capsa tenim 12 cargols, dels quals 5 són defectuosos. En triem 3 a l'atzar, sense reemplaçament. Calculeu la probabilitat de treure'n exactament un de defectuós.

   Resultat: 0.4772727

5. Una urna conté 100 boles, de les quals r són vermelles. Suposem que les boles són seleccionades a l'atzar d'una en una i sense reemplaçament. Calculeu:
   (a) la probabilitat que la primera bola sigui vermella;
   (b) la probabilitat que l'última bola sigui vermella;
   (c) la probabilitat que la bola 50 sigui vermella.

   Resultat: (a) $r/100$ (b) $r/100$ (c) $r/100$

6. Es tiren tres daus n vegades. Calculeu la probabilitat $f(n)$ de que en alguna tirada hagin sortit tres sisos. Quin és el valor menor de n pel qual és més probable que hagin sortit tres sisos alguna de les n tirades que el contrari? (Una pregunta a De Moivre)

   Resultat: 150

7. (El problema dels aniversaris). Determinar la probabilitat de que en un grup de k persones (amb $2 \leq k \leq 365$) hi hagin dues persones que facin l'aniversari el mateix dia. Suposarem que no hi ha bessons en aquest grup i que qualsevol dia de l'any és igualment probable.

   Resultat: $1 - (365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1))/365^k$

8. (El problema dels empats). Suposem que posem en fila totes les cartes d'un joc de n cartes. Disposem també d'un altre joc similar de n cartes. Les barregem i posem una carta al damunt de cada una de les cartes anteriors. Quina és la probabilitat P_n de que hi hagi almenys una coincidència?

   Resultat: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$

9. En una ciutat d'$n + 1$ habitants una persona fabrica un bitllet fals i el dóna a una segona persona, la qual el dóna a una tercera i així successivament. A cada etapa, l'individu al qual se li dóna el bitllet fals s'escull a l'atzar. Suposant que el bitllet s'hagi donat r vegades calculeu:

(a) la probabilitat que no retorni mai al falsificador;

(b) la probabilitat que no retorni mai a la mateixa persona.

Resultat: (a) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}$ (b) $\frac{n!}{(n-r)!n^r}$

10. Un número binari està compost dels dígits 0 i 1 (per exemple 1011, 11000.) Suposeu que un número binari està format per n dígits. Suposeu que la probabilitat que aparegui un dígit incorrecte és p i que els errors en dígits diferents són independents l'un de l'altre. Quina és la probabilitat de formar un número incorrecte?

Resultat: $1-(1-p)^n$

11. Proveu que no és possible carregar dos daus de forma que la suma de les seves cares superiors pugui prendre qualsevol valor de 2 a 12 amb igual probabilitat.

12. Proveu que, si es llença dues vegades una moneda que té probabilitat de cara p fins que surten dos resultats diferents, els dos possibles resultats ($C+$ i $+C$) són equiprobables.

1.2 Independència i probabilitat condicionada

13. Els esdeveniments $A_1, \ldots, A_k$ formen una partició de Ω. Per cada $i = 1, \ldots, k$, sigui $\mathrm{P}(A_i)$ la probabilitat a priori de A_i. Sigui B un altre esdeveniment tal que $\mathrm{P}(B) > 0$ i denotem per $\mathrm{P}(A_i|B)$ la probabilitat a posteriori de A_i donat que l'esdeveniment B ha ocorregut. Demostreu que si $\mathrm{P}(A_1|B) < \mathrm{P}(A_1)$, aleshores $\mathrm{P}(A_i|B) > \mathrm{P}(A_i)$ per al menys un valor de i ($i = 2, \ldots, k$).

14. Una capsa conté n boles blanques i m de negres. Escollim una bola a l'atzar, n'observem el color i la retornem a la capsa afegint-hi k boles del mateix color que l'observada. Repetim el procés tres cops més. Calculeu la probabilitat que les tres primeres boles escollides siguin blanques i la quarta negra.

Resultat: $\frac{n}{n+m} \cdot \frac{n+k}{n+m+k} \cdot \frac{n+2k}{n+m+2k} \cdot \frac{m}{n+m+3k}$

15. Suposem que A és un esdeveniment tal que $\mathrm{P}(A) = 0$ i B és un altre esdeveniment qualsevol. Demostreu que A i B són independents.

16. Si A i B són independents i si $P(B) < 1$, quin és el valor de $P(A^c|B^c)$?

Resultat: $P(A^c)$

17. Els esdeveniments A i B són independents i A també és independent de C. És cert que A és independent de $B \cup C$?

Resultat: No és cert en general.

18. Tirem un dau n vegades i diem $A_{i,j}$, $i < j$, l'esdeveniment 'les tirades i i j han donat el mateix resultat'. Són independents $A_{i,j}$ i $A_{i',j'}$? Són mútuament independents tots els esdeveniments $A_{i,j}, 1 \le i < j \le n$?

Resultat: Són independents 2 a 2, però no són mútuament independents.

19. Disposem d'una moneda trucada (amb probabilitat de cara = 2/3) i de dues monedes perfectes. Escollim una d'aquestes monedes a l'atzar, la llencem a l'aire sis vegades i observem 4 cares i 2 creus. Quina és la probabilitat d'haver escollit la moneda trucada?.

Resultat: 0.412

20. Sabem que una urna conté 4 boles blanques i 4 de negres. N'extraiem 4 i les posem en una altra urna. Agafem una bola d'aquesta urna i és negra. Trobar la probabilitat que la propera bola que s'agafi de la segona urna sigui blanca.

Resultat: 4/7

21. (Falsos positius en proves clíniques). En aplicar un test per a detectar un tipus de càncer a una persona que el té, la probabilitat de donar positiu és 0.95 i la de donar negatiu 0.05. Si s'aplica a una persona que no el té, dóna positiu amb probabilitat 0.04 i negatiu amb probabilitat 0.96. Suposem que a la població, una persona de cada 100, 000 té aquest càncer. En seleccionem una a l'atzar i, en aplicar-li aquest test, dóna positiu. Calculeu la probabilitat que tingui aquest tipus de càncer.

Resultat: 0.000237446

22. (Preguntes indiscretes). Es demana a un grup d'estudiants si han copiat a algun examen. Els estudiants responen tirant una moneda, diuen la veritat si surt cara i, si surt creu, tornen a tirar la moneda i responen 'sí' si surt cara i 'no' si surt creu. Amb aquest procediment s'obtenen un 70% de respostes afirmatives. Quina és la probabilitat que un estudiant hagi copiat algun examen? Quina és aquesta probabilitat si ha contestat 'sí'?

Resultat: 0.9; 0.9642857

23. (Dilema del presoner) Tres presoners són informats que un, que ha estat triat a l'atzar, serà alliberat i els altres dos executats. Un d'ells, A, demana al carceller quin dels altres dos, B o C, serà executat. El carceller respon la pregunta triant un dels dos a l'atzar si ho han de ser tots dos, o dient la veritat si només és un. Afecta aquesta informació la probabilitat que A sigui l'alliberat?

Resultat: No.

1.3 Àlgebres d'esdeveniments

24. Considerem els esdeveniments $\{1\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}$ corresponents a l'espai de probabilitat associat al llençament d'un dau. Determineu la menor σ–àlgebra d'esdeveniments que els conté i calculeu-ne la probabilitat de cadascun.

25. Proveu que, si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són σ–àlgebres del conjunt Ω aleshores $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ també és una σ–àlgebra.

26. La σ–àlgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ és la σ–àlgebra generada pels intervals oberts (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$. Proveu que és la mateixa σ–àlgebra que la generada pels intervals de la forma $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.