# Probabilitat i Estadística 1

## Problemas Tema 8. Contrastes de hipótesis

1. In order to ensure efficient usage of a server, it is necessary to estimate the mean number of concurrent users (that at a given moment can be assumed to be normally distributed). According to records, the average number of concurrent users at 100 randomly selected times is 37.7, with a known standard deviation $\sigma = 9.2$. At the 1% significance level, do these data provide significant evidence that the mean number of concurrent users is greater than 35?

   *Resultat:* Sí.

   *Resolució:*
   Definimos la variable aleatoria $X$ como el número de usuarios conectados simultáneamente en un instante dado, que supondremos normal, siguiendo la indicación del enunciado. Sean $\mu$ y $\sigma^2$ su esperanza y su varianza. Por el enunciado sabemos que $\sigma^2 = 9.2^2$.
   Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

   $$\begin{cases} H_0 : \mu = 35 \\ H_1 : \mu > 35 \end{cases}$$

   Sea $\mu_0 = 35$. El estadístico del test será

   $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

   que, bajo $H_0$, se distribuye $N(0,1)$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la derecha, la región crítica con nivel de significación $\alpha = 0.01$ será

   $$\mathcal{R} \equiv [z_\alpha = 2.326348, \infty).$$

   Calculemos el valor del estadístico del test para la muestra observada:

   $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{37.7 - 35}{9.2/\sqrt{100}} = 2.934783.$$

   Como $z = 2.934783 \in \mathcal{R}$, rechazamos $H_0$ a nivel 1%.

2. Salaries of entry-level computer engineers have Normal distribution with unknown mean and variance. Three randomly selected computer engineers have salaries (in \$1000s):

   $$30, 50, 70$$

   Does this sample provide a significant evidence, at a 10% level of significance, that the average salary of all entry-level computer engineers is different from \$80,000? Explain.

   *Resultat:* No.

   *Resolució:*
   Definimos la variable aleatoria $X$ como el salario (en miles de dólares) de un ingeniero informático que acaba de entrar en su primer empleo. $X$ es normal esperanza $\mu$ y varianza $\sigma^2$ desconocidas.
   Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

   $$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu \neq 80 \end{cases}$$

   Aplicaremos el test basado en el estadístico $t$ con nivel de significación $\alpha = 0.1$. Sea $\mu_0 = 80$. Sea $S$ la raíz cuadrada de la varianza muestral. El estadístico del test será

   $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

que, bajo $H_0$, se distribuye $t_{n-1} \equiv t_2$. Como se trata de un contraste bilateral, la región crítica a nivel $\alpha = 0.1$ será

$$\mathcal{R} \equiv (-\infty, -t_{2,0.05}] \cup [t_{2,0.05}, \infty) = (-\infty, -2.919986] \cup [2.919986, \infty)$$

El valor 2.919986 lo hemos obtenido con el comando d R `qt(1-.05,df=2)`. Calculemos el valor del estadístico del test para la muestra observada, para la cual la media muestral vale $\bar{x}_n = 50$ y

$$S^2 = \frac{1}{3-1}\left((30-50)^2 + (50-50)^2 + (70-50)^2\right) = 400.$$

Entonces

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{50 - 80}{20/\sqrt{3}} = -2.598076.$$

Como $t = -2.598076 \notin \mathcal{R}$, no rechazamos $H_0$ a nivel 10%.

3. We have to accept or reject a large shipment of items. For quality control purposes, we collect a sample of 200 items and find 24 defective items in it. The manufacturer claims that at most one in 10 items in the shipment is defective. At the 4% level of significance, do we have sufficient evidence to disprove this claim? Do we have it at the 15% level?

*Resultat:* No. No.

*Resolució:*
Sea $X \sim B(n,p)$ con $n = 200$. Sea $\hat{p} = X/n$ la proporción muestral. Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases}$$

con nivel de significación $\alpha = 0.04$. Sea $p_0 = 0.1$. El estadístico del test será

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

que, si $p = p_0$ (el valor que separa la hipótesis nula de la alternativa), tiene una distribución aproximada $N(0,1)$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la derecha, la región crítica a nivel $\alpha = 0.04$ será

$$\mathcal{R}_{0.04} \equiv [z_\alpha = 1.750686, \infty).$$

Para $\alpha = 0.04$ el valor de $z_\alpha$ se obtiene en R así:

```
alpha <- 0.04
qnorm(1 - alpha)
1.750686
```

Calculemos el valor del estadístico del test para la muestra observada, en la que se ha observado el valor $x = 24$ de $X$. Así la proporción muestral observada es

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{24}{200} = 0.12,$$

y el valor observado del estadístico del test es

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.12 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{200}}} = 0.942809.$$

Como $z = 0.942809 \notin \mathcal{R}_{0.04}$, no rechazamos $H_0$ a nivel 4%.
Trabajemos ahora con nivel de significación $\alpha = 0.15$. Buscamos el valor de $z_\alpha$ con R:

```
alpha <- 0.15
qnorm(1 - alpha)
1.036433
```

La región crítica a nivel $\alpha = 0.15$ será

$$\mathcal{R}_{0.15} \equiv [z_\alpha = 1.036433, \infty).$$

De nuevo $z = 0.942809 \notin \mathcal{R}_{0.15}$, y tampoco rechazamos $H_0$ a nivel 15%.

4. Refer to Exercise 3. Having looked at the collected sample, we consider an alternative supplier. A sample of 150 items produced by the new supplier contains 13 defective items. Is there significant evidence that the quality of items produced by the new supplier is higher than the quality of items in Exercise 3? What is the $p$-value?

*Resultat:* $p$-value= 0.1580

*Resolució:*
Sea $X \sim B(n = 200, p_1)$ el número de piezas defectuosas en el lote del proveedor habitual a las que se hace referencia en el problema 3 (recordemos que se observó un valor $x = 24$ de $X$). Sea $Y \sim B(m = 150, p_2)$ el número de piezas defectuosas en el lote del nuevo proveedor (se ha observado un valor $y = 13$ de $Y$).
Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

El enunciado no especifica el nivel de significación $\alpha$ con el que hemos de trabajar, por lo que lo haremos con $\alpha = 0.05$, que es posiblemente la elección más habitual en la práctica.
El estadístico del test será

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

donde

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}$$

es la estimación conjunta de la proporción $p$ de piezas defectuosas que, bajo $H_0$, es común a los dos proveedores. La distribución de $Z$ es aproximadamente $N(0,1)$ bajo $H_0$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la derecha ($H_1 : p_1 - p_2 > 0$), la región crítica a nivel $\alpha = 0.05$ será

$$\mathcal{R} \equiv [z_\alpha = 1.645, \infty).$$

Calculemos el valor del estadístico del test para las dos muestras observadas, para las cuales las proporciones muestrales observadas son

$$\hat{p}_1 = \frac{x}{n} = \frac{24}{200} = 0.12, \; \hat{p}_2 = \frac{y}{m} = \frac{13}{150} = 0.0867,$$

y la estimación conjunta de la proporción poblacional $p$ que postula $H_0$ es

$$\hat{p} = \frac{200\hat{p}_1 + 150\hat{p}_2}{200+150} = \frac{24+13}{200+150} = \frac{37}{350} = 0.1057.$$

El valor observado del estadístico del test es

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{0.12 - 0.0867}{\sqrt{0.1057(1-0.1057)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{150}\right)}} = 1.002748.$$

Como $z = 1.002748 \notin \mathcal{R}$, no rechazamos $H_0$ a nivel 5%.
Calculemos ahora el $p$-valor, definido en este caso como

$$p - \text{valor} = \Pr_{H_0}(Z \geq Z_{obs}) = 1 - \Phi(Z_{obs})$$

donde $Z_{obs}$ es el valor observado del estadístico del test y $\Phi$ es la función de distribución de la $N(0,1)$. En nuestro caso $Z_{obs} = z = 1.002748$ y, por tanto,

$$p - \text{valor} = 1 - \Phi(1.002748) = 1 - \texttt{pnorm}(1.002748) = 0.1579912.$$

5. The number of concurrent users for some internet service provider has always averaged 5000 with a standard deviation of 800. After an equipment upgrade, the average number of users at 100 randomly selected moments of time is 5200. Compute a $p$-value for the right-tail test and state your conclusion about a significant increase in the number of concurrent users. Assume that the standard deviation of the number of concurrent users has not changed.

*Resultat:* $p$-value=0.0062

*Resolució:*
Sea $X$ el número de usuarios simultáneos en un momento elegido aleatoriamente después de la actualización del sistema. Se supone que

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 800^2).$$

y se desea contrastar

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5000 \\ H_1 : \mu > 5000 \end{cases}$$

Se observa una muestra de $X$ de tamaño $n = 100$ (en la cual $\bar{X}$ ha tomado el valor 5200). Sea $\mu_0 = 5000$. El estadístico del test será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que, bajo $H_0$, se distribuye $N(0,1)$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la derecha, el $p$-valor será

$$p - \text{valor} = \Pr_{H_0}(Z \geq Z_{obs}) = 1 - \Phi(Z_{obs})$$

donde $Z_{obs}$ es el valor del estadístico del test para la muestra observada:

$$Z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5200 - 5000}{800/\sqrt{100}} = 2.5.$$

Así,

$$p - \text{valor} = 1 - \Phi(Z_{2.5}) = 1 - \texttt{pnorm}(2.5) = 0.0062.$$

6. An account on server A is more expensive than an account on server B. However, server A is faster. To see if it's optimal to go with the faster but more expensive server, a manager needs to know how much faster it is. A certain computer algorithm is executed 30 times on server A and 20 times on server B with the following results,

| | Server A | Server B |
|---|---|---|
| Sample mean | 6.7 min | 7.5 min |
| Sample standard deviation | 0.6 min | 1.2 min |

Is there significant difference in speed between the two servers?
*Indication:* First, assume equal variances in both servers. Then solve again the problem without this assumption.

(a) Use a confidence interval to conduct a two-sided test at the 5% level of significance.
(b) Compute a $p$-value of the two-sided test in the previous point.
(c) Is server A really faster? How strong is the evidence? Formulate the suitable hypothesis and alternative and compute the corresponding $p$-value.

*Resultat:* (a) $[-1.3151, -0.2849]$, $[-1.3964, -0.2036]$ (b) 0.0030, 0.0106 (c) 0.0015, 0.0053

*Resolució:*
Sea $X \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ el tiempo de ejecución del algoritmo en el servidor $A$. Se ha tomado una muestra de tamaño $n_A = 30$ de $X$. Sea $Y \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ el tiempo de ejecución del algoritmo en el servidor $B$. Se ha tomado una muestra de tamaño $n_B = 20$ de $Y$.
(a) Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

con nivel de significación $\alpha = 0.05$ mediante un intervalo de confianza $1 - \alpha = 0.95$.
**Suponiendo varianzas iguales:** Usaremos la fórmula del intervalo de confianza para la

diferencia de medias en dos muestras independientes de distribuciones normales con varianzas iguales ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_A - \mu_B) &\equiv (\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{n_A+n_B-2,\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \\
&\equiv (6.7 - 7.5) \pm 2.0106 \cdot 0.8874 \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}} \\
&\equiv -0.8 \pm 0.5151 \\
&\equiv [-1.3151, -0.2849].
\end{aligned}
$$

Se ha utilizado el estimador *pooled* de la varianza $\sigma^2$ común a las dos poblaciones,

$$
S_p^2 = \frac{(n_A - 1)S_X^2 + (n_B - 1)S_Y^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{29 \cdot 0.6^2 + 19 \cdot 1.2^2}{29 + 19} = 0.7875 = 0.8874^2,
$$

y el quantil de la $t$ de Student con $n_A + n_B - 2 = 30 + 20 - 2 = 48$ grados de libertad que deja a su derecha una probabilidad $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$:

$$
\texttt{qt}(\texttt{1} - \texttt{0.025}, \texttt{df} = \texttt{48}) = 2.0106.
$$

**Sin suponer varianzas iguales:** Usaremos la fórmula del intervalo de confianza aproximado para la diferencia de medias en dos muestras independientes de distribuciones normales con varianzas distintas ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_A - \mu_B) &\equiv (\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\nu,\alpha/2} \sqrt{\frac{S_X^2}{n_A} + \frac{S_Y^2}{n_B}} \\
&\equiv (6.7 - 7.5) \pm 2.0579 \sqrt{\frac{0.6^2}{30} + \frac{1.2^2}{20}} \\
&\equiv -0.8 \pm 0.5964 \\
&\equiv [-1.3964, -0.2036].
\end{aligned}
$$

Se ha utilizado la aproximación de Satterthwaite, que utiliza la distribución $t$ de Student con grados de libertad estimados

$$
\nu = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_A} + \frac{S_Y^2}{n_B}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n_A^2(n_A-1)} + \frac{S_Y^4}{n_B^2(n_B-1)}} = 25.3989.
$$

El quantil de la $t$ de Student con $\nu = 25.3989$ grados de libertad que deja a su derecha una probabilidad $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$:

$$
\texttt{qt}(\texttt{1} - \texttt{0.025}, \texttt{df} = \texttt{25.3989}) = 2.0579.
$$

Tanto si se suponen varianzas iguales como si no, el valor 0 queda fuera de los intervalos de confianza 95% que hemos construido, por lo que a nivel 5% rechazaremos la hipótesis nula de igualdad de medias de los tiempos de cómputo en ambos servidores.

(b) **Suponiendo varianzas iguales:** El estadístico del test

$$
T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A+n_B-2}
$$

bajo $H_0 : \mu_A = \mu_B$. El valor de $T$ observado ha sido

$$
T_{obs} = \frac{6.7 - 7.5}{0.8874 \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}}} = \frac{-0.8}{0.25617} = -3.1229.
$$

Como se trata de un contraste bilateral, el $p$-valor será

$$p-\text{valor} = 2\,\text{Pr}_{H_0}\left(T \geq |T_{obs}|\right) = 2\,\texttt{pt}(\,-\,|T_{obs}|, \texttt{df} = \texttt{30} + \texttt{20} - \texttt{2})$$
$$= 2\,\texttt{pt}(-\texttt{3.1229}, \texttt{df} = \texttt{48}) = 0.003032547.$$

**Sin suponer varianzas iguales:**
El estadístico del test

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_A} + \frac{S_Y^2}{n_B}}} \approx t_\nu$$

bajo $H_0 : \mu_A = \mu_B$, con el número de grados de libertad $\nu = 25.3989$ estimado antes. El valor de $T$ observado ha sido

$$T_{obs} = \frac{6.7 - 7.5}{\sqrt{\frac{0.6^2}{30} + \frac{1.2^2}{20}}} = \frac{-0.8}{0.2898275} = -2.760262$$

Como se trata de un contraste bilateral, el $p$-valor será

$$p-\text{valor} = 2\,\text{Pr}_{H_0}\left(T \geq |T_{obs}|\right) = 2\,\texttt{pt}(\,-\,|T_{obs}|, \texttt{df} = \nu)$$
$$= 2\,\texttt{pt}(-\texttt{2.760262}, \texttt{df} = \texttt{25.3989}) = 0.01056956.$$

Si se suponen varianzas iguales el $p$-valor del contrastes es menor que 0.01 por lo que concluimos que hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula de igualdad de tiempos medios de cómputo y aceptar que son diferentes. En cambio, si no se hace el supuesto de igualdad de varianzas la evidencia en contra de la hipótesis nula no es tan fuerte (el $p$-valor es ligeramente superior a 0.01).

(c) Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A < \mu_B \end{cases}$$

con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.
**Suponiendo varianzas iguales:**
El estadístico del test es el mismo usado en el apartado anterior:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A+n_B-2}$$

bajo $H_0 : \mu_A = \mu_B$. El valor de $T$ observado ha sido $T_{obs} = -3.1229$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la izquierda, el $p$-valor será

$$p-\text{valor} = \text{Pr}_{H_0}\left(T \leq T_{obs}\right) = \texttt{pt}(-\texttt{3.1229}, \texttt{df} = \texttt{48}) = 0.001516274.$$

Observar que el $p$-valor ahora es la mitad que en el caso del contraste bilateral.
**Sin suponer varianzas iguales:**
El estadístico del test es el mismo usado en el apartado anterior:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_A} + \frac{S_Y^2}{n_B}}} \approx t_\nu$$

bajo $H_0 : \mu_A = \mu_B$, con el número de grados de libertad $\nu = 25.3989$ estimado antes. El valor de $T$ observado ha sido $T_{obs} = -2.760262$. Como se trata de un contraste unilateral con alternativa a la izquierda, el $p$-valor será

$$p-\text{valor} = \text{Pr}_{H_0}(T \leq T_{obs}) = \texttt{pt}(-\texttt{2.760262}, \texttt{df} = \texttt{25.3989}) = 0.005284779.$$

Observar que el $p$-valor ahora es la mitad que en el caso del contraste bilateral.
Tanto si se suponen varianzas iguales como si no, los $p$-valores de los contrastes son menores que 0.01 por lo que concluimos que hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula de igualdad de tiempos medios de cómputo en ambos servidores en favor de la hipótesis alternativa de que el servidor A es más rápido (tiempo esperado de cómupto menor en A que en B).

A continuación se incluye el código que resuelve este problema usando la función `t.test` de R. Para ello primero es necesario *recrear* los datos a partir de los cuales se obtuvieron los estadísticos que aparecen en el enunciado.

```
> #                           & Server A & Server B
> # Sample mean               &  6.7 min &  7.5 min
> # Sample standard deviation &  0.6 min &  1.2 min
> nA <- 30
> mA <- 6.7
> sA <- 0.6
> x <- mA + sA*scale(rnorm(nA))
> c(mA,mean(x))
[1] 6.7 6.7
> c(sA,sd(x))
[1] 0.6 0.6
>
> nB <- 20
> mB <- 7.5
> sB <- 1.2
> y <- mB + sB*scale(rnorm(nB))
> c(mB,mean(y))
[1] 7.5 7.5
> c(sB,sd(y))
[1] 1.2 1.2
>
> # (a), (b)
> t.test(x,y, alternative = "two.sided", var.equal = TRUE, conf.level = 0.95)

Two Sample t-test

data:  x and y
t = -3.1229, df = 48, p-value = 0.003033
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.3150719 -0.2849281
sample estimates:
mean of x mean of y
6.7       7.5

>
> t.test(x,y, alternative = "two.sided", var.equal = FALSE, conf.level = 0.95)

Welch Two Sample t-test

data:  x and y
t = -2.7603, df = 25.399, p-value = 0.01057
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.396436 -0.203564
sample estimates:
mean of x mean of y
6.7       7.5

>
> # (c)
> t.test(x,y, alternative = "less", var.equal = TRUE, conf.level = 0.95)
```

```
Two Sample t-test

data:  x and y
t = -3.1229, df = 48, p-value = 0.001516
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
-Inf -0.3703392
sample estimates:
mean of x mean of y
6.7       7.5

>
> t.test(x,y, alternative = "less", var.equal = FALSE, conf.level = 0.95)

Welch Two Sample t-test

data:  x and y
t = -2.7603, df = 25.399, p-value = 0.005285
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
-Inf -0.3052326
sample estimates:
mean of x mean of y
6.7       7.5
```

7. A sample of 250 items from lot A contains 10 defective items, and a sample of 300 items from lot B is found to contain 18 defective items. At a significance level $\alpha = 0.02$, is there a significant difference between the quality of the two lots?

*Resultat:* No.

*Resolució:*
Sea $X_A \sim B(n = 250, p_A)$, de la cual se ha observado el valor $x_A = 10$. Así la estimación de $p_A$ es

$$\hat{p}_n = \frac{x_A}{n} = \frac{10}{250} = 0.04.$$

Por otra parte, $X_B \sim B(m = 330, p_B)$ y se ha observado el valor $x_B = 18$. Así la estimación de $p_B$ es

$$\hat{p}_m = \frac{x_B}{m} = \frac{18}{300} = 0.06.$$

Se quiere hacer el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : p_A = p_B \\ H_1 : p_A \neq p_B \end{cases}$$

con nivel de significación $\alpha = 0.02$. El estadístico del test será

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

donde

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_A + m\hat{p}_B}{n+m}$$

es la estimación conjunta de la proporción $p$ de piezas defectuosas que, bajo $H_0$, es común a los dos proveedores. La distribución de $Z$ es aproximadamente $N(0, 1)$ bajo $H_0$. Como se trata de un contraste bilateral, la región crítica a nivel $\alpha = 0.01$ será

$$\mathcal{R} \equiv (\infty, -z_{\alpha/2} = -2.575829] \cup [z_{\alpha/2} = 2.575829, \infty).$$

Calculemos el valor del estadístico del test para las dos muestras observadas, para las cuales las proporciones muestrales observadas son

$$\hat{p}_A = \frac{x}{n} = \frac{10}{250} = 0.04,\ \hat{p}_B = \frac{y}{m} = \frac{18}{300} = 0.06,$$

y la estimación conjunta de la proporción poblacional $p$ que postula $H:0$ es

$$\hat{p} = \frac{250\hat{p}_A + 300\hat{p}_B}{250+300} = \frac{10+18}{250+300} = \frac{28}{550} = 0.0509.$$

El valor observado del estadístico del test es

$$z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} = \frac{0.04-0.06}{\sqrt{0.0509(1-0.0509)\left(\frac{1}{250}+\frac{1}{300}\right)}} = -1.062587.$$

Como $z = -1.062587 \notin \mathcal{R}$, no rechazamos $H_0$ a nivel 2%.