NOM:__________________________COGNOM:____

Contesteu cada pregunta en els espais en blanc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.

Problema 1 (A)

Un distribuïdor de servidors utilitza una caixa per l'ordinador amb tres slots per instal·lar els discs durs, que poden ser d'un o de dos TB. Un servidor ha de disposar almenys de 2 TB d'espai, i els discs durs es col·loquen en els slots 1, 2 i 3 de manera que al primer slot sempre va el disc més gran, i als següents ha d'anar un d'igual o menor que el previ, o quedar buit. Aquí teniu tot l'espai de configuracions possibles: Ω = {(2,2,2), (2,2,1), (2,2,0), (2,1,1), (2,1,0), (2,0,0), (1,1,1), (1,1,0)}.

1. A la vista del conjunt Ω anterior, definiu una probabilitat P() per a cadascuna de les configuracions basada en el espai de disc en TB de la configuració: concretament imposeu que la probabilitat sigui inversament proporcional a l'espai (és a dir, si l'espai és la meitat, la probabilitat es duplica). Quina seria la probabilitat que, agafat un servidor aleatòriament, tingui més de 4 TB? (1.5 pts)

Diem S_w a l'espai de disc pel resultat w: llavors:

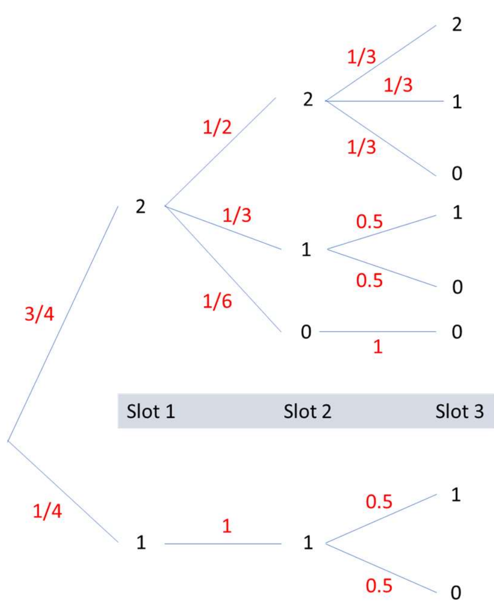
$$\sum_{\forall w} P(\{w\}) = \sum_{\forall w} K\ {}^{1}/_{S_w} = 1.$$

Noteu que "inversament proporcional a l'espai" significa *proporcional a la inversa de l'espai*, i així és com s'ha traslladat per expressar la probabilitat de qualsevol w. K és la constant de proporcionalitat, i fàcilment es troba que és igual a $1/\sum_{\forall w} {}^{1}/_{S_w}$ = 1/2.5333... El valor de la probabilitat de cada configuració:

P({w}) = $K\frac{1}{S_w}$ = [0.06579 0.07895 0.09868 0.09868 0.13158 0.19737 0.13158 0.19737]

P(+4TB) = P({2,2,2}) + P({2,2,1}) = 0.06579 + 0.07895 = 0.14474

2. A partir d'ara, totes les configuracions possibles es suposen igual de probables. Dibuixeu l'arbre d'esdeveniments i probabilitats resultant. *Per no fer un arbre massa gran, no representeu les branques que no fan falta.* (1.5 pts)



3. Com es demostra si la <u>capacitat del disc del slot 2</u> i la <u>capacitat del disc del slot 3</u> són independents o no? Responeu, considerant que un slot buit també és una opció ("capacitat 0"). (1.5 pts)

Podem veure que P(S3-0) = ½ (4 de 8 casos tenen el 3er slot buit)

En canvi, P(S3-0 | S2-0) = 1 (quan el segon slot és buit, sempre el 3er és buit)

Per tant, com ja hem trobat un cas que P(S3-0) ≠ P(S3-0 | S2-0), podem dir que les capacitats als slots 2 i 3 *no són independents*.

(Hi ha altres maneres similars de fer la demostració, però de cap manera s'admet una argumentació discursiva; heu de ser capaços de desenvolupar una demostració matemàtica).

4. Aplicant el teorema de Bayes, trobeu la probabilitat que al primer slot tinguem un disc de 2 TB sabent que el tercer slot és buit (*2 pts, si doneu una solució sense aplicar Bayes, la qualificació serà com a molt del 50%*).

   Diem S1-2 a l'esdeveniment "un disc de 2 TB al slot 1", i S3-0 a "el slot 3 és buit". Es demana:

   P(S1-2 | S3-0) = (Bayes) $\frac{P(S3-0 \mid S1-2)\, P(S1-2)}{P(S3-0)} = \frac{P(S3-0 \mid S1-2)\, P(S1-2)}{P(S3-0 \mid S1-1) P(S1-1) + P(S3-0 \mid S1-2)\, P(S1-2)}$

   $P(S3-0 \mid \mathbf{S1-1}) = P(S3-0 \mid S1-1 \cap S2-1) P(S2-1 \mid S1-1) = 0.5 \times 1 = 0.5$; al slot 2 només pot anar un disc d'un TB quan al primer és d'un TB

   $P(S3-0 \mid \mathbf{S1-2}) = \sum_{k=0}^{2} P(S3-0 \mid S1-2 \cap S2-k) P(S2-k \mid S1-2)$; al slot 2 pot anar un disc d'un TB, de dos TB, o cap quan al primer és de dos TB. = $1 \times \frac{1}{6} + 0.5 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 0.5$

   P(S1-2 | S3-0) = $\frac{P(S3-0 \mid S1-2)\, P(S1-2)}{P(S3-0 \mid S1-1) P(S1-1) + P(S3-0 \mid S1-2)\, P(S1-2)} = \frac{0.5 \times 3/4}{0.5 \times \frac{1}{4} + 0.5 \times 3/4} = 3/4$

   (La clau del teorema de Bayes és fer ús de les probabilitats condicionades, i també de la Llei de Probabilitats Totals pel terme del denominador).

5. Per a un servidor escollit a l'atzar es defineixen les variables aleatòries D1 i D2, nombre de discos d'un TB i de dos TB respectivament.
   a. Obtingueu la funció de probabilitat de cada variable i també la conjunta. (1 pt)

D1 \ D2	**0**	**1**	**2**	**3**	
0		1/8	1/8	1/8	3/8
1		1/8	1/8		2/8
2	1/8	1/8			2/8
3	1/8				1/8
	2/8	3/8	2/8	1/8	

   (Nota: per a presentar una funció de probabilitat conjunta la millor opció és una taula com aquesta. Si no comuniqueu els resultats d'una forma òptima, la lectura serà molt complicada, i possiblement generareu una reacció adversa).

   b. Quina és la covariància entre D1 i D2? Detalleu tots els passos necessaris. (1 pt)

      La manera més fàcil és trobar el valor esperat del producte D1·D2, que es distribueix:
      - val 1 (1×1) amb probabilitat 1/8
      - val 2 (1×2 i 2×1) amb probabilitat 2/8
      - val 0 a la resta de possibilitats amb probabilitat 5/8 (les combinacions 3, 4, 6, i 9 no es poden presentar)

      Per tant: E(D1) = 9/8, E(D2) = 10/8, i E(D1·D2) = 1×1/8 + 2×2/8 = 5/8.
      Llavors, cov(D1, D2) = 5/8 – 9/8·10/8 = –0.78125

6. L'espai de disc del servidor es pot definir a partir de les variables anteriors com a: S = D1 + 2D2. Trobeu l'esperança i la variància de l'espai de disc sense calcular explícitament la distribució de probabilitat de S. (1.5 pts)

   Necessitem els indicadors de D1 i D2: les esperances ja les havíem trobat, i les variàncies són:
   V(D1) = 0 3/8 + 1 2/8 + 4 2/8 + 9 1/8 – $(9/8)^2$ = 71/64
   V(D2) = 0 2/8 + 1 3/8 + 4 2/8 + 9 1/8 – $(10/8)^2$ = 15/16
   Per tant:
   E(S) = E(D1) + 2E(D2) = 9/8 + 2 10/8 = 29/8 = 3.625 TB
   V(S) = V(D1) + 4V(D2) + 2·2·cov(D1, D2) = 71/64 + 4 15/16 – 4· 0.78125 = 111/64 = 1.7344 TB^2

NOM:__________________________COGNOM:____

Contesteu cada pregunta en els espais en blanc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.

Problema 2 (B)

Uns distribuïdors de servidors ofereixen tres configuracions segons la mida del disc dur: petits, mitjans o grans (amb 2, 4 o 6 TB respectivament). Els distribuïdors reben consultes sobre preus, i d'aquestes algunes es materialitzen en compres. (*Definiu en cada apartat les variable, models i paràmetres adequats. Responeu formalment i expliciteu els càlculs*)

1. En una setmana reben 20 consultes pels servidors petits, i en 2 casos de cada 10 acaben comprant. Calculeu el valor esperat i la desviació del nombre de servidors venuts (1 punt)

   Np és "nombre de servidors petits venuts entre les 20 consultes setmanals"
   Np és Bin(n=20,p=0.2)
   E(Np) = n*p = 20*0.2 = **4**
   V(Np) = n*p*q = 20*0.2*0.8 = 3.2 **sqrt(V(Np)) = 1.79**

2. Calculeu la probabilitat de vendre dos o més servidors dels petits la setmana de la pregunta anterior (1 punt)

P(Np≥2) = 1-P(Np≤1) = 1 – (P(Np=1)+P(Np=0)) = 1 – ($\binom{20}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^{20}$ + $\binom{20}{1} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^{19}$) = 1 – (0.012 + 0.058) = **0.93**

[usant R seria: 1 – pbinom(1,20,0.2) o 1 – (dbinom(0,20,0.2)+dbinom(1,20,0.2))]

3. Un objectiu comercial és vendre dos servidors petits. Quin nombre de consultes setmanals de servidors petits podem esperar tenir fins assolir l'objectiu? (1 punt)

   Np2 és "nombre de consultes de servidors petits fins dos comprats"
   Np2 és BN(r=2,p=0.2)
   E(Np2) = r/p = 2/0.2 = **10**

4. En el cas dels servidors mitjans, si la meitat de les consultes acaben comprant i en una setmana es reben 25 consultes, quin és el nombre de vendes que no es superarà amb una probabilitat del 50%? (1 punt)

Nm és "nombre de servidors mitjans venuts entre les 25 consultes setmanals"
Nm és Bin(n=25,p=0.5)
P(Nm<k)=0.5 amb p=0.5 per simetria el valor que acumula el 50% és el centre → **12**
(com és simètrica també es pot veure que el punt que acumula el 50% (la mediana) és proper a l'esperança)
[usant R seria: qbinom(0.5,25,0.5) -> 12 o bé veient que pbinom(12,25,0.5) -> 0.5]

5. Pels servidors més grans, setmanalment es reben moltes consultes però menys acaben en venda, amb una mitjana de 2 vendes setmanals. Calculeu la probabilitat de vendre setmanalment dos o més servidors dels grans (1 punt)

   Ng és "nombre de servidors grans venuts amb mitjana de 2 setmanals"
   Ng és Poi(λ=2)

P(Ng>=2) = 1-P(Ng<=1) = 1 – (P(Ng=1)+P(Ng=0)) = 1 – ($\frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}$ + + $\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!}$ +) = 1 – (0.271 + 0.135) = **0.59**
[usant R seria: 1 – ppois(1,2) = 1 – (dpois(1,2)+dpois(0,2))]

6. Calculeu la probabilitat d'estar més d'un mes (4 setmanes) per vendre un servidor dels grans (1 punt)

   Ng és "nombre de servidors grans venuts amb mitjana de 2 setmanals" Ng és Poi(λ=2)
   Tset és "temps en setmanes entre vendes de servidors grans" Tset és Exp(λ=2)
   P(Tset>4) = 1 – P(Tset<4) = 1 – (1 – $e^{(-2*4)}$) = e^{-8} = **0.0003**

   O bé Ng_mes és "nombre de servidors grans venuts amb mitjana de 8 mensuals" Ng_mes és Poi(λ=8)
   Tmes és "temps en mesos entre vendes de servidors grans" Tmes és Exp(λ=8)
   P(Tmes>1) = 1 – P(Tmes<1) = 1 – (1 – $e^{(-8*1)}$) = e^{-8} = 0.0003

   o P(Ng_mes=0) = $\frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!}$ = 0.0003

Respecte el preu dels servidors, els distribuïdors asseguren que, sense distingir per mida, segueix una distribució Normal amb una mitjana de 3000 eur i variància 10^6 eur^2

(*Els càlculs amb el model Normal cal que els formalitzeu en termes de la Normal estàndard)*

7. Calculeu el preu màxim que no es superarà amb probabilitat del 95% (1punt)

Preu és N(μ=3000, σ=1000)

P(Preu < max) = 0.95 = P(Z < ((max-3000)/1000))

→ ((max-3000)/1000) = qnorm(0.95) = 1.645 → max-3000=1645 → **max = 4645 eur**

qnorm(0.95) = 1.644854 → max-3000=1644.854 → max = 4644.854 **eur**

8. Calculeu la probabilitat que el preu estigui entre 2500 i 3500 eur (1 punt)

P(2500<=Preu<=3500) = P(X<=3500) – P(X<=2500) = F_X(3500)- F_X(2500) =

= pnorm(3500,3000,1000)-pnorm(2500,3000,1000) = 0.38

= F_Z((3500-3000)/1000)- F_Z((2500-3000)/1000)
= F_Z(0.5)- F_Z(-0.5)
= pnorm(0.5)-pnorm(-0.5) = 0.38

= F_Z(0.5)-(1-F_Z(0.5))
= 2*pnorm(0.5) – 1 = 2*0.69146-1 = 1.38292-1 = **0.383 (38.3%)**

9. Ara considerem una agrupació de 100 distribuïdors amb les característiques de vendes setmanals descrites inicialment. Calculeu la probabilitat que entre tots venguin en una setmana més de 425 servidors petits. I la de que venguin setmanalment menys de 190 dels grans (2 punts)

N100p és suma de 100 Bin(20,0.2) amb E()=4 i sqrt(V())=1.79

i pel TCL N100p és N(μ=4*100, σ=1.79*sqrt(100)) és **N(μ=400, σ=17.9)**

P(N100p > 425) = P(Z > (425-400)/17.9)) = P(Z > 1.4) = 1 – P(Z<1.4) = 1- pnorm(1.4) = 1-0.91924 = **0.081 (8.1%)**

N100g és suma de 100 Poi(λ=2) amb E()=2 i sqrt(V())=1.41

i pel TCL N100g és N(μ=2*100, σ=1.41*sqrt(100)) és **N(μ=200, σ=14.1)**

P(N100g < 190) = P(Z < (190-200)/14.1)) = P(Z < -0.7) = 1 – P(Z < 0.7) = 1 - pnorm(0.7) = 1-0.75804 = **0.242 (24.2%)**

pnorm(2.75) = 0.99702	**pnorm(1.6) = 0.94520**	**pnorm(0.7) = 0.75804**	**qnorm(0.999) = 3.090232**	**qnorm(0.975) = 1.959964**
pnorm(2.5) = 0.99379	**pnorm(1.4) = 0.91924**	**pnorm(0.6) = 0.72575**	**qnorm(0.995) = 2.575829**	**qnorm(0.95) = 1.644854**
pnorm(1.96) = 0.975002	**pnorm(1) = 0.841345**	**pnorm(0.5) = 0.69146**	**qnorm(0.99) = 2.326348**	**qnorm(0.90) = 1.281552**