Probabilitat i Estadística 1

Problemes Tema 6. Estimació puntual

1. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. amb esperança μ i variància σ^2. Es defineix la variància mostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Proveu que $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x+1}$, $x > 1/\lambda$. Hallar el estimador de momentos de λ.

Resultat: $\hat{\lambda} = 2/\bar{X}_n$

3. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb funció de densitat

$$f(x;\alpha) = \frac{1+\alpha x}{2}\mathbb{I}_{[-1,1]}(x), \text{ amb } \alpha \in [-1, 1].$$

   (a) Doneu l'estimador de α obtingut pel mètode dels moments (al qual anomenarem $\hat{\alpha}_m$).

   (b) És $\hat{\alpha}_m$ un estimador no esbiaixat de α?.

   (c) Per a $n = 100$ s'han observat els valors $x_1, \ldots, x_n$ procedents de les variables $X_1, \ldots, X_n$. D'aquestes dades se sap el següent:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -21.44148, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 33.56329, \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = -12.76414, \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 19.74995.$$

   Doneu el valor de l'estimador $\hat{\alpha}_m$ per aquestes dades i calculeu l'error estàndard de l'estimador.

Resultat: (a) $\hat{\alpha}_m = 3\bar{X}_n$. (b) Sí. (c) $\hat{\alpha}_m = -0.6432444$, $\text{st.er}(\hat{\alpha}_m) = 0.1622734$

4. Considera una muestra aleatoria simple de la variable $X \sim U([0, b])$, $b > 0$. Da las expresiones de los estimadores de momentos i de máxima verosimilitud de b. Busca sus distribuciones en el muestreo (exactas o asintóticas), calcula su errores estándar, sus sesgos i sus errores cuadráticos medios. ¿Cuál de los dos estimadores de b es más eficiente?

Resultat: $\text{ECM}_b(\hat{b}_{mom}) = b^2/(12n)$. $\text{ECM}_b(\hat{b}_{ML}) = 2b^2/((n+1)(n+2))$.

5. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb funció de densitat

$$f(x;\lambda) = \frac{1}{2}\lambda \exp(-\lambda|x|),\, x \in \mathbb{R}\, \lambda > 0.$$

Siguin $x_1, \ldots, x_n$ observacions d'aquests variables.

   (a) Doneu l'estimador de λ obtingut pel mètode dels moments.

   (b) Doneu l'estimador de λ obtingut pel mètode de la màxima versemblança.

6. Sea $X \sim \gamma(\alpha, b)$, $\alpha > 0$, $b > 0$, con densidad

$$f_X(x|\alpha, b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)b^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/b}$$

para $x > 0$. Se dice que $Y = X^{-1}$ tiene distribución *gamma invertida* con parámetros (α, b), y se denota como $IG(\alpha, b)$.

   (a) Prueba que la densidad de Y es

$$f_Y(y;\alpha, b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)b^\alpha}\frac{1}{y^{\alpha+1}}e^{-1/(by)}I_{(0,\infty)}(y).$$

(b) Calcula la esperanza y la varianza de Y.

7. Se observa una muestra de una variable aleatoria X exponencial de parámetro λ (con $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$).

   (a) Prueba que el método de momentos y el de máxima verosimilitud conducen al mismo estimador $\hat{\lambda}$ del parámetro λ.

   (b) Prueba que la distribución en el muestreo de $\hat{\lambda}$ es una Gamma invertida e indica cuáles son sus parámetros.

   (c) Calcula el sesgo y el error cuadrático medio de $\hat{\lambda}$ como estimador de λ.

   Resultat: (b) $\hat{\lambda} \sim IG\left(\alpha = n, b = \frac{1}{n\lambda}\right)$. (c) $\text{Sesgo}_\lambda(\hat{\lambda}) = \lambda/(n-1)$, $\text{ECM}_\lambda(\hat{\lambda}) = \frac{n^2+n-2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2$.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que $X_i \sim \text{Poisson}(i\theta)$, $\theta > 0$. Encuentra el estimador máximo verosímil de θ, prueba que es insesgado y calcula su varianza.

   Resultat: $\hat{\theta} = \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n X_i$ con $a_n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \theta/a_n$.

9. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que $X_i \sim N(i\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Encuentra el estimador máximo verosímil de θ, prueba que es insesgado y calcula su varianza.

10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que $X_i \sim \text{Exp}(1/(i\theta))$, $E(X_i) = i\theta$, $\theta > 0$. Encuentra el estimador máximo verosímil de θ, prueba que es insesgado y calcula su varianza.

    Resultat: $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$, $\text{Var}(\hat{\theta}) = \theta^2/n$.

11. **Hardy-Weinberg law.** (Problem 6.2.19 of Evans and Rosenthal, 2010).
    The Hardy-Weinberg law in genetics says that the proportions of genotypes AA, Aa, and aa are θ^2, $2\theta(1-\theta)$, and $(1-\theta)^2$, respectively, where $\theta \in [0,1]$. Suppose that in a sample of n individuals from the population (small relative to the size of the population), we observe x_1 individuals of type AA, x_2 individuals of type Aa, and x_3 individuals of type aa.

    (a) What distribution do the counts (X_1, X_2, X_3) follow?

    (b) Record the likelihood function, the log-likelihood function, and the score function for θ.

    (c) Record the form of the MLE for θ.

    Resultat:

12. Consideramos una muestra de X exponencial de parámetro λ (con $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$), como en el problema 7. Da la distribución asintótica de $\hat{\lambda}$ (el estimador de momentos y también el máximo verosímil de λ) usando la teoría asintótica del estimador máximo verosímil.

    Resultat:

13. Sigui $X \sim \text{Bin(n,p)}$. Es defineix el *log-odds* com $\psi = \log(p/(1-p))$. Doneu l'estimador màxim versemblant de ψ i indiqueu quina és la seva distribució asimptòtica fent servir la Informació de Fisher.

    Resultat: