Probabilitat i Estadística

Problemes Tema 3. Vectors aleatoris

(Professor: Pedro Delicado)

Variables aleatòries multivariants discretes.

1. Llencem una moneda tres cops. Designem per X el nombre de cares que han sortit, i per Y el valor absolut de la diferència entre el nombre de cares i de creus. Trobeu la distribució conjunta de (X, Y).

2. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes. Trobeu la funció de probabilitat conjunta de (X, Y) i escriviu-la en forma de taula. Escriviu-hi també les distribucions marginals de X i de Y.

3. Sigui (X, Y) una v.a. bivariant discreta. Se sap que X pren els valors 0, 2 i 4 amb probabilitats 1/2, 1/4 i 1/4, respectivament. També se sap que, per a $x \in \{0, 2, 4\}$, la distribució condicionada de Y, donat que $X = x$, és uniforme discreta en els enters que van des de $-x/2$ fins a x.

   (a) Marqueu en el pla els punts que pertanyen al suport de la distribució conjunta de (X, Y).
   (b) Caluleu la funció de probabilitat conjunta de X, Y.
   (c) Calculeu la distribució marginal de Y.
   (d) Doneu la distribució de probabilitat de X condicionada a que $Y = 0$.
   (e) Calculeu $E(XY)$.

   Resultat: (e) 5/4.

4. Llencem n cops una moneda (amb probabilitat p de cara) i definim

   $$X = \text{nombre de cares}, \; Y = \text{nombre de creus},$$

   Aleshores $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(n, 1-p)$ i X i Y no són independents, perquè sempre que coneguem X coneixerem Y: $Y = n - X$.

   Considerem ara el cas en que triem aleatòriament el nombre de llançaments de la moneda. Concretament llencem la moneda un nombre aleatori N de vegades, amb $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

   (a) Calculeu la funció de probabilitat conjunta de (X, N).
   (b) Calculeu la funció de probabilitat marginal de X i deduïu-ne que $X \sim \text{Poisson}(p\lambda)$. De la mateixa manera es prova que $Y \sim \text{Poisson}((1-p)\lambda)$.
   (c) Proveu que ara X i Y son independents.

   Resultat: (a) $\Pr(X = x, N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$.

Covariància i correlació

5. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes.

(a) Calculeu l'esperança i la variància de X i de Y.
(b) Calculeu la covariància i la correlació de X i Y.

Resultat: (a) $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(Y) = 1$, $Var(X) = Var(Y) = 2/3$; (b) $Cov(X,Y) = 1/3$, $\rho_{XY} = 1/2$.

6. Llencem una moneda tres cops. Designem per X el nombre de cares que han sortit, i per Y el valor absolut de la diferència entre el nombre de cares i de creus. Comproveu que X i Y tenen covariància 0, tot i no ser independents.

7. Siguin X i Y v.a. amb la mateixa variància. Calculeu $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$.

8. Siguin X, Y, Z tres v.a. tals que $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Var}(Z) = 8$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X,Z) = -1$, $\mathrm{Cov}(Y,Z) = 2$. Determineu:
   (a) $\mathrm{Var}(X+Y+Z)$.
   (b) $\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1)$.

9. Siguin $\{X_r : 1 \le r \le n\}$ v.a.i.i.d. amb variància finita. Definim $\bar{X} = n^{-1}\sum_{r=1}^{n} X_i$. Proveu que $\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_r - \bar{X}) = 0$.

10. Sigui $T = \sum_{k=1}^{n} kX_k$ i $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, a on les X_k són v.a. independents de mitjana μ i variància σ^2.
   (a) Calculeu $E(T)$ i $\mathrm{Var}(T)$.
   (b) Calculeu la covariància i la correlació entre S i T.

Resultat: (a) $\mathbb{E}(T) = \mu\frac{n(n+1)}{2}$, $Var(T) = \sigma^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (b) $Cov(S,T) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\rho_{ST} = \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}$

Distribució multinomial

11. Sigui $(X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleatori amb distribució multinomial $M(n; p_1, \ldots, p_k)$.
   (a) Calculeu la funció de probabilitat marginal de la variable X_3. Quina llei segueix X_3?
   (b) Calculeu la matriu de variàncies i covariàncies de $(X_1, \ldots, X_k)$.
   (c) Calculeu la funció de probabilitat condicional de la variable X_3 condicionada a $X_2 = a$. Quina llei segueix X_3 condicionada a $X_2 = a$?
   (d) Quina llei segueix $X_2 + X_3$?

12. Tenim un dau no equilibrat. La probabilitat que aparegui la cara i quan es fa rodar es denota per p_i. Suposem que $p_1 = 0.11$, $p_2 = 0.30$, $p_3 = 0.22$, $p_4 = 0.05$, $p_5 = 0.25$, $p_6 = 0.07$. Aquest dau es llença 40 vegades. Denotem per X_1 el nombre de cares parelles que apareixen i per X_2 el nombre de vegades que surt un 1 o un 3. Calculeu la $\mathrm{P}(X_1 = 20, X_2 = 15)$.

Resultat: 0.00365.

Distribucions contínues

13. Siguin X i Y dues v.a. contínues, amb funció de densitat conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} cy^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \text{ i } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

   Determineu:
   (a) El valor de la constant c;
   (b) $\mathrm{P}(X+Y > 2)$;

(c) $\mathrm{P}(Y < 1/2)$;

(d) $\mathrm{P}(X \leq 1)$;

(e) $\mathrm{P}(X = 3Y)$.

Resultat: (a) 3/2; (b) 3/8; (c) 1/8; (d) 1/2; (e) 0.

14. Suposem que un dia determinat dues persones A i B arriben a un magatzem de forma independent. La persona A es queda 15 minuts al magatzem i la B 10 minuts. Si el temps d'arribada d'aquestes persones segueix una distribució uniforme entre les 9 i les 10 del matí, quina és la probabilitat que A i B coincideixin al magatzem?

Resultat: 0.37.

15. **Paradoxa de Bertrand.** Es considera una corda AB triada aleatòriament al cercle C de centre O i radi 1, i un triangle equilàter que té AB com un dels seus costats. Volem calcular la probabilitat que el triangle no pugui estar contingut a dins del cercle.

    (a) Si X és la longitud de la corda, proveu que la probabilitat demanada és $P(X > \sqrt{3})$.

    (b) Considereu les següents formes de triar la corda aleatòria:

    i. Es tria un punt P aleatòriament (uniformement) a l'interior de C i es pren la corda AB que té a P com el punt mig.

    ii. Es tria un punt P aleatòriament d'un radi de C i es pren la corda AB que té a P com el punt mig.

    iii. Es trien els punts A i B aleatòriament de la circumferència de de centre O i radi 1.

    Proveu que $P(X > \sqrt{3})$ és diferent en cadascun dels tres casos i que de fet val 1/4, 1/3 o 1/2, segons la forma de triar AB. Indiqueu quin valor de la probabilitat correspon a cada cas.

16. Suposem que escollim un punt de l'interior del cercle que té per equació $x^2 + y^2 = 1$. Suposem que la probabilitat que el punt pertanyi a una regió qualsevol de dins del cercle és proporcional a l'àrea d'aquesta regió.

    (a) Calculeu les distribucions marginals de les coordenades (X, Y) d'aquest punt.

    (b) Denotem per Z la v.a. que representa la distància des d'aquest punt fins al centre del cercle. Trobeu i dibuixeu la funció de densitat de Z.

Resultat: (a) $f_X(x) = (2\pi)\sqrt{1-x^2}$; (b) $f_Z(z) = 2z \cdot 1_{[0,1]}(z)$.

17. Suposeu que la funció de densitat conjunta de X i Y és la següent:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \text{ i } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu i dibuixeu les distribucions marginals i condicionades. Són X i Y independents?

18. Suposeu que $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$ per $0 \leq x < \infty$, i $0 \leq y < \infty$.

    (a) Trobeu les dues densitats marginals.

    (b) Trobeu la densitat de $(X|Y = y)$ i la de $(Y|X = x)$.

Resultat: (a) $f_X(x) = e^{-x}$, $f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$; (b) $f(X|Y = y) = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)}$.

19. Suposem que dues components tenen temps de vida, T_1 i T_2, independents i exponencials amb paràmetres α i β, respectivament. Calculeu $\Pr(T_1 > T_2)$.

Resultat: $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

20. Siguin X i Y variables aleatòries independents amb distribució exponencial de paràmetre λ i μ respectivament. Definim

$$U = min(X, Y), \quad V = 1_{\{U=X\}}.$$

Trobeu la llei conjunta de (U, V). Trobeu la distribució de U i V.

Són U i V independents?

Resultat: $U \sim Exp(\lambda + \mu)$, $V \sim Bern\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$.

21. Siguin X i Y dues v.a.'s contínues. La v.a. X es distribueix segons una llei uniforme a l'interval $[0, 10]$. S'observa $X = x$ i en aquestes condicions la v.a Y es distribueix uniformement a l'interval $[0, x]$.

   (a) Doneu la funció de densitat conjunta del vector (X, Y).

   (b) Calculeu $\mathrm{P}(X > Y)$.

Resultat: (a) $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{10x}$, $0 \leq y \leq x \leq 10$; (b) 1.

22. Les v.a. X, Y, Z tenen per densitat conjunta

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < y < 1 \text{ i } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu la $\mathrm{P}(3X > Y \mid 1 < 4Z < 2)$

Resultat: 2/3.

Estadístics extrems

23. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independents amb funció de distribució $F_1, \ldots, F_n$ i densitats $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ respectivament. Siguin $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ i $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

   (a) Calculeu les funcions de distribució i de densitat de $X_{(n)}$ i de $X_{(1)}$ a partir de les distribucions i densitats de $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) Repetiu l'apartat 1. pel cas particular en que les v.a. són idènticament distribuïdes.

   (c) Calculeu $E(X_{(1)})$ i $E(X_{(n)})$ en el cas que $X_i \sim U([0, 1])$.

Resultat: (c) $\mathbb{E}(X_{(1)}) = 1/(n + 1)$, $\mathbb{E}(X_{(n)}) = n/(n + 1)$.

24. Suposeu que les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ són independents i que X_i segueix una distribució exponencial de paràmetre β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Definim la v.a. $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Cerqueu la distribució de la v.a. Y.

Resultat: $Y \sim Exp(\sum_{i=1}^{k} \beta_i)$.

25. Siguin $X_1, ..., X_n$ v.a.'s independents i amb la mateixa distribució de probabilitat, que té funció densitat

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x/\beta} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

(correspòn a l'anomenada llei de Weibull(α, β)).

Trobeu la funció de densitat del $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Identifiqueu quina llei segueix $X_{(1)}$.

Resultat: $X_{(1)} \sim Weibull(\alpha, \frac{\beta}{n})$.

Esperança condicionada

26. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes. Calculeu l'esperança de la distribució condicionada de X donat que $Y = 1$.

Resultat: 21/11.

27. Sigui $Y \sim B(n, X)$ (això també es pot escriure com $(Y|X = x) \sim B(n, x)$), on $X \sim \text{Beta}(a, b)$.
    (a) Doneu la distribució marginal de Y.
    (b) Doneu també la densitat condicionada de $(X|Y = y)$ i calculeu les seves esperança i variància.
    (c) Particularitzeu els vostres resultats pel cas en que X sigui uniforme.

28. Siguin U_1 i U_2 dues v.a. uniformes i independents a l'interval $[0, 1]$. Denotem per $X = \min\{U_1, U_2\}$ i per $Y = \max\{U_1, U_2\}$.
    (a) Comprobeu que la funció de densitat conjunta entre X i Y ve donada per

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

    (b) Trobeu la covariància i la correlació entre X i Y. Creieu que el signe de la correlació té sentit intuïtivament?
    (c) Trobeu $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\text{Var}(X \mid Y)$ i $\text{Var}(Y \mid X)$.
    (d) Comproveu que es verifica la llei de l'esperança iterada.

Resultat: (b) $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.; (c) $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X+1}{2}$, $\text{Var}(X|Y) = \frac{Y^2}{12}$.

29. El vector aleatori (T, U) es distribueix uniformement al triangle rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 2)$.
    (a) Determineu la funció de densitat conjunta de (T, U).
    (b) Calculeu $\Pr(0.3 \leq U \leq 1|T = 0.3)$.
    (c) Calculeu $E(T|U = u)$ i $E(U|T = t)$.
    (d) Calculeu $\text{Var}(T|U = u)$.
    (e) Calculeu $\text{Var}(E(T|U))$.
    (f) Comproveu que es verifica la Llei de l'Esperança Iterada calculant $E(T)$ a partir de la distributió marginal de T, i veient que coincideix amb $E(Z)$, on $Z = E(T|U)$.

Resultat: (b) 1/2; (c) $E(T|U = u) = \frac{2-u}{4}$, $\quad E(U|T = t) = 1 - t$; (d) $\text{Var}(T|U = u) = \frac{(2-u)^2}{48}$.

30. Sigui T una v.a. exponencial, i condicionat a T sigui U una v.a. uniforme en $[0, T]$. Calculeu l'esperança i la variància (sense condicionar) de U. Nota: No és necessari calcular la llei marginal de la variable aleatòria U.

Resultat: $E(U) = 1/2\lambda$, $Var(U) = 5/(12\lambda^2)$.

31. Siguin X i Y dues v.a. amb funció de densitat conjunta

$$f(x, y) = e^{-y}, \qquad 0 \leq x \leq y.$$

Calculeu $E(X \mid Y)$ i $E(Y \mid X)$.

Resultat: $\mathbb{E}(X|Y) = Y/2$, $\mathbb{E}(Y|X) = X + 1$.

Transformacions de variables aleatòries multivariants

32. Siguin X i Y dues v.a. i.i.d. (independents i idènticament distribuïdes) segons una exponencial de paràmetre β. Trobeu la funció de densitat de $X - Y$.

Resultat: $f_U(u) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|u|} \quad \forall u \in \mathbb{R},.$

33. Siguin X y Y dues v.a. amb funció de densitat conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definim dues noves v.a. $U = (X|Y)$ i $V = Y$.

(a) Determineu la funció de densitat conjunta de U i V.

(b) Són X i Y independents?

(c) Són U i V independents?

Resultat: (a) $f_{(U,V)}(u,v) = 8uv^3; \quad 0 \leq u \leq 1 \quad y \quad 0 \leq v \leq 1.$

34. Siguin X i Y dues variables aleatòries independents, cadascuna amb distribució uniforme en l'interval $(0,1)$. Definim $U = X + Y, V = X - Y$. Trobeu la densitat de (U,V) i les densitats marginals.

35. El temps total que un camió és al magatzem està definit per una variable aleatòria X. Sigui Y la variable temps d'espera en la cua, i Z el temps de descàrrega ($X = Y + Z$). La distribució conjunta de (X,Y) és:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.25 \exp\{-0.5x\} & \text{si } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

(a) Calculeu el temps mig total que el camió roman al magatzem.

(b) Calculeu el temps mig de descàrrega.

(c) Identifiqueu les lleis que segueixen les variables X, Y i Z.

(d) Estudieu la independència entre els següents parells de variables aleatòries: X i Y, X i Z i Z i Y,

(e) Calculeu el coeficient de correlació entre el temps total i el temps d'espera en la cua.

Resultat: (a) 4; (b) 2; (e) 0.71.

36. **Monte Carlo.** Es vol estimar $J = \int_0^1 g(x)dx$, on $0 \leq g(x) \leq 1$ per tot x. Siguin X i Y v.a.i.i.d. $U([0,1])$. Es defineixen

$$U = I_{\{Y \leq G(X)\}}, \quad V = g(X), \quad W = \frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}.$$

Proveu que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W)$ i que $\mathrm{Var}(U) \geq \mathrm{Var}(V) \geq \mathrm{Var}(W)$, d'on es segueix que W és el *estimador* de J més *eficient* dels tres.

Distribució normal bivariada.

37. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada i tals que $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2)$. Demostreu que les v.a $S = X_1 + X_2$ i $D = X_1 - X_2$ són independents.

38. Sigui $X \sim N(0,1)$ i $a > 0$. Sigui

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| < a, \\ -X & \text{si } |X| \geq a. \end{cases}$$

(a) Proveu que $Y \sim N(0,1)$.

(b) La distribució conjunta de (X,Y), és normal bivariant? Són independents?

(c) Doneu l'expressió de $\rho(a) = \mathrm{cor}(X,Y)$ en termes de la funció de densitat $\phi(x)$ de X.

(d) Deduïu-ne que existeix un valor a^* pel qual $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$ tot i que X i Y no siguin independents.

39. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada amb mitjanes μ_1 i μ_2, variàncies σ_1^2 i σ_2^2 i correlació ρ. Determineu la distribució de $X_1 - 3X_2$.

40. Sigui (X, Y) un vector aleatori que segueix una distribució normal bivariada de paràmetres $\mu_X = 40$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 4$ i $\rho = 0.6$. Trobeu l'interval més curt ($[a, b]$) tal que la probabilitat condicionada de que Y pertanyi a l'interval ($[a, b]$) donat que $X = 22$ sigui igual a 0.90.

41. Sigui $X \sim N(0, 1)$, i $(Y|X = x) \sim N(2x - 3, 12)$. Determineu la distribució marginal de Y i la correlació entre X i Y.