Fonaments de Probabilitat i Estadística. Notes de classe

Pedro Delicado

14 de febrer de 2018

Presentació i agraïments

Aquest document està format per les notes que he preparat per fer les classes de *Fonaments de Probabilitat i Estadística.* No és un document fet amb la intenció de ser difós més enllà dels estudiants que tinc a classe. És per això que detalls importants (com la inclusió de gràfics explicatius o l'ús correcte de la llengua) no han estat tan cuidats com si es tractés d'un llibre.

Aquestes notes són hereves de totes les assignatures amb continguts de probabilitat que he fet durant els més de 20 anys que porto a la docència universitària. Tenen fortes empremtes de les assignatures *Probabilitat* (UPF, anys 1995 a 2000), *Estadística Matemàtica 1* (Diplomatura de Estadística, UPC, anys 2001 a 2009), *Probabilitat i Estadística* (Llicenciatura de Matemàtiques, UPC, anys 2001 a 2010), *Probabilitat i Processos Estocàstics* (Grau d'Estadística UB-UPC, anys 2011 a 2017), *Teoria de la Probabilitat* (Grau de Matemàtiques, UPC, anys 2012 a 2013), *Probabilitat i Estadística* (Grau en Enginyeria Informàtica, UPC, any 2015) i *Probabilitat i Estadística I* (Grau en Enginyeria i Ciència de Dades, UPC, any 2018). Vull donar les gràcies a tots els companys i totes les companyes que han fet classes amb mi en aquestes assignatures per la seva generositat intel·lectual. Esmentaré alguns d'ells, sabent que deixo fora de la llista altres persones que haurien de ser-hi: Frederic Udina, Arturo Kohatsu, Ramon Nonell, Lupe Gómez, Josep Fàbrega i Oriol Serra. Moltes gràcies!

En qualsevol cas, els errors que pugui haver en aquestes notes són enterament responsabilitat meva.

Espero que algú que s'apropi per primera vegada a la probabilitat pugui trobar útil aquest document. Aquest és el seu principal objectiu.

Pedro Delicado. Barcelona, febrer de 2018.

Pròleg a "Fonaments de Probabilitat i Estadística"

Els cursos introductoris a la probabilitat i l'estadística acostumen a tenir tres grans parts:

- Estadística descriptiva.
- Probabilitat.
- Inferència estadística.

Interrelació entre estadística descriptiva, probabilitat i inferència estadística

- **Població:** Conjunt de tots els individus en les característiques dels quals l'investigador està interessat, i sobre els quals desitjaria que les seves afirmacions fossin vàlides.

- L'estadística descriptiva es útil per a poblacions amb un nombre *petit* d'individus. Es pot descriure tot el conjunt de dades corresponent a aquesta població.

- Què podem fer si el conjunt d'individus d'interès és *massa gran*? *Gran* pot voler dir, per exemple, que examinar a tots els individus sigui costós en temps i/o diners, o fins i tot *de grandària infinita*.

- El que farem serà seleccionar **aleatòriament** alguns dels individus i observar només aquests.
  Exemple: enquesta de pressuposts familiars (EPF), enquestes preelectorals, resultats d'un experiment repetible infinites vegades.

- **Mostra:** Subconjunt d'individus de la població seleccionats **aleatòriament** i que seran finalment observats.

- Las eines de l'estadística descriptiva aplicades a una mostra, aporten molta informació sobre aquesta mostra. Però l'objectiu de l'investigador és arribar a fer afirmacions sobre tota la població, no només sobre la mostra concreta que observa.

- Si la mostra ha estat seleccionada **aleatòriament**, la teoria de probabilitat permet inferir característiques de tota la població a partir de l'estudi descriptiu de la mostra.

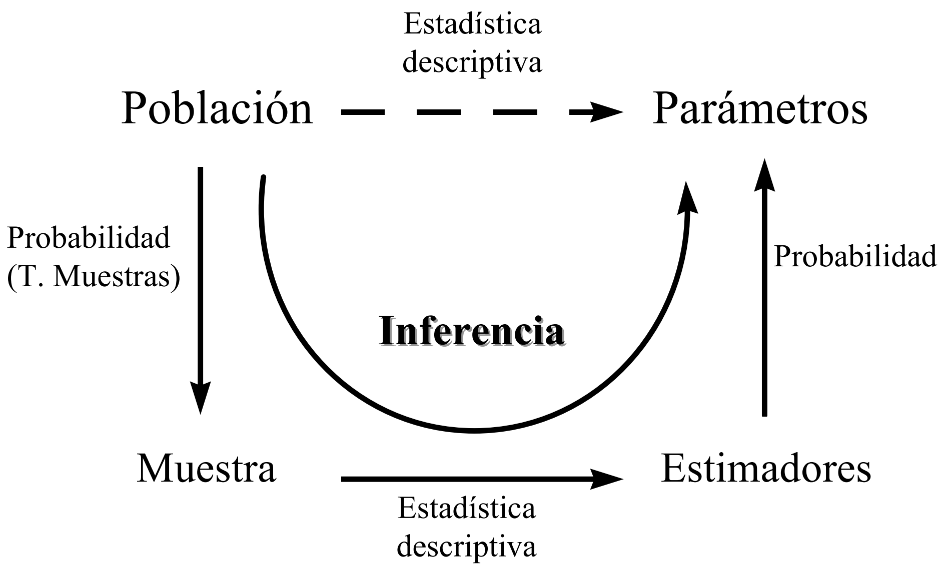


Figura 1: Esquema de la interrelació entre estadística descriptiva, probabilitat i inferència estadística

- A vegades la característica poblacional d'interès s'identifica amb un valor numèric desconegut (paràmetre), i aquest pot ser *inferit* a partir del càlcul d'alguns estadístics descriptius en una mostra extreta de la població.

- La inferència estadística fa servir eines del càlcul de probabilitats i de l'estadística descriptiva per a construir afirmacions vàlides per a tota la població a partir de l'observació d'una mostra aleatòria d'aquesta.

Índex

Tema 1

Càlcul de Probabilitats

1.1 Probabilitat

PROBABILITAT: Mesura que quantifica la incertesa associada a fenòmens no deterministes (aleatoris).

Les eines proporcionades per la probabilitat permeten entendre conceptes com incertesa o aleatorietat.

La probabilitat permet gestionar la incertesa y possibilita la presa de decisions en ambients de incertesa.

1.1.1 Experiment aleatori. Espai mostral. Esdeveniments

Definició 1.1.1. *Direm que un experiment (en sentit ampli) és* ALEATORI *si dóna lloc a resultats no predictibles amb certesa.*

Exemple 1.1.1.
Experiment: Llançament d'un dau. El resultat del dau es impredictible. □

Els experiments aleatoris produeixen resultats que no poden ésser determinats amb certesa abans de realitzar l'experiment.

Dues repeticions de l'experiment aleatori sota les mateixes condicions poden donar lloc a resultats diferents.

Definició 1.1.2. *El conjunt Ω de tots els possibles resultats d'un experiment s'anomena l'* ESPAI MOSTRAL *d'aquest experiment.*

Exemple 1.1.2.
Experimento: Llançament d'un dau.

$$\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$$

□

Definició 1.1.3. *Un* ESDEVENIMENT *és una afirmació, diguem-ne A, sobre el resultat de l'experiment aleatori que, una vegada realitzat aquest, resulta ser o bé certa o bé falsa.*

L'esdeveniment A s'identifica amb la col·lecció de possibles resultats de l'experiment per als quals l'afirmació A és certa. És a dir, l'esdeveniment A s'identifica amb un subconjunt A de Ω.

De forma recíproca, donat un subconjunt $A \subseteq \Omega$, direm que l'esdeveniment A ha ocorregut si el resultat de l'experiment és dins d'A.

Exemple 1.1.3.
Experiment: Llançament d'un dau. Definim el següent esdeveniment:
$A =$ *"El resultat és parell"* $= \{\epsdice{2}, \epsdice{4}, \epsdice{6}\} \subseteq \Omega$.

□

La forma de treballar amb esdeveniments és la mateixa que la de treballar amb conjunts:

Definició 1.1.4.

- RELACIÓ D'INCLUSIÓ: $A \subseteq B$ *si quan* $x \in A$ *llavors* $x \in B$.
- RELACIÓ D'IGUALTAT: $A = B$ *si* $A \subseteq B$ *i* $B \subseteq A$.
- OPERACIONS: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} \equiv$ "Es verifica A o B".

  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\} \equiv$ "Es verifica A i B".

  $A^c = \{x : x \notin A\} \equiv$ "No es verifica A" *és l'esdeveniment* contrari*a A:* $A^c, \overline{A}, \neg A$.

  $A \setminus B = A \cap B^c = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\} \equiv$ "Es verifica A però no es verifica B". *($A \setminus B$ és la diferència conjuntística entre A i B).*

Propietats de les operacions

- Commutativa: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiva:
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Lleis de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- Si $A_1, A_2, \ldots$ és una col·lecció d'esdeveniments tots ells definits en un espai mostral Ω llavors:

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ per algun } i\}$$

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ per a qualsevol } i\}$$

Definició 1.1.5. *L'esdeveniment Ω es diu* ESDEVENIMENT SEGUR*, i l'esdeveniment $\emptyset$ es diu* ESDEVENIMENT IMPOSSIBLE*.*

Definició 1.1.6. *Els esdeveniments A i B són* DISJUNTS*,* INCOMPATIBLES *o* MÚTUAMENT EXCLOENTS *si $A \cap B = \emptyset$.*

Els esdeveniments $A_1, A_2, \ldots$ són DISJUNTS DOS A DOS*,* INCOMPATIBLES DOS A DOS *o* MÚTUAMENT EXCLOENTS DOS A DOS *si $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j$.*

Definició 1.1.7. *Si els esdeveniments $A_1, A_2, \ldots$ són disjunts dos a dos, $A_i \neq \emptyset$ per a $i = 1, 2, \ldots$, i $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ direm que $\{A_1, A_2, \ldots\}$ forma una* PARTICIÓ *de Ω.*

Definició 1.1.8. *Sigui Ω un espai mostral i sigui $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunt de les parts d'Ω ($\mathcal{P}(\Omega)$ és la col·lecció de tots el subconjunts d'Ω).*

Definició 1.1.9. *Sigui $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Direm que $\mathcal{A}$ és una* ÀLGEBRA *de conjunts d'Ω si*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$ aleshores $A^c \in \mathcal{A}$, on A^c és el conjunt complementari d'A.

(iii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ aleshores $A \cup B \in \mathcal{A}$.

*Direm que $\mathcal{A}$ és una σ-*ÀLGEBRA *de conjunts d'Ω si es verifiquen (i), (ii) i* *(iv) Si* $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ *aleshores* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ és σ-àlgebra aleshores és àlgebra: siguin $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, i sigui $A_{n+j} = \emptyset \in \mathcal{A}$ per tot $j \geq 1$, aleshores

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

per la propietat (iv).
És evident que $\mathcal{P}(\Omega)$ és sempre una σ-àlgebra d'Ω.

1.1.2 Definició de probabilitat

Donat un experiment aleatori, volem assignar a cada esdeveniment A de l'espai mostral Ω (o bé a tots els esdeveniments $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-àlgebra d'Ω) un número $\Pr(A)$ que indiqui la probabilitat que A succeeixi, és a dir, com és de versemblant que es verifiqui A si es duu a terme l'experiment.

Però, què és realment aquest grau de versemblança, aquesta probabilitat, d'un esdeveniment A?

Interpretació clàssica (o objectiva, o geomètrica): Quan tots els resultats d'un experiment són equiprobables, la probabilitat d'un conjunt A de resultats és

$$\Pr(A) = \frac{\text{Nombre de resultats favorables a } A}{\text{Nombre de resultats possibles}}.$$

Aquesta definició està justificada pel fet que la probabilitat total és 1, per conveni, i per què la simetria del problema porta a assignar la mateixa probabilitat a cada possible resultat. No obstant això, parteix inicialment d'un problema formal ja que es basa en el concepte de resultat equiprobable i aquest porta implícit el concepte de probabilitat.

Hi ha d'altres situacions on la geometria del problema, o algun tipus de simetria, també permet definir probabilitat de forma objectiva.

Interpretació Freqüentista: La probabilitat de que es verifiqui un resultat concret d'un experiment aleatori és el límit al que tendirien les freqüències relatives d'aquest resultat si l'experiment es repetís infinites vegades sota les mateixes condicions. Per exemple, en el cas del llançament d'un dau tenim:

$$\Pr(\text{Sortir la cara 1}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\text{Nombre de vegades que surt la cara 1}}{\text{Nombre de llançaments } (n)} = \frac{1}{6},$$

si el dau és perfecte.

Nota: Podem pensar que anotem en un quadern (o bé en un full de càlcul) els resultats obtinguts al repetir l'experiment un gran nombre de vegades, fent servir una línia per a cada experiment:

Línia del quadern (experiment)	Resultat de l'experiment	Surt la cara 1?
1	2	No
2	5	No
3	6	No
4	4	No
5	1	Sí
6	3	No
7	6	No
⋮	⋮	⋮

Des del punt de vista freqüentista, la probabilitat d'un esdeveniment A serà (aproximadament) la proporció de línies del quadern en què s'indiqui que aquest esdeveniment s'ha verificat.

Problema: Hi ha experiments aleatoris que no són repetibles. Per exemple, un nou partit polític es presenta per primera vegada a les eleccions i traurà un nombre aleatori d'escons. Aquest partit mai més es tornarà a presentar per primera vegada a les eleccions.

Interpretació Subjectiva o Bayesiana: La probabilitat assignada a un resultat correspon al grau de creença personal o subjectiva en què aquest esdeveniment es verificarà si es fa l'experiment aleatori. Aquesta definició, tot i que sembli poc seriosa, pot formalitzar-se de forma consistent i presenta una gran quantitat d'avantatges (entre d'altres, que podem assignar probabilitats a esdeveniments definits per a un experiment no repetible) a més d'inconvenients obvis (dos investigadors diferents poden assignar probabilitats diferents al mateix esdeveniment).

Totes aquestes tendències o escoles van quedar enllaçades l'any 1933 per Kolmogorov:

Definició 1.1.10 (Axiomes de Kolmogorov, 1933)**.** *Donat un espai mostral* Ω *i* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *una* σ*-àlgebra d'*Ω*, definim una* FUNCIÓ DE PROBABILITAT *com una aplicació* $\Pr : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

1. $\Pr(A) \geq 0$*, per a tot* $A \in \mathcal{A}$*.*
2. $\Pr(\Omega) = 1$

3. *Axioma d'additivitat numerable: Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ són disjunts dos a dos llavors*
$$\Pr\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i).$$

1.1.3 Propietats elementals de la probabilitat

Teorema 1.1.11. *Sigui* Pr *és una funció de probabilitat.*

1. $\Pr(\emptyset) = 0$.
2. *Per qualsevol col·lecció finita $\{A_n, n = 1, \ldots, m\}$ d'esdeveniments incompatibles dos a dos tenim:*
$$\Pr(\cup_{n=1}^{m} A_n) = \sum_{n=1}^{m} \Pr(A_n).$$
3. *Per a tot $A \in \mathcal{A}$, $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.*
4. *Per a tot $A \in \mathcal{A}$, $\Pr(A) \leq 1$ (i per tant sempre tenim que $0 \leq \Pr(A) \leq 1$).*

Demostració:

1. Considerem la seqüència $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ d'esdeveniments tots ells buits ($A_i = \emptyset$ per $i = 1, \ldots, n, \ldots$). Llavors $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

   Ara pels axiomes de Kolmogorov tenim:
$$\Pr(\emptyset) = \Pr(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(\emptyset).$$
   Donat que l'únic número real no negatiu tal que sumat un nombre finit o infinit de vegades dóna ell mateix és el 0, obtenim el que volem.

2. Definim $A_n = \emptyset$ per a $n \geq m + 1$. Aleshores
$$\Pr(\cup_{n=1}^{m} A_n) = \Pr(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{m} \Pr(A_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \Pr(A_n) = \sum_{n=1}^{m} \Pr(A_n).$$
   Hem fet servir que $\Pr(\emptyset) = 0$ a l'última igualtat.

3. $A \cup A^c = \Omega \Longrightarrow \Pr(A \cup A^c) = \Pr(\Omega) = 1$.

   D'altra banda $\Pr(A \cup A^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c)$, per ser A i A^c disjunts i aplicant l'apartat anterior, que veurem tot seguit.

   Per tant $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.

4. Com que $\Pr(A) \geq 0$ per a qualsevol A, en particular $\Pr(A^c) \geq 0$. D'aquí:
$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) \geq 0 \Longrightarrow \Pr(A) \leq 1.$$

$\square$

Exemple 1.1.4.

Considereu l'experiència aleatòria de llençar una moneda equilibrada tres vegades. Abans de fer cap realització i coneixent les característiques de l'experiència, calculeu:

1. la probabilitat d'obtenir 2 cares,

2. la probabilitat d'obtenir almenys 2 cares.

Solució: L'espai mostral associat a aquest experiment és

$$\Omega = \{\text{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++}\}$$

amb $\#\Omega = 8$. La simetria de la moneda ($\Pr(\text{C}) = \Pr(+) = 1/2$) i la independència dels 3 llançaments ens permet afirmar que aquest espai mostral és equiprobable.

1. Definim els esdeveniments següents:
   $A =$ "Surten 2 cares",
   $A_i =$ "Surten 2 cares i la creu surt al llançament i-èssim", per a $i = 1, 2, 3$.
   Observeu que A_1, A_2 i A_3 són disjunts 2 a 2 ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) i que $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Per tant,
$$\Pr(A) = \Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3).$$
   Observeu ara que $\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_3) = 1/8$ perquè els 3 esdeveniments són esdeveniments elementals (estan formats per un sol element) de l'espai mostral equiprobable Ω. Per tant, $\Pr(A) = 3/8$.

2. Definim els esdeveniments
   $B=$ "Surten almenys 2 cares",
   $D=$ "Surten 3 cares" $=\{\text{CCC}\}$.
   Observeu que $B=A\cup D$ i que $A\cap D=\emptyset$. Aleshores
   $$\Pr(B)=\Pr(A)+\Pr(D)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$
   Hem fet servir que D és un esdeveniment elemental i per tant $\Pr(D)=1/8$.

$\square$

Teorema 1.1.12. *Si* $\Pr$ *és una funció de probabilitat i* $A,B\in\mathcal{A}$, *aleshores*

(a) $\Pr(B\setminus A)=\Pr(B\cap A^c)=\Pr(B)-\Pr(A\cap B)$. *A més, si* $A\subseteq B$, *aleshores* $\Pr(B\setminus A)=\Pr(B\cap A^c)=\Pr(B)-\Pr(A)$.

(b) $\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)\leq\Pr(A)+\Pr(B)$.

(c) $A\subseteq B\Longrightarrow\Pr(A)\leq\Pr(B)$.

(d) $\Pr(A\cap B)\geq\Pr(A)+\Pr(B)-1$. *(Desigualtat de Bonferroni)*

Demostració:

(a) Considerem $B=\{B\cap A\}\cup\{B\cap A^c\}$, partició de B. Llavors

$$\Pr(B)=\Pr(B\cap A)+\Pr(B\cap A^c)\Longrightarrow\Pr(B\cap A^c)=\Pr(B)-\Pr(A\cap B).$$

Si $A\subseteq B$, aleshores $A\cap B=A$ i es té la segona afirmació.

(b) Observem que $A\cup B=A\cup\{B\cap A^c\}$. Llavors

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B\cap A^c)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B).$$

(c) Observem que $A\subseteq B\Longrightarrow A\cap B=A$. Llavors

$$\Pr(B\cap A^c)=\Pr(B)-\Pr(A\cap B)=\Pr(B)-\Pr(A)\geq 0.$$

L'última desigualtat ens diu: $\Pr(A)\leq\Pr(B)$.

(d) $\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)\leq 1\Rightarrow\Pr(A\cap B)\geq\Pr(A)+\Pr(B)-1$.

Aquesta desigualtat ens permet acotar la probabilitat de dos esdeveniments simultanis en termes de les dues probabilitats individuals.

□

Teorema 1.1.13. *Si* Pr *és una funció de probabilitat, aleshores*

(a) $\Pr(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A \cap C_i)$*, per a qualsevol partició* $C_1, C_2, \ldots$

(b) $\Pr(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$*, per qualsevol col·lecció* $A_1, A_2, \ldots$ *(Desigualtat de Boole).*

(c) $\Pr(\cap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - (n-1)$*. (Desigualtat general de Bonferroni).*

Demostració:

(a) Sigui $\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega$, amb $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$, una partició. Llavors

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} C_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

Aleshores

$$\Pr(A) = \Pr(\cup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A \cap C_i).$$

Hem usat el tercer axioma de Kolmogorov en la darrera igualtat.

(b) Construïm una col·lecció de subconjunts $A_1^*, A_2^*, \ldots$ tal que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ definint:

$$A_1^* = A_1, A_i^* = A_i - \cup_{j=1}^{i-1} A_j = A_i \cap (\cup_{j=1}^{i-1} A_j)^c \subseteq A_i.$$

Llavors

$$\Pr(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Pr(\cup_{i=1}^{\infty} A_i^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i).$$

A l'última igualtat hem fet servir que $A_i^* \cap A_k^* = \emptyset$. Vegem-ho. En primer lloc, si $i > k$ llavors

$$\cap_{j=1}^{i-1} A_j^c \subseteq A_k^c$$

i per tant

$$\left(\cap_{j=1}^{i-1} A_j^c\right) \cap A_k = \emptyset.$$

Aleshores,

$$A_i^* \cap A_k^* = \left(A_i \cap \left(\cup_{j=1}^{i-1} A_j\right)^c\right) \cap \left(A_k \cap \left(\cup_{j=1}^{k-1} A_j\right)^c\right) = A_i \cap \left(\cap_{j=1}^{i-1} A_j^c\right) \cap A_k \cap \left(\cap_{j=1}^{k-1} A_j^c\right) = \emptyset.$$

(c)

$$\Pr(\cap_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \Pr((\cap_{i=1}^{n} A_i)^c) = 1 - \Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i^c)$$
$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i^c) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} (1 - \Pr(A_i)) \right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - (n-1).$$

□

Teorema 1.1.14 (Principi de inclusió-exclusió)**.** *Si* Pr *és una funció de probabilitat i* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$*, aleshores*

$$\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{i<j<k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Demostració: La demostració d'aquest teorema es pot fer per inducció en n. Hem provat el resultat per a $n = 2$ a l'apartat (b) del Teorema 1.1.12. El pas de n a $n + 1$ es fa escrivint

$$\cup_{i=1}^{n+1} A_i = (\cup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1},$$

aplicant el cas $n = 2$, la propietat distributiva i la hipòtesi d'inducció. □

Exemple 1.1.5.

El problema dels gossos. (Permutacions aleatòries, 1 de 2)

Cinc gossos d'una mateixa granja tenen dietes diferents. A l'hora de repartir el menjar es posa una dieta a cada plat però els gossos es posen a menjar sense pensar-s'ho i escullen aleatòriament un plat qualsevol. Calcular la probabilitat de que cap gos prengui la seva dieta. Sigui A_i l'esdeveniment *"Gos i amb dieta i"* per $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Observem que

Pr{ *"Cap gos pren la seva dieta"*} = 1−Pr{ *"Almenys un pren la seva dieta"*}.

Podem expressar l'esdeveniment "*Almenys un gos pren la seva dieta*" com

$$\left(\cup_{i=1}^{5} A_i\right)$$

de manera que la probabilitat que se'ns demana és:

$$p = 1 - \Pr\left(\cup_{i=1}^{5} A_i\right).$$

Per calcular-la utilitzarem principi de inclusió-exclusió, per $n = 5$:

$$\Pr\left(\cup_{i=1}^{5} A_i\right) = \sum_{i=1}^{5} \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^4 \Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_5).$$

Fent servir regles de combinatòria (vegeu Apèndix A) és fàcil comprovar que

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} \Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!},$$

de manera que

$$\Pr\left(\cup_{i=1}^{5} A_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{76}{120} = 0.6333333$$

i

$$p = 1 - \frac{76}{120} = \frac{11}{30} = 0.367.$$

Observeu que si fem aquests càlculs per a un n genèric, tenim que la probabilitat d'alguna que hi hagi algun punt fixe quan permutem aleatòriament els nombres $\{1, \ldots, n\}$ és

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \approx 1 - e^{-1} = 0.6321206.$$

si n és gran.

□

1.1.4 Espais equiprobables

Teorema 1.1.15 (Regla de Laplace)**.** *Sigui Ω un espai de probabilitat finit i equiprobable. La probabilitat d'un esdeveniment $A \subseteq \Omega$ és*

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\textit{Nombre de resultats favorables a } A}{\textit{Nombre de resultats possibles}},$$

on, per qualsevol conjunt B, $\#B$ representa el cardinal de B (el nombre d'elements de B).

Demostració: Sigui $n = \#\Omega$ i sigui

$$\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\} = \cup_{i=1}^{n} \{a_i\}.$$

Per ser els conjunts $\{a_i\}$ incompatibles i ser Ω equiprobable,

$$1 = \Pr(\Omega) = \Pr(\cup_{i=1}^n \{a_i\}) = \sum_{i=1}^n \Pr(\{a_i\}) = n \Pr(\{a_1\}),$$

i es té que

$$\Pr(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \text{ per a tot } i = 1, \ldots, n.$$

Per la seva banda, sigui $m = \#A$ i siguin $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ els seus elements. Aleshores,

$$\Pr(A) = \Pr(\cup_{j=1}^m \{a_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^m \Pr(\{a_{i_j}\}) = m \Pr(\{a_1\}) = \frac{m}{n}.$$

□

Com que als espais de probabilitat equiprobables només ens cal comptar els elements dels esdeveniments (i els de l'espai mostral) per tal de calcular probabilitats, és important conèixer regles que ens ajudin a comptar quants elements tenen certs conjunts. La combinatòria ens ofereix aquestes regles (vegeu Apèndix A).

Exemple 1.1.6.

El problema dels aniversaris. Determineu la probabilitat de que en un grup de k persones (amb $2 \le k \le 365$) hi hagi dues persones que facin l'aniversari el mateix dia. Suposarem que no hi ha bessons en aquest grup i que qualsevol dia de l'any és igualment probable.

Numerem els dies de l'any: $1, 2, \ldots, 365$.

L'espai mostral és $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i = 1, 2, \ldots, 365; i = 1, \ldots, k\}$.

Per tant $\mathrm{Card}(\Omega) = VR_{365,k} = 365^k$ i els 365^k esdeveniments són equiprobables.

Considerem ara els esdeveniments:

A= *"Almenys dos aniversaris coincideixen"* i

A^c= *"No hi ha coincidències"*.

El número de punts a Ω amb totes les coordenades diferents és $V_{365,k} = \frac{365!}{(365-k)!}$. Llavors:

$$\Pr(A^c) = \frac{V_{365,k}}{365^k} \text{ i per tant } \Pr(A) = 1 - \frac{V_{365,k}}{365^k}.$$

Fent càlculs per a diferents valors de k obtenim:

k	5	10	15	20	22	23	25	30	40	50	60
p	.027	.117	.253	.411	.476	.507	.509	.706	.891	.970	0.994

Aquestes probabilitats es poden aproximar de la següent forma per a k *petits* comparats amb 365. Observeu que

$$P(A^c) = \frac{V_{365,k}}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-k+1)}{365 \overset{(k)}{\cdots} 365} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \overset{(k)}{\cdots} \left(1 - \frac{1}{365}\right)$$

Prenent logaritmes i aproximant $\log(1+x) \approx x$ per a *x propers a 0* (desenvolupament de Taylor d'ordre 1),

$$\log P(A^c) = \sum_{i=1}^{k-1} \log\left(1 - \frac{i}{365}\right) \approx -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{365} = -\frac{(k-1)k}{730}.$$

Per tant, $P(A) \approx 1 - e^{-(k-1)k/730}$.

```
> k <- c(5,10,15,20,22,23,25,30,40,50,60)
> sapply(k, function(k){1-prod((365-k+1):365)/365^k})
 [1] 0.02713557 0.11694818 0.25290132 0.41143838 0.47569531 0.50729723
 [7] 0.56869970 0.70631624 0.89123181 0.97037358 0.99412266
> 1-exp(-k*(k-1)/730)
 [1] 0.02702536 0.11599068 0.24999187 0.40580513 0.46893811 0.50000175
 [7] 0.56041220 0.69632002 0.88199005 0.96513125 0.99216626
```

□

1.2 Probabilitat condicionada i independència d'esdeveniments

Ara intentarem calcular probabilitats d'esdeveniments quan tinguem informació parcial del resultat de l'experiment.

Exemple 1.2.1.
Considerem l'experiment de llançar dos daus equilibrats:

$$\Omega = \{(i,j) : i \in \{1,\ldots,6\}, i \in \{1,\ldots,6\}\}, \#\Omega = 6 \cdot 6 = 36, \Omega \text{ és equiprobable.}$$

Considerem els següents esdeveniments:
$A =$ *"Al menys en un dels daus surt un 6"*.

$B =$ *"El segon dau és més gran que el primer"*,
Canvia la nostra percepció de la probabilitat de que esdevingui B quan ens diuen que ha esdevingut A?

Voem calcular la probabilitat de que esdevingui B, sabent que s'ha produït A, a la qual anomenarem probabilitat de B condicionada a A.

Anotem els resultats d'aquest experiment a les línies del quadern, afegint una nova columna $(B|A)$, on anotarem si es produeix B o no només en aquells casos en que s'hagi verificat A. La resta dels casos, on no es verifica A, no ens diuen res sobre la probabilitat de B condicionada a A.

Experimento	Dado 1	Dado 2	A	B	$B\|A$
1	1	6	Sí	Sí	Sí
2	2	2	No	No	–
3	5	2	No	No	–
4	4	5	No	Sí	–
5	6	1	Sí	No	No
6	1	1	No	No	–
7	6	6	Sí	No	No
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Per a un nombre n d'experiments, la freqüència relativa de B condicionada a A es calcularà així:

$$\mathrm{fr}(B|A) = \frac{\#(A\cap B)}{\#A} = \frac{\frac{\#(A\cap B)}{n}}{\frac{\#A}{n}} = \frac{\mathrm{fr}(A\cap B)}{\mathrm{fr}(A)}.$$

Observeu que si n és gran,

$$\Pr(B|A) \approx \mathrm{fr}(B|A) = \frac{\mathrm{fr}(A\cap B)}{\mathrm{fr}(A)} \approx \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(A)}.$$

□

1.2.1 Probabilitat condicionada

Per analogia amb el que passa amb les freqüències relatives condicionades, es defineix la probabilitat condicionada de la següent forma.

Definició 1.2.1. *Sigui $A \in \mathcal{A}$ amb $\Pr(A) > 0$. Per a qualsevol esdeveniment $B \in \mathcal{A}$ definim*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B\cap A)}{\Pr(A)}$$

i l'anomenem PROBABILITAT DE B CONDICIONADA A A.

Observeu que $\Pr(B|A) = \Pr((B \cap A)|A)$ i que si B i C són esdeveniments de $\mathcal{A}$ tals que $B \cap A = C \cap A$ aleshores $\Pr(B|A) = \Pr(C|A)$.

Per altra banda, no té sentit definir probabilitats condicionades a un esdeveniment A si $\Pr(A) = 0$.

1.2.2 Esdeveniments independents

Direm que dos esdeveniments A i B són independents si la probabilitat de qualsevol d'ells no varia si el condicionem per l'altre. És a dir, saber que s'ha verificat un dels esdeveniments (o saber que no s'ha verificat) no aporta informació rellevant sobre la probabilitat que l'altre s'hagi verificat o no:

$$\Pr(B|A) = \Pr(B|\neg A) = \Pr(B).$$

De la definició de $\Pr(B|A)$, es segueix que en aquest cas

$$\frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} = \Pr(B) \Longrightarrow \Pr(B \cap A) = \Pr(A)\Pr(B).$$

Aquest es precisament la definició formal d'independència d'esdeveniments.

Definició 1.2.2. *Direm que dos esdeveniments A i B són* INDEPENDENTS *si*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B).$$

Propietat
Si dos esdeveniments A i B són independents aleshores:

$$A \text{ i } B^c, A^c \text{ i } B, A^c \text{ i } B^c$$

són, cada parella respectivament, independents.

Vegem per exemple que ho són A^c i B:

$$\Pr(A^c \cap B) = \Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) =$$

$$\Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) = (1 - \Pr(A))\Pr(B) = \Pr(A^c)\Pr(B).$$

Definició 1.2.3. *Direm que els esdeveniments $A_1, \ldots, A_n$ són* MÚTUAMENT INDEPENDENTS *si per a cada subconjunt $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ es té que*

$$\Pr\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \Pr(A_i).$$

Teorema 1.2.4. *1. Si A i B són independents i $\Pr(B) > 0$, llavors*

$$\Pr(A|B) = \Pr(A).$$

2. *Llei de la multiplicació. Si* $\Pr(B) > 0$,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\Pr(B).$$

Si $\Pr(A) > 0$ *i* $\Pr(B) > 0$,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\Pr(B) = \Pr(B|A)\Pr(A).$$

3. *Descomposició de la probabilitat de la intersecció com a producte de probabilitats condicionades. Siguin* $A_1, \ldots, A_n$ *esdeveniments tals que* $\Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, *aleshores*

$$\Pr(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_n|A_{n-1} \cap \cdots \cap A_1)\Pr(A_{n-1}|A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1) \cdots$$
$$\cdots \Pr(A_3|A_2 \cap A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_1).$$

Exemple 1.2.2.

El problema dels empats. (Permutacions aleatòries, 2 de 2)

Suposem que posem en fila totes les cartes d'un joc de n cartes. Disposem també d'un altre joc similar de n cartes. Les barregem i posem una carta al damunt de cada una de les cartes anteriors. Quina és la probabilitat P_n de que hi hagi almenys una coincidència?

Aquest problema admet altres versions. Per exemple: Tenim n cartes i n sobres. Distribuïm les n cartes dins dels n sobres aleatòriament. Quina és la probabilitat P_n de que almenys una persona rebi la carta que li correspon?

També seria un exemple tenir n fotografies d'adults i n fotografies de nadons.

Anem a resoldre la segona versió del problema. Denotem per A_i l'esdeveniment: *"La carta i dins del sobre correcte"*, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ens interessa calcular $P_n = \Pr(\cup_{i=1}^n A_i)$.

Tal com hem vist al Teorema 1.1.14, tenim:

$$\Pr(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \ldots + (-1)^n \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Ara hem d'anar calculant cadascuna de les probabilitats:

$$\Pr(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ i } \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) = 1.$$

Ara usem la definició de probabilitat condicionada:

$$\Pr(A_i \cap A_j) = \Pr(A_j|A_i)\Pr(A_i) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Llavors

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \Pr(A_i \cap A_j) = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Anàlogament:

$$\Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

llavors

$$\sum \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{3!}.$$

En general $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$. Per tant

$$P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Observem que és una successió oscil·lant quan n augmenta. Es pot veure que quan n creix entre els parells tendeix al mateix límit que quan creix entre els senars. Llavors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n = 1 - \frac{1}{e} = 0.63212.$$

(Recordeu l'expressió en serie de la funció exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

i aplique-la al cas $x = -1$). □

1.2.3 Teorema de la probabilitat total

Teorema 1.2.5 (Teorema de la probabilitat total). *Si* $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ *és una partició d'*Ω *amb* $\Pr(A_n) > 0$ *per tot* n *i* $B \in \mathcal{A}$ *aleshores*

$$\Pr(B) = \sum_n \Pr(B|A_n)\Pr(A_n).$$

Demostració:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(B \cap \Omega) = \Pr\left(B \cap \{\cup_n A_n\}\right) = \Pr\left(\cup_n \left(B \cap A_n\right)\right) \\ &= \sum_n \Pr(B \cap A_n) = \sum_n \Pr(B|A_n)\Pr(A_n)\end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.3.
En una certa ciutat, el 30% de la gent és Conservadora, el 50% és Liberal i el 20% és Independent. En la darrera elecció van votar el 65% dels Conservadors, el 82% dels Liberals i el 50% dels Independents.

Quin percentatge de la població va abstenir-se?
Una altra manera de preguntar el mateix: *Seleccionem una persona de la ciutat a l'atzar. Quina probabilitat hi ha de que es vagi abstenir?*
Solució:
Definim els esdeveniments següents:
C: La persona triada és conservadora,
L: La persona triada és liberal,
I: La persona triada és independent,
A: La persona triada es va abstenir.

Els esdeveniments C, L i I formen una partició de l'espai mostral. Aplicant el Teorema de la Probabilitat Total,

$$\Pr(A) = \Pr(A|C)\Pr(C) + \Pr(A|L)\Pr(L) + \Pr(A|I)\Pr(I)$$

$$= 0.65 \cdot 0.30 + 0.82 \cdot 0.50 + 0.50 \cdot 0.20 = 0.295.$$

Aleshores el 29.5% de la població es va abstenir.

□

1.2.4 Teorema de Bayes

Teorema 1.2.6 (Teorema de Bayes)**.** *Sigui* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *partició d'* Ω *amb* $\Pr(A_j) > 0$ *per* $j = 1, \ldots, n, \ldots$.

Sigui $B \in \mathcal{A}$ *amb* $\Pr(B) > 0$.

Llavors:

$$\Pr(A_j|B) = \frac{\Pr(B|A_j)\Pr(A_j)}{\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(B|A_n)\Pr(A_n)} \quad \text{per } j = 1, \ldots, n, \ldots.$$

Demostració: Per definició d'esperança condicionada,

$$\Pr(A_j|B) = \frac{\Pr(A_j \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A_j)\Pr(A_j)}{\Pr(B)}.$$

Pel Teorema de la Probabilitat Total, el denominador és

$$\Pr(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(B|A_n)\Pr(A_n)$$

i es té el resultat buscat. □

Exemple 1.2.4.
En un barret de mag hi ha 3 monedes: una té 2 cares, una altra 2 creus i la tercera a cara i 1 creu. En traiem una a l'atzar i la deixem caure a la taula: surt cara. Quina és la probabilitat que a sota hi hagi una creu?
És equivalent preguntar-se això: quina és la probabilitat que la moneda triada sigui la normal, sabent que ha sortit cara?
□

Exemple 1.2.5.
(Falsos positius en proves clíniques).
En aplicar un test per a detectar un tipus de càncer a una persona que el té, la probabilitat de donar positiu és 0.95 i la de donar negatiu 0.05. Si s'aplica a una persona que no el té, dóna positiu amb probabilitat 0.04 i negatiu amb probabilitat 0.96. Suposem que a la població, una persona de cada $100,000$ té aquest càncer. En seleccionem una a l'atzar i, en aplicar-li aquest test, dóna positiu. Calculeu la probabilitat que tingui aquest tipus de càncer.
Solució:
Definim els següents esdeveniments: C = "La persona té càncer", No C = "La persona té càncer", $+$ = "El test dóna positiu", $-$ = "El test dóna negatiu".

Aplicant el Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned}
\Pr(C/+) &= \frac{\Pr(+/C)\Pr(C)}{\Pr(+/C)\Pr(C) + \Pr(+/\text{No } C)\Pr(\text{No } C)} \\
&= \frac{0.95\frac{1}{100000}}{0.95\frac{1}{100000} + 0.04\left(1 - \frac{1}{100000}\right)} \\
&= \frac{0.0000095}{0.0400091} = \frac{95}{400091} = 0.000237446.
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.6.
(Preguntes indiscretes).
Es demana a un grup d'estudiants si han copiat a algun examen. Els estudiants responen tirant una moneda, diuen la veritat si surt cara i, si surt creu, tornen a tirar la moneda i responen 'sí' si surt cara i 'no' si surt creu. Amb aquest procediment s'obtenen un 70% de respostes afirmatives. Quina és la probabilitat que un estudiant hagi copiat algun examen? Quina és aquesta probabilitat si ha contestat 'sí'?
Solució:
Nota: S'hauria de resoldre sense fer servir variables aleatòries.
Diem X la variable indicadora d'haver copiat, Y la resposta i Z la variable indicadora de creu a la primera tirada de la moneda. Sabem que $\Pr(Y = 1) = 0.7$.

$$
\begin{aligned}
0.7 = \Pr(Y = 1) &= \Pr(Y = 1|Z = 0)(1/2) + \Pr(Y = 1|Z = 1)(1/2) \\
&= \Pr(X = 1)(1/2) + (1/4),
\end{aligned}
$$

d'on $\Pr(X = 1) = 0.9$. D'altra banda, $\Pr(X = 1|Y = 1) = \frac{\Pr(Y=1|X=1)\Pr(X=1)}{\Pr(Y=1)}$, on

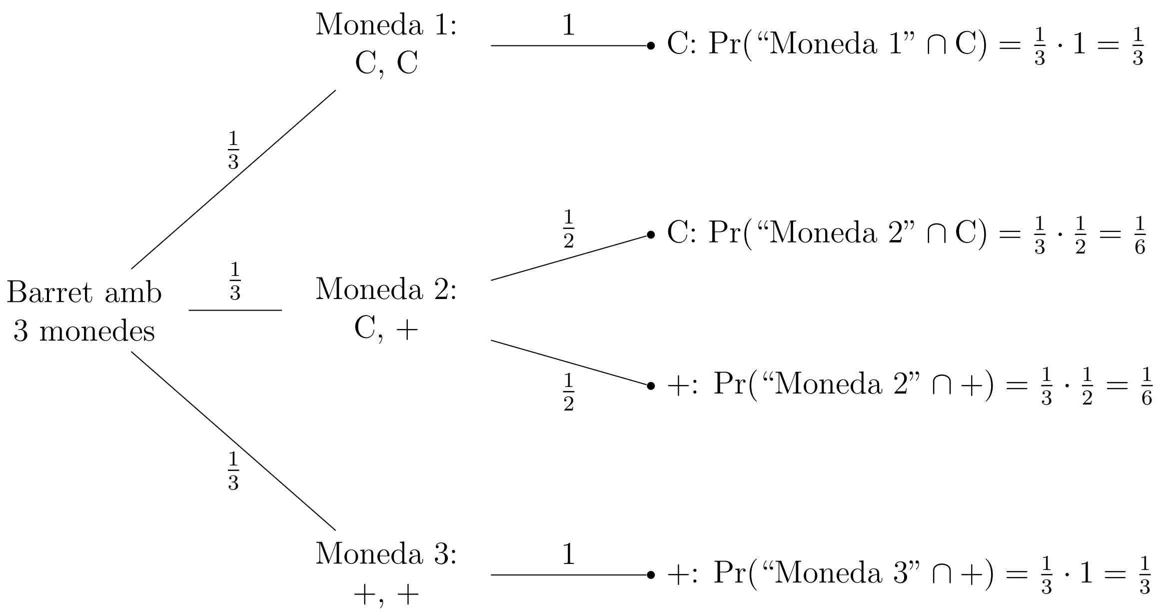
$$
\begin{aligned}
\Pr(Y = 1|X = 1) =& \Pr(Y = 1|X = 1, Z = 1)\Pr(Z = 1|X = 1) \\
&+ \Pr(Y = 1|X = 1, Z = 0)\Pr(Z = 0|x = 1) \\
=&(1/2)(1/2) + (1/2) = 3/4.
\end{aligned}
$$

□

1.2.5 Representació gràfica de problemes de probabilitat: arbres i taules

Exemple 1.2.7.
En un barret de mag hi ha 3 monedes: una té 2 cares, una altra 2 creus i la tercera a cara i 1 creu. En traiem una a l'atzar i la deixem caure a la taula.

Representació del problema en forma d'arbre.



Representació del problema en forma de taula. A cada cel·la de la taula escrivim la probabilitat de la intersecció corresponent:

	C	+
Moneda 1	1/3	0
Moneda 2	1/6	1/6
Moneda 3	0	1/3

□

Apèndix A

Combinatòria

Hemos visto que en el caso de espacios de probabilidad equiproblables sólo necesitamos contar cuántos elementos hay en el espacio muestral y cuántos hay en un suceso para calcular su probabilidad. Resultarán entonces útiles las técnicas que nos ofrece la combinatoria para contar los elementos de ciertos conjuntos.

Definició A.0.7 (Producto cartesiano)**.** *El producto cartesiano de k conjuntos finitos A_i, con $\#A_i = c_i < \infty$, $i = 1, \ldots, k$, es*

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{(a_1, \ldots, a_k) : \ a_i \in A_i, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Proposició A.0.8.

$$\#\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} (\#A_i) = \prod_{i=1}^{k} c_i.$$

Demostració:
Por inducción en k, teniendo en cuenta que

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} A_i\right) \times A_k$$

y que la propiedad es trivial para $k = 2$. $\square$

Corol·lari A.0.9 (Principio de la multiplicación)**.** *El número total de maneras distintas de realizar varias elecciones sucesivas es el producto del número de formas diferentes en que puede llevarse a cabo cada una de las elecciones individuales.*

Exemple A.0.8.

Se desea ir de Madrid a Mallorca pasando por Barcelona. El viaje de Madrid a Barcelona se puede hacer de 3 formas diferentes,
$\{$*coche, tren, avión*$\}$,
y de Barcelona a Mallorca se puede ir de 2 formas,
$\{$*avión, barco*$\}$.
¿De cuántas formas se puede hacer el viaje?

De $3 \times 2 = 6$ formas. $\square$

A.1 Variaciones

Definició A.1.1 (Variaciones)**.** *Sea un conjunto* A *con* $\#A = n$ *y* k *un número natural con* $0 \leq k \leq n$. *Se define el conjunto de las* "variaciones de elementos de A tomados de k en k" *como*

$$V(A,k) = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in A, a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}.$$

A su cardinal se le llama "variaciones de n elementos tomados de k en k" *y se le denota por* $V_{n,k}$.

Proposició A.1.2. $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Demostració: Para tener un elemento de $V(A,k)$ hay que realizar k elecciones consecutivas. Por el principio de multiplicación se tiene que

$$\#V(A,k) = V_{n,k} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) =$$

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$\square$

Exemple A.1.1.

Un niño que está aprendiendo a hablar tiene un vocabulario limitado a diez palabras. Es capaz de decir tres de ellas seguidas sin repetir ninguna. ¿Cuántas frases es capaz de articular?

El niño tiene que elegir 3 palabras distintas entre las 10 que conoce, luego podrá decir

$$V_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

frases. $\square$

A.2 Permutaciones

Definició A.2.1 (Permutaciones)**.** *Sea un conjunto A con $\#A = n$. Se define el conjunto de las* "permutaciones de los elementos de A" *como*

$$Perm(A, n) = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A, a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\} = V(A, n).$$

A su cardinal se le llama "permutaciones de n elementos" *y se le denota por P_n.*

Proposició A.2.2. $P_n = n!$.

Demostració: Trivial, usando $\mathrm{Perm}(A, n) = V(A, n)$ y que $V_{n.n} = n!$. $\square$

Exemple A.2.1.
Se desea ordenar 12 libros en una estantería. ¿De cuántas formas puede hacerse?
De $P_{12} = 12! = 479.001.600$ formas. $\square$

A.3 Variaciones con repetición

Definició A.3.1 (Variaciones con repetición)**.** *Sea un conjunto A con $\#A = n$. Se define el conjunto de las* "variaciones con repetición de elementos de A tomados de k en k" *como*

$$VR(A, k) = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in A, i = 1, \ldots, k\}.$$

A su cardinal se le llama "variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k" *y se le denota por $VR_{n,k}$.*

Proposició A.3.2. $VR_{n,k} = n^k$.

Demostració: Para tener un elemento de $VR(A,k)$ hay que realizar k elecciones consecutivas, cada una de las cuales se hace entre los n de A. Por el principio de multiplicación se tiene que

$$\#VR(A,k) = VR_{n,k} = n^k.$$

$\square$

Exemple A.3.1.

¿Cuántas quinielas posibles hay de 14 casillas, cada una de las cuales ha de rellenarse con un único resultado, elegido entre $\{1,\ X,\ 2\}$?

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969$$

$\square$

A.4 Permutaciones con repetición

Definició A.4.1 (Permutaciones con repetición)**.** *Sea un conjunto A con $\#A = n$ tal que no todos sus n elementos son distinguibles: los hay de r clases $(r \leq n)$ y de la clase j hay n_j elementos, $j = 1, \ldots, r$, con $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$.*

El conjunto de las "permutaciones con repetición de los elementos de A donde el elemento j se repite n_j veces, $j = 1, \ldots, r$" *es el conjunto de ordenaciones posibles de los elementos de A, teniendo en cuenta que dos ordenaciones se consideran idénticas si sólo difieren en la ordenación de elementos de la misma clase. Su cardinal se denota por $PR_n^{n_1,\ldots,n_r}$.*

Proposició A.4.2.

$$PR_n^{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

Demostració: Sea B el conjunto obtenido al poner etiquetas identificativas a cada elemento de A:

$$A = \{\ \begin{array}{l} a_1, a_1, \overset{(n_1)}{\ldots}, a_1, \\ a_2, a_2, \overset{(n_2)}{\ldots}, a_2, \\ \vdots \\ a_r, a_r, \overset{(n_r)}{\ldots}, a_r\} \end{array} \qquad B = \{\ \begin{array}{l} a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}, \\ a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n_2}, \\ \vdots \\ a_r^1, a_r^2, \ldots, a_r^{n_r}\} \end{array}$$

Así, una ordenación de los elementos de B se puede hacer mediante las dos elecciones consecutivas siguientes:

1. Elegir una permutación con repetición de los elementos de A. Esto se puede hacer de $PR_n^{n_1,\dots,n_r}$ formas.

2. Elegir una ordenación de los elementos de cada una de las r clases. Esto se puede hacer de $P_{n_1} \times \cdots \times P_{n_r}$ formas.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación,

$$P_n = \#\mathrm{Perm}(B) = PR_n^{n_1,\dots,n_r} \times P_{n_1} \times \cdots \times P_{n_r},$$

de donde se sigue que

$$PR_n^{n_1,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

□

A.5 Combinaciones

Definició A.5.1 (Combinaciones)**.** *Sea el conjunto A con $\#A = n$ y k un número natural con $0 \leq k \leq n$. El* "conjunto de las combinaciones de los elementos de A tomados de k en k" *es el conjunto de los subconjuntos de A con k elementos:*

$$C(A,k) = \{B \subseteq A : \#B = k\} = \{\{a_1,\dots,a_k\} : a_i \in A, a_i \neq a_j \ \textit{si}\ i \neq j\}.$$

A su cardinal se le llama "combinaciones de n elementos tomados de k en k" *y se denota por*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Proposició A.5.2. $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Demostració: Para elegir un $V(A,k)$ podemos hacer las dos elecciones consecutivas siguientes:

1. Elegir una $C(A,k)$. Esto se puede hacer de $C_{n,k}$ formas.

2. Elegir una ordenación de esos k elementos. Esto se puede hacer de P_k formas.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación,

$$V_{n,k} = \#V(A,k) = C_{n,k}P_k,$$

de donde se sigue que

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Exemple A.5.1.

¿De cuántas maneras distintas puede rellenarse un boleto de lotería primitiva (se marcan seis números entre el 1 y el 49)?
Hay que seleccionar 6 números distintos entre los 49 (no importa el orden y no hay repeticiones), luego hay

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13.983.816$$

maneras de rellenar el boleto.

□

Proposició A.5.3. *Sea Ω uin conjunto con $\#\Omega = n$. Sea $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de las partes de Ω. Entonces*

$$\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n.$$

Demostració:

$$\#\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{i=0}^{n} C(\Omega, i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n.$$

Hem fet servir la fòrmula del Binomi de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

□

A.6 Combinaciones con repetición

Definició A.6.1 (Combinaciones con repetición)**.** *Sea el conjunto A con $\#A = n$. Se realizan k extracciones con reemplazamiento de elementos de A y se anotan los resultados: $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, con $a_{i_j} \in A$, $j = 1, \ldots, k$. El* "conjunto de combinaciones con repetición de elementos de A extraídos de k en k" *es el conjunto de posibles subconjuntos no ordenados $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ obtenidos de esa forma. A su cardinal se le llama* combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k *y se le denota por $CR_{n,k}$.*

Cada uno de esos subconjuntos está identificado unívocamente por

$$(r_1, \ldots, r_n), \text{ con } r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \sum_{i=1}^{n} r_i = k,$$

donde r_i indica cuántas veces aparece el elemento i-ésimo de A, a_i, en la combinación con repetición $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$.

Así, el número de *combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k* es el mismo que el de soluciones de la ecuación en $r_1, \ldots, r_n$, con $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = k.$$

Obsérvese que ese número también es igual al número de formas en que pueden repartirse k bolas idénticas en n urnas:

```
  r1        r2        r3                  rn
|  o |    |o o |    |    |              |    |
| o  |    | o o|    |    |    .....     | o  |
\----/    \----/    \----/              \----/
Urna 1    Urna 2    Urna 3              Urna n
```

La urna i tendrá r_i bolas si y sólo si el elemento i-ésimo de A ha aparecido en r_i extracciones.

Para calcular $CR_{n,k}$ contaremos los posibles repartos de k bolas en n urnas. Cada uno de estos repartos se puede representar mediante la concatenación de k símbolos "`o`" que representen las bolas y $(n-1)$ símbolos "`|`" que representen las separaciones entre urnas. Por ejemplo, el reparto anterior puede representarse así:

```
oo|oooo|| .... |o
```

Así, hay tantos repartos de k bolas en n urnas como formas hay de ordenar las k bolas y las $(n-1)$ separaciones entre urnas:

$$CR_{n,k} = PR_{n+k-1}^{(n-1),k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Hemos probado la siguiente proposición.

Proposició A.6.2. $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.