Probabilitat i Estadística 1

Problemes Tema 3. Vectors aleatoris

(Professors: Pedro Delicado, Oriol Serra)

Variables aleatòries multivariants discretes.

1. Llencem una moneda tres cops. Designem per X el nombre de cares que han sortit, i per Y el valor absolut de la diferència entre el nombre de cares i de creus. Trobeu la distribució conjunta de (X, Y).

   Solució:
   $\text{Suport}(X) = \{0, 1, 2, 3\}$, $\text{Suport}(Y) = \{1, 3\}$. Observeu que

   $$X = 0 \Rightarrow Y = 3;\ X = 1 \Rightarrow Y = 1;\ X = 2 \Rightarrow Y = 1;\ X = 3 \Rightarrow Y = 3.$$

   Per tant,

   $$\Pr(X = 0, Y = 1) = \Pr(X = 1, Y = 3) = \Pr(X = 2, Y = 3) = \Pr(X = 3, Y = 1) = 0,$$

   $$\Pr(X = 0, Y = 3) = \Pr(X = 0);\ \Pr(X = 1, Y = 1) = \Pr(X = 1);$$
   $$\Pr(X = 2, Y = 1) = \Pr(X = 2);\ \Pr(X = 3, Y = 3) = \Pr(X = 3).$$

   Aleshores, la distribució conjunta és aquesta:

		y	
	$\Pr(X = x, Y = y)$	1	3
	0	0	1/8
x	1	3/8	0
	2	3/8	0
	3	0	1/8

2. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes. Trobeu la funció de probabilitat conjunta de (X, Y) i escriviu-la en forma de taula. Escriviu-hi també les distribucions marginals de X i de Y.

   Solució:
   $X \sim \text{Unif.Discr}\{1, 2, 3\}$, aleshores la funció de probabilitat marginal de X és

   $$\Pr(X = x) = \frac{1}{3},\ x \in \{1, 2, 3\}.$$

   De l'enunciat es segueix que

   $$(Y|X = x) \sim B(x, 1/2),\ x \in \{1, 2, 3\}.$$

   Per tant

   $$\Pr(Y = y|X = x) = \binom{x}{y}\frac{1}{2^x},\ y \in \{0, \dots, x\}, x \in \{1, 2, 3\}.$$

   La probabilitat conjunta serà

   $$\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(Y = y|X = x)\Pr(X = x),$$

   $y \in \{0, \dots, x\}, x \in \{1, 2, 3\}$. Aleshores la taula de la distribució conjunta i marginals quedarà així:

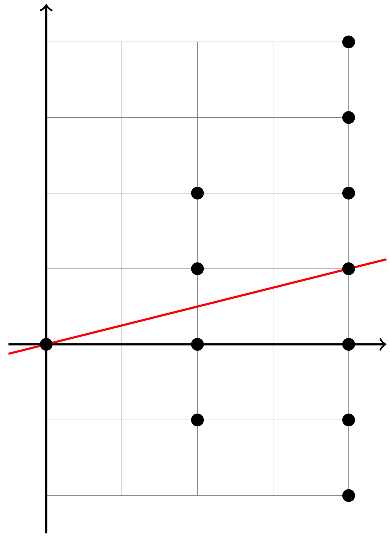
$\Pr(X=x, Y=y)$		y 0	1	2	3	$\Pr(X=x)$
	1	4/24	4/24	0	0	1/3
x	2	2/24	4/24	2/24	0	1/3
	3	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
	$\Pr(Y=y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	

3. Sigui (X,Y) una v.a. bivariant discreta. Se sap que X pren els valors 0, 2 i 4 amb probabilitats 1/2, 1/4 i 1/4, respectivament. També se sap que, per a $x \in \{0,2,4\}$, la distribució condicionada de Y, donat que $X=x$, és uniforme discreta en els enters que van des de $-x/2$ fins a x.

   (a) Marqueu en el pla els punts que pertanyen al suport de la distribució conjunta de (X,Y).
   (b) Caluleu la funció de probabilitat conjunta de X, Y.
   (c) Calculeu la distribució marginal de Y.
   (d) Doneu la distribució de probabilitat de X condicionada a que $Y=0$.
   (e) Calculeu $E(XY)$.

   Solució:

   (a) Condicionat a que $X=0$, Y és degenerada al 0. Condicionat a que $X=2$, Y pren els valors $-1,0,1,2$ amb probabilitat 1/4 cadascun. Condicionat a que $X=4$, Y pren els valors $-2,-1,0,1,2,3,4$ amb probabilitat 1/7 cadascun. Per tant, els punts del suport de (X,Y) són els marcats al gràfic.



   (b) Fent servir la fórmula $\Pr(X=x, Y=y) = \Pr(Y=y|X=x)\Pr(X=x)$, construïm la taula de probabilitats conjuntes:

$\Pr(X=x, Y=y)$		-2	-1	0	y 1	2	3	4	$\Pr(X=x)$
	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2
x	2	0	1/16	1/16	1/16	1/16	0	0	1/4
	4	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28	1/4
	$\Pr(Y=y)$	1/28	11/112	67/112	11/112	11/112	1/28	1/28	1

   (c) Mireu l'última fila de la taula anterior.

   (d) Farem servir que

$$\Pr(X=x|Y=0) = \frac{\Pr(X=x, Y=0)}{\Pr(Y=0)}$$

   per a construir la taula de la distribució condicionada de X donat que $Y=0$:

x	0	2	4
$\Pr(X=x\|Y=0)$	$\frac{1/2}{67/112}=\frac{56}{67}$	$\frac{1/16}{67/112}=\frac{7}{67}$	$\frac{1/28}{67/112}=\frac{4}{67}$

(e)

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j \Pr(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x \in 0,2,4} \sum_{y=-x/2}^{x} xy \Pr(X = x, Y = y) =$$

$$0\frac{1}{2} + (-2+0+2+4)\frac{1}{16} + (-8-4+0+4+8+12+16)\frac{1}{28} = \frac{4}{16} + \frac{28}{28} = \frac{5}{4}$$

4. Llencem n cops una moneda (amb probabilitat p de cara) i definim

$$X = \text{nombre de cares}, \; Y = \text{nombre de creus},$$

Aleshores $X \sim B(n,p)$, $Y \sim B(n, 1-p)$ i X i Y no són independents, perquè sempre que coneguem X coneixerem Y: $Y = n - X$.

Considerem ara el cas en que triem aleatòriament el nombre de llançaments de la moneda. Concretament llencem la moneda un nombre aleatori N de vegades, amb $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Calculeu la funció de probabilitat conjunta de (X, N).

(b) Calculeu la funció de probabilitat marginal de X i deduïu-ne que $X \sim \text{Poisson}(p\lambda)$. De la mateixa manera es prova que $Y \sim \text{Poisson}((1-p)\lambda)$.

(c) Proveu que ara X i Y son independents.

Solució:

$$(X|_{N=n}) \sim B(n,p) \Rightarrow \Pr(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, \ldots, n.$$

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow \Pr(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots$$

(a) Per a $n = 0, 1, \ldots$ i $x = 0, 1, \ldots, n$,

$$\Pr(X = x, N = n) = \Pr(X = x | N = n) \Pr(N = n)$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

(b) Recordeu que per a tot nombre real t

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Calculem ara la funció de probabilitat marginal de X. Per a $x = 0, 1, \ldots$,

$$\begin{aligned}
\Pr(X = x) = &\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X = x, N = n) \\
&(\Pr(X = x, N = n) = 0 \text{ si } n < x) \\
= &\sum_{n=x}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
= &e^{-\lambda} \frac{p^x \lambda^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\lambda^{n-x}(1-p)^{n-x}}{(n-x)!} \\
&(\text{canvi de variable en el sumatori: } k = n - x) \\
= &e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^x}{x!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (1-p)^k}{k!} \\
= &e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^x}{x!} e^{\lambda(1-p)} \\
= &e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^x}{x!},
\end{aligned}$$

que és la funció de probabilitat d'una Poisson$(p\lambda)$.

(c) S'ha de provar que

$$\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x)\Pr(Y = y)$$

per a tot $x = 0, 1, 2, \ldots$, i tot $y = 0, 1, 2, \ldots$. La probabilitat conjunta de X i Y és

$$\begin{aligned}
\Pr(X = x, Y = y) &= \Pr(X = x, X + Y = x + y) \\
&= \Pr(X = x, N = x + y) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x+y}}{x!y!}p^x(1-p)^y \\
&= e^{-p\lambda}e^{-(1-p)\lambda}\frac{\lambda^x\lambda^y}{x!y!}p^x(1-p)^y \\
&= e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^x}{x!}\; e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^y}{y!} \\
&= \Pr(X = x)\;\Pr(Y = y).
\end{aligned}$$

Covariància i correlació

5. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes.

   (a) Calculeu l'esperança i la variància de X i de Y.

   (b) Calculeu la covariància i la correlació de X i Y.

   Solució:
   Al problema 2 es va calcular la distribució conjunta i marginals:

		y				
$\Pr(X = x, Y = y)$		0	1	2	3	$\Pr(X = x)$
	1	4/24	4/24	0	0	1/3
x	2	2/24	4/24	2/24	0	1/3
	3	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
	$\Pr(Y = y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	

   (a) $E(X) = (1 + 2 + 3)/3 = 2$.
   $E(Y) = (11 + 10 + 3)/24 = 1$.
   $E(X^2) = (1 + 4 + 9)/3 = 14/3$.
   $E(Y^2) = (11 + 20 + 9)/24 = 40/24 = 5/3$.
   $V(X) = 14/3 - 2^2 = 2/3$.
   $V(Y) = 5/3 - 1^2 = 2/3$.

   (b) $E(XY) = (4 + 8 + 9 + 8 + 18 + 9)/24 = 56/24 = 7/3$. $Cov(X, Y) = 7/3 - 2 \cdot 1 = 1/3$.

$$Corr(X, Y) = \frac{1/3}{\sqrt{(2/3)(2/3)}} = 1/2.$$

6. Llencem una moneda tres cops. Designem per X el nombre de cares que han sortit, i per Y el valor absolut de la diferència entre el nombre de cares i de creus. Comproveu que X i Y tenen covariància 0, tot i no ser independents.

   Solució:

Al problema 1 es va calcular la distribució conjunta de (X, Y). Ara afegim les marginals:

	$\Pr(X = x, Y = y)$	y 1	3	$\Pr(X = x)$
	0	0	1/8	1/8
x	1	3/8	0	3/8
	2	3/8	0	3/8
	3	0	1/8	1/8
	$\Pr(Y = y)$	3/4	1/4	

Ara calculem la covariància entre X i Y:

$$E(XY) = \sum_{x_i}\sum_{y_i} x_i y_i P(X = x_i, Y = y_i) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}9 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}; E(Y) = \frac{3}{4}1 + \frac{1}{4}3 = \frac{6}{4} \Rightarrow E(X)E(Y) = \frac{9}{4} = E(XY)$$
$$\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$$

Però X i Y no són independents perquè, per exemple

$$\Pr(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \Pr(X = 0)\Pr(Y = 1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}.$$

7. Siguin X i Y v.a. amb la mateixa variància. Calculeu $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$.

Solució:

$$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X - Y) + Cov(Y, X - Y) =$$
$$Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) =$$
$$Cov(X, X) - Cov(Y, Y) = Var(X) - Var(Y) = 0$$

8. Siguin X, Y, Z tres v.a. tals que $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Var}(Z) = 8$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X, Z) = -1$, $\mathrm{Cov}(Y, Z) = 2$. Determineu:

(a) $\mathrm{Var}(X + Y + Z)$.
(b) $\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1)$.

Solució:

(a) $\mathrm{Var}(X + Y + Z) = 17$.
(b) $\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1) = 59$.

9. Siguin $\{X_r : 1 \le r \le n\}$ v.a.i.i.d. amb variància finita. Definim $\bar{X} = n^{-1}\sum_{r=1}^{n} X_i$. Proveu que $\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_r - \bar{X}) = 0$.

Solució:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_r - \bar{X}) &= \mathrm{Cov}(\bar{X}, X_r) - \mathrm{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i, X_r) - \mathrm{Var}(\bar{X}) \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_r, X_r) - \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

10. Sigui $T = \sum_{k=1}^{n} kX_k$ i $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, a on les X_k són v.a. independents de mitjana μ i variància σ^2.

(a) Calculeu $E(T)$ i $\mathrm{Var}(T)$.

(b) Calculeu la covariància i la correlació entre S i T.

Solució:

(a)

$$\begin{aligned}
E(T) &= E(\sum_{k=1}^{n} kX_k) = \sum_{k=1}^{n} E(kX_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mu = \mu \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \mu \tfrac{n(n+1)}{2} \\
V(T) &= V(\sum_{k=1}^{n} kX_k) = \sum_{k=1}^{n} V(kX_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 V(X_k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sigma^2 \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Cov(S,T) &= Cov(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} kX_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Cov(X_k, kX_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\sigma^2 = \sigma^2 \tfrac{n(n+1)}{2} \\
Corr(S,T) &= \frac{\sigma^2 \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{V(S)}\sqrt{V(T)}} = \frac{\sigma^2 \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n\sigma^2}\sqrt{\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} k^2}} \\
&= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}
\end{aligned}$$

Distribució multinomial

11. Sigui $(X_1, \dots, X_k)$ un vector aleatori amb distribució multinomial $M(n; p_1, \dots, p_k)$.

(a) Calculeu la funció de probabilitat marginal de la variable X_3. Quina llei segueix X_3?

(b) Calculeu la matriu de variàncies i covariàncies de $(X_1, \dots, X_k)$.

(c) Calculeu la funció de probabilitat condicional de la variable X_3 condicionada a $X_2 = a$. Quina llei segueix X_3 condicionada a $X_2 = a$?

(d) Quina llei segueix $X_2 + X_3$?

Solució:

(a) Sigui $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k$.Si $\sum_{i=1}^{k} x_i \neq n$ aleshores $P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = 0$. Suposem ara que $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_n!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

(b) Siguin $Y = X_1 + \cdots + X_k$, i $x_3 \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X_3 = x_3) = P(X_3 = x_3, Y = n - x_3) = \frac{n!}{x_3!(n-x_3)!} p_3^{x_3} (1-p_3)^{n-x_3}$$

ja que $(X_3, Y) \sim M(2; p_3, 1-p_3)$. Deduïm que $X_3 \sim B(n, p_3)$. Anàlogament, en general $X_i \sim B(n, p_i)$ per $i = 1, \dots, k$.

(c)

$$\Sigma = V\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix} = (\sigma_{ij})_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,k}$$

on $\sigma_i^2 = V(X_i)$ i $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ quan $i \neq j$.
Com que $X_i \sim B(n, p_i)$, $\sigma_i^2 = np_i(1-p_i)$. Per calcular σ_{ij}, definim les variables aleatòries k-variants

$$Y_i^l = \begin{cases} 0 & \text{Si en l'extracció } l\text{-èssima no surt un individu del tipus } i \\ 1 & \text{Si en l'extracció } l\text{-èssima surt un individu del tipus } i \end{cases}$$

Cada Y_i^l es comporta com un $Bern(p_i)$, a més $Y_i^1, \dots, Y_i^n$ són independents i tenim que $X_i = \sum_{l=1}^{n} Y_i^l$. Aleshores, utilitzant la bilinealitat de la Covariància, l'esmentada independència, i que $Y_i^l Y_j^l = 0$ per construcció, obtenim

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= Cov(X_i, X_j) = Cov(\sum_{l=1}^{n} Y_i^l, \sum_{h=1}^{n} Y_j^h) \\
&= \sum_{l=1}^{n} Cov(Y_i^l, \sum_{h=1}^{n} Y_j^h) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} Cov(Y_i^l, Y_j^h) \\
&= \sum_{l=1}^{n} Cov(Y_i^l, Y_j^l) = E(Y_i^l Y_j^l) - E(Y_i^l)E(Y_j^l) \\
&= -E(Y_i^l)E(Y_j^l) = -p_i p_j
\end{aligned}$$

Així,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \dots & -p_1p_k \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & \dots & -p_2p_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1p_k & -p_2p_k & \dots & p_k(1-p_k) \end{pmatrix}$$

(d) Si $X_2 = a$, llavors $X_3 \in \{0, 1, \dots, n-a\}$. Sigui $x_3 \in \{0, \dots, n-a\}$:

$$P(X_3 = x_3 / X_2 = a) = \frac{P(X_3 = x_3, X_2 = a)}{P(X_2 = a)} =$$

$$\frac{P(X_3 = x_3, X_2 = a, n - X_3 - X_2 = n - x_3 - a)}{P(X_2 = a)}$$

Si prenem $Y = n - X_3 - X_2 = X_1 + X_4 + \cdots + X_k$, tenim que

$$(X_2, X_3, Y) \sim M(n; p_2, p_3, 1 - p_2 - p_3)$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned}
P(X_3 = x_3 | X_2 = a) &= \frac{\frac{n!}{a!x_3!(n-x_3-a)!} p_2^a p_3^{x_3} (1-p_3-p_2)^{n-a-x_3}}{\frac{n!}{a!(n-a)!} p_2^a (1-p_2)^{n-a}} \\
&= \frac{(n-a)!}{x_3!(n-a-x_3)!} \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{x_3} \left(1 - \frac{p_3}{1-p_2}\right)^{n-a-x_3}
\end{aligned}$$

i $(X_3 | X_2 = a) \sim B(n-a, \frac{p_3}{1-p_2})$.

(e) • Directament, com que $X_2 + X_3$ compta les vegades que surt algú del tipus 2 o del tipus 3,

$$X_2 + X_3 \sim B(n, p_2 + p_3)$$

- Fent servir l'apartat 4: $(X_2 + X_3)$ pren valors $b \in \{0, \dots, n\}$, així que donat un b,

$$
\begin{aligned}
P(X_2 + X_3 = b) &= \sum_{a=0}^{b} P(X_2 + X_3 = b / X_2 = a) P(X_2 = a) \\
&= \sum_{a=0}^{b} P(X_3 = b - a / X_2 = a) P(X_2 = a) \\
&= \sum_{a=0}^{b} \tfrac{(n-a)!}{(b-a)!(n-b)!} \tfrac{p_3^{b-a}}{(1-p_2)^{b-a}} \\
& \quad \tfrac{(1-p_2-p_3)^{n-a-b+a}}{(1-p_2)^{n-a-b+a}} \tfrac{n!}{(n-a)!a!} p_2^a (1 - p_2)^{n-a} \\
&= \sum_{a=0}^{b} \tfrac{n!}{a!(b-a)!(n-b)!} (1 - p_2 - p_3) n - b p_2^a p_3^{b-a} \\
&= (1 - p_2 - p_3)^{n-b} \tbinom{n}{b} \sum_{a=0}^{b} \tbinom{b}{a} p_2^a p_3^{b-a} \\
&= \tbinom{n}{b} (p_2 + p_3)^b (1 - (p_2 + p_3))^{n-b}.
\end{aligned}
$$

i concloem que $X_2 + X_3 \sim B(n, p_2 + p_3)$.

12. Tenim un dau no equilibrat. La probabilitat que aparegui la cara i quan es fa rodar es denota per p_i. Suposem que $p_1 = 0.11$, $p_2 = 0.30$, $p_3 = 0.22$, $p_4 = 0.05$, $p_5 = 0.25$, $p_6 = 0.07$. Aquest dau es llença 40 vegades. Denotem per X_1 el nombre de cares parelles que apareixen i per X_2 el nombre de vegades que surt un 1 o un 3. Calculeu la $\mathrm{P}(X_1 = 20, X_2 = 15)$.

Solució:

Sigui Y_i la variable aleatòria que indica el nombre de vegades que surt la cara i.
$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)$ té distribució multinomial amb $n = 40$ i $p_1, p_2, p_3 p_4, p_5, p_6$.

$$
\begin{array}{ll}
X_1 = Y_2 + Y_4 + Y_6 & \bar{p_1} = p_2 + p_4 + p_6 = 0.42 \\
X_2 = Y_1 + Y_3 & \bar{p_2} = p_1 + p_3 \\
X_3 = n - X_1 - X_2 & \bar{p_3} = p_5
\end{array}
$$

(X_1, X_2, X_3) té distribució multinomial amb $n = 40$ i $\bar{p_1}, \bar{p_2}, \bar{p_3}$.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 20, X_2 = 15) &= P(X_1 = 20, X_2 = 15, X_3 = 40 - 20 - 15) \\
&= \tfrac{40!}{20!15!15!} (0.42)^{20} (0.33)^{15} (0.25)^5 \approx 0.00365
\end{aligned}
$$

Distribucions contínues

13. Siguin X i Y dues v.a. contínues, amb funció de densitat conjunta

$$
f(x, y) = \begin{cases} cy^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ i } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}
$$

Determineu:

(a) El valor de la constant c;
(b) $\mathrm{P}(X + Y > 2)$;
(c) $\mathrm{P}(Y < 1/2)$;
(d) $\mathrm{P}(X \leq 1)$;
(e) $\mathrm{P}(X = 3Y)$.

Solució:

(a) $\int_0^2 \int_0^1 cy^2 \, dy \, dx = 1$

$$
c \int_0^2 \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 dx = c \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}
$$

(b) $P(X+Y>2) = \int\int_{\{x+y>2\}} f(x,y)\,dx\,dy$. Ho calcularem de dues formes diferents, a partir de dues expressions distintes del conjunt del qual volem calcular la probabilitat:

$$\{x+y>2, 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\} = \{1\le x\le 2, 2-x\le y\le 1\}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X+Y>2) & = & \int_1^2\int_{2-x}^1 \frac{3}{2}y^2\,dy\,dx \\ & = & \frac{1}{2}\int_1^2 1-(2-x)^3\,dx \\ & = & \frac{1}{2}\left(1+\frac{(2-x)^4}{4}\Big|_1^2\right) \\ & = & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{4}) = \frac{3}{8} \end{array}$$

$$\{x+y>2, 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\} = \{0\le y\le 1, 2-y\le x\le 2\}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X+Y>2) & = & \int_0^1\int_{2-y}^2 \frac{3}{2}y^2\,dx\,dy \\ & = & \int_0^1 \frac{3}{2}y^2(x|_{2-y}^2)\,dy \\ & = & \int_0^1 \frac{3}{2}y^2 y\,dy = frac38\ y^4\Big|_0^1 \\ & = & \frac{3}{8} \end{array}$$

(c)

$$P(Y<\frac{1}{2}) = \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}y^2\,dy\,dx = \frac{1}{8}$$

(d)

$$P(X\le 1) = \int_0^1\int_0^1 \frac{3}{2}y^2\,dy\,dx = \frac{1}{2}$$

(e)

$P(X=3Y)=0$ (Perquè l'àrea d'una recta és 0)

14. Suposem que un dia determinat dues persones A i B arriben a un magatzem de forma independent. La persona A es queda 15 minuts al magatzem i la B 10 minuts. Si el temps d'arribada d'aquestes persones segueix una distribució uniforme entre les 9 i les 10 del matí, quina és la probabilitat que A i B coincideixin al magatzem?

Solució:
P(A i B $coincideixin$) $= 0.3715$.

15. **Paradoxa de Bertrand.** Es considera una corda AB triada aleatòriament al cercle C de centre O i radi 1, i un triangle equilàter que té AB com un dels seus costats. Volem calcular la probabilitat que el triangle no pugui estar contingut a dins del cercle.

   (a) Si X és la longitud de la corda, proveu que la probabilitat demanada és $P(X>\sqrt{3})$.

   (b) Considereu les següents formes de triar la corda aleatòria:

      i. Es tria un punt P aleatòriament (uniformement) a l'interior de C i es pren la corda AB que té a P com el punt mig.

      ii. Es tria un punt P aleatòriament d'un radi de C i es pren la corda AB que té a P com el punt mig.

      iii. Es trien els punts A i B aleatòriament de la circumferència de de centre O i radi 1.

   Proveu que $P(X>\sqrt{3})$ és diferent en cadascun dels tres casos i que de fet val 1/4, 1/3 o 1/2, segons la forma de triar AB. Indiqueu quin valor de la probabilitat correspon a cada cas.

Solució:
El panel esquerre de la Figura 1 il·lustra el plantejament de la Paradoxa de Bertrand.

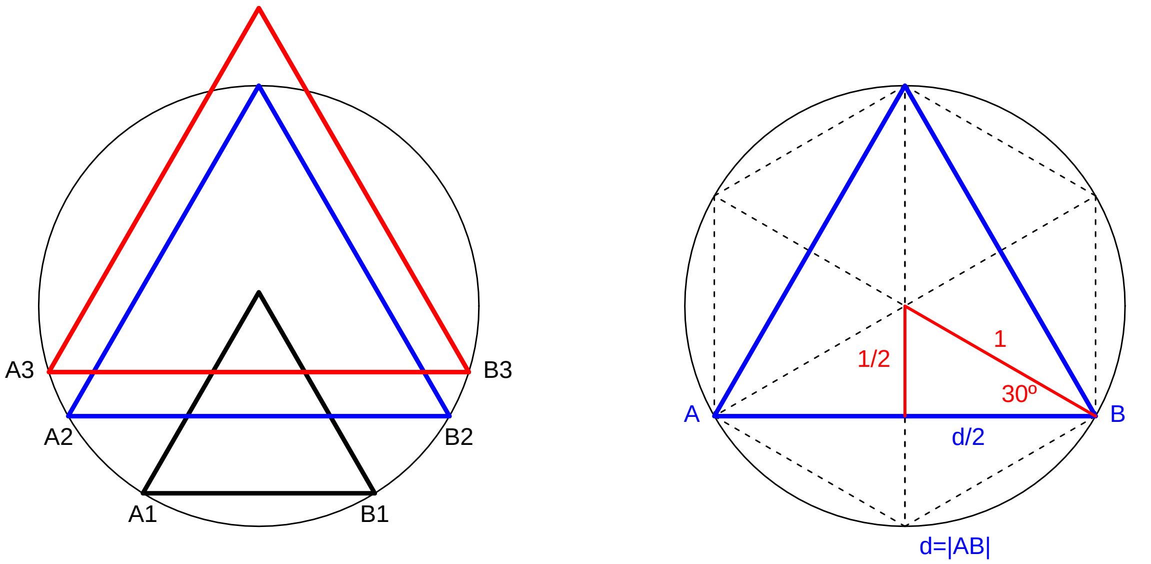


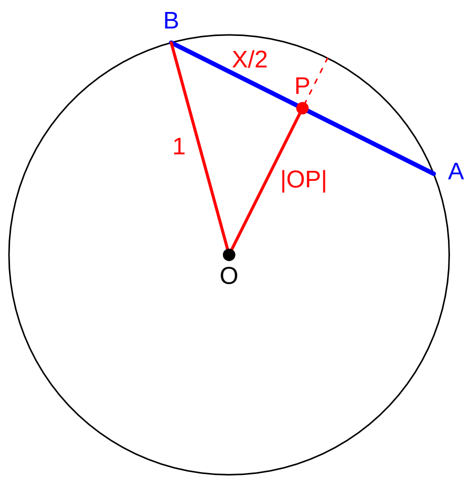
Figura 1: Il·lustració de la paradoxa de Bartrand.

(a) El panel dret de la Figura 1 mostra el triangle equilàter inscrit a la circumferència unitat, que té costat d. El gràfic mostra que

$$\frac{d}{2} = \cos(30^o) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{3}.$$

Per tant, un triangle equilàter, de costat igual a la corda de longitud X, no estarà contingut al cercle si i només si $X > d = \sqrt{3}$.

(b) i.



Pel Teorema de Pitàgores,

$$|OP|^2 + (X/2)^2 = 1 \Leftrightarrow X^2 = 4(1 - |OP|^2).$$

Aleshores

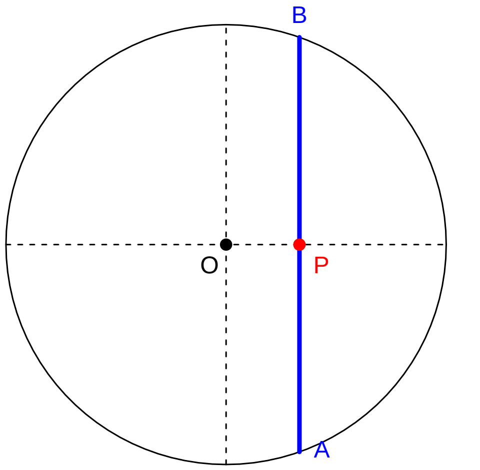
$$X > \sqrt{3} \Leftrightarrow 4(1 - |OP|^2) > 3 \Leftrightarrow |OP|^2 < 1/4 \Leftrightarrow |OP| < 1/2.$$

Per tant,

$$\Pr(X > \sqrt{3}) = \Pr(|OP| < 1/2) =$$

$$\frac{\text{Àrea favorable a que } |OP| < 1/2}{\text{Àrea possible}} = \frac{\pi \cdot (1/2)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}.$$

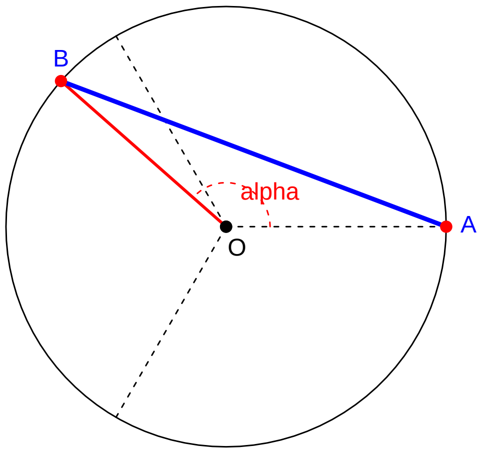
ii.



Observeu que $P = (P_x, 0)$ amb $P_x \sim U([0,1])$. Raonant com a l'apartat anterior,

$$\Pr(X > \sqrt{3}) = \Pr(|OP| < 1/2) = \Pr(P_x < 1/2) = \frac{1}{2}.$$

iii.



Observeu que triar els punts A i B aleatòriament de la circumferència de centre O i radi 1, és equivalent a fixar el punt A a $(1,0)$ i triar el punt B aleatòriament a la circumferència. Però triar B aleatòriament és equivalent a triar l'angle $\alpha = \widehat{AOB}$ aleatòriament entre 0 i 2π radians (o entre 0^o i 360^o). Per tant podem suposar que

$$\alpha \sim U([0, 2\pi]).$$

El gràfic ens mostra que $X > \sqrt{3}$ si i només si $\alpha \in (2\pi/3, 4\pi/3)$. Per tant,

$$\Pr(X > \sqrt{3}) = \Pr\left(\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

16. Suposem que escollim un punt de l'interior del cercle que té per equació $x^2 + y^2 = 1$. Suposem que la probabilitat que el punt pertanyi a una regió qualsevol de dins del cercle és proporcional a l'àrea d'aquesta regió.

   (a) Calculeu les distribucions marginals de les coordenades (X, Y) d'aquest punt.

   (b) Denotem per Z la v.a. que representa la distància des d'aquest punt fins al centre del cercle. Trobeu i dibuixeu la funció de densitat de Z.

   Solució:

(a) Les variables aleatòries coordenades (X, Y) es comporten conjuntament com una uniforme en tot el cercle $U(C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\})$, i la seva funció de densitat és $f(x, y) = k \cdot 1_{C_1}(x, y)$.

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = k \int_{C_1} dx\, dy = k \cdot \text{Àrea}(C_1) = k\pi \cdot 1^2 = k\pi$$

Així determinem el valor $k = \frac{1}{\pi}$.
La marginal de X a $x \in [-1, 1]$ serà

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}.$$

Si $x \notin [-1, 1]$ aleshores $f_X(x) = 0$. Per simetria, la marginal de y té la mateixa expressió.

(b) $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ i $P(Z \in [0, 1])$. Si $z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X^2 + Y^2 \leq z^2) \\ &= P((X, Y) \in C_z) = \frac{\text{Àrea}(C_z)}{\text{Àrea}(C_1)} = \frac{\pi z^2}{\pi} \\ &= z^2 \\ f_Z(z) &= 2z \cdot 1_{[0,1]}(z) \end{aligned}$$

17. Suposeu que la funció de densitat conjunta de X i Y és la següent:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \text{ i } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu i dibuixeu les distribucions marginals i condicionades. Són X i Y independents?

Solució:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{-\infty}^{0} f(x, y)dy + \int_{0}^{1-x} f(x, y)dy + \int_{1-x}^{\infty} f(x, y)dy = \\ &\int_0^{1-x} 24xydy = 12x(1 - x)^2, \end{aligned}$$

amb $x \geq 0$, $y \geq 0$.
De manera semblant es pot veure que

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \int_0^{1-y} 24xydx = 12y(1 - y)^2,$$

amb $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Podem veure que $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$, per tant no són independents. Per altra banda, en general (X, Y) no poden ser independents si el seu suport no és el producte cartesià dels suports de les distribucions marginals X i Y

18. Suposeu que $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$ per $0 \leq x < \infty$, i $0 \leq y < \infty$.

(a) Trobeu les dues densitats marginals.

(b) Trobeu la densitat de $(X|Y = y)$ i la de $(Y|X = x)$.

Solució:

(a)

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f(x, y)dy = \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dy = e^{-x},$$

amb $x \in (0, \infty)$. Per tant $X \sim Exp(1)$.

Per a la següent marginal integrarem per parts, fent u=x amb du=dx i dv=$e^{-x(y+1)}$ amb $v = \frac{e^{-x(y+1)}}{-(y+1)}$.

$$f_Y(y) = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx = \left(-\frac{x}{y+1}e^{-x(y+1)}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x(y+1)}}{(y+1)}dx = \frac{1}{(y+1)^2},$$

amb $y \in (0,\infty)$. A l'última igualtat hem fet servir que la funció de densitat d'una exponencial de paràmetre $\lambda = (y+1)$ integra 1 entre 0 i ∞. També hem fet servir que

$$\lim x \to \infty \frac{x}{y+1}e^{-x(y+1)} = 0.$$

(b)

$$f(X|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)},$$

amb $(X,Y) \in (0,\infty)^2$. Per tant $(X|Y=y) \sim Gamma(2,(y+1))$.

$$f(Y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(X)} = xe^{-xy},$$

amb $(X,Y) \in (0,\infty)^2$. Per tant $(Y|X=x) \sim Exp(x)$.

19. Suposem que dues components tenen temps de vida, T_1 i T_2, independents i exponencials amb paràmetres α i β, respectivament. Calculeu $\Pr(T_1 > T_2)$.

Solució:

$$\begin{aligned}
\Pr(T_1 > T_2) &= \int_0^\infty \int_{t_2}^\infty \alpha e^{-\alpha t_1}\beta e^{-\beta t_2} dt_1 dt_2 \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{t_2}^\infty \alpha e^{-\alpha t_1} dt_1\right)\beta e^{-\beta t_2} dt_2 \\
&= \int_0^\infty \Pr(T_1 > t_2)\beta e^{-\beta t_2} dt_2 \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha t_2}\beta e^{-\beta t_2} dt_2 \\
&= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^\infty (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)t_2} dt_2 \\
&= \frac{\beta}{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

20. Siguin X i Y variables aleatòries independents amb distribució exponencial de paràmetre λ i μ respectivament. Definim

$$U = min(X,Y), \quad V = 1_{\{U=X\}}.$$

Trobeu la llei conjunta de (U,V). Trobeu la distribució de U i V.

Són U i V independents?

Solució:
Estudiarem primer les condicionals $(U|V=v)$:

$$P(U \le u|V=0) = P(min\{X,Y\} \le u|X > Y) = P(Y \le u|X > Y) = \frac{P(Y \le u, X > Y)}{P(X > Y)}$$

$$\begin{aligned}
P(Y \le u, X > Y) &= \textstyle\int_0^u \int_y^\infty f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\
&= \textstyle\int_0^u f_Y(y)e^{-\lambda y}\,dy \\
&= \textstyle\int_0^u \mu e^{-(\lambda+\mu)y}\,dy \\
&= \tfrac{\mu}{\mu+\lambda}\textstyle\int_0^u (\mu+\lambda)e^{-(\mu+\lambda)y}\,dy \\
&= \tfrac{\mu}{\mu+\lambda}[1 - e^{-(\lambda+\mu)u}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= \int_0^\infty \int_y^\infty \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \frac{\mu}{\mu+\lambda} \end{aligned}$$

Així,

$$P(U\le u|V=0) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}[1-e^{-(\lambda+\mu)u}]\frac{\mu+\lambda}{\mu} = [1-e^{-(\lambda+\mu)u}]$$

Concloem que

$$f_{U|V=0}(u) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)u}1_{(0,\infty)}(u) \Rightarrow (U|V=0)\sim Exp(\lambda+\mu).$$

Anàlogament, $U|V=1\sim Exp(\lambda+\mu)$, és a dir U i V són independents.

$V\sim Bern\left(p=P(X\le Y)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$

I pel que fa a U

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(min\{X,Y\}\le u) = P(\{X\le u\}\cup\{Y\le u\}) \\ &= P(X\le u)+P(Y\le u)-P(X\le u, Y\le u) \\ &= F_X(u)(1-F_Y(u))+F_Y(u) = F_X(u)(1-F_Y(u))+F_Y(u)-1+1 \\ &= 1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u)) = 1-e^{-\lambda u}e^{-\mu u} \\ &= 1-e^{(\lambda+\mu)}u, \end{aligned}$$

i obtenim que $U\sim Exp(\lambda+\mu)$.

21. Siguin X i Y dues v.a.'s contínues. La v.a. X es distribueix segons una llei uniforme a l'interval $[0,10]$. S'observa $X=x$ i en aquestes condicions la v.a Y es distribueix uniformement a l'interval $[0,x]$.

    (a) Doneu la funció de densitat conjunta del vector (X,Y).

    (b) Calculeu $\mathrm{P}(X>Y)$.

    Solució:

    (a) $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \frac{1}{10x}$, $0\le y\le x\le 10$.

    (b) $P(X>Y)=1$

22. Les v.a. X,Y,Z tenen per densitat conjunta

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0<x<y<1 \text{ i } 0<z<1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu la $\mathrm{P}(3X>Y \mid 1<4Z<2)$

Solució:

$$\mathrm{P}(3X>Y\mid 1<4Z<2) = \frac{\mathrm{P}\{(3X>Y)\bigcap(1<4Z<2)\}}{\mathrm{P}(1<4Z<2)} =$$

$$\frac{\int_{y=0}^1\int_{x=\frac{y}{3}}^y\int_{z=\frac14}^{\frac12} 2dzdxdy}{\int_{x=0}^1\int_{y=x}^1\int_{z=\frac14}^{\frac12} 2dzdydx} = \frac{\int_{y=0}^1\int_{x=\frac{y}{3}}^y \frac14 dxdy}{\int_{x=0}^1\int_{y=x}^1 \frac14 dydx} = \frac{\int_{y=0}^1 \frac23 ydy}{\int_{x=0}^1(1-x)dx} = \frac23.$$

Estadístics extrems

23. Siguin $X_1, \dots, X_n$ v.a. independents amb funció de distribució $F_1, \dots, F_n$ i densitats $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ respectivament. Siguin $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ i $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

   (a) Calculeu les funcions de distribució i de densitat de $X_{(n)}$ i de $X_{(1)}$ a partir de les distribucions i densitats de $X_1, \dots, X_n$.

   (b) Repetiu l'apartat anterior pel cas particular en que les v.a. són idènticament distribuïdes.

   (c) Calculeu $E(X_{(1)})$ i $E(X_{(n)})$ en el cas que $X_i \sim U([0,1])$.

   Solució:

   (a) Funció de distribució d'$X_{(n)}$:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}} &= P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) = F_1(x) \cdots F_n(x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(x) \end{aligned}$$

   Funció de densitat d'$X_{(n)}$:

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}} &= F'_{X_{(n)}} \\ &= f_{X_1}(x) F_2(x) \cdots F_n(x) + f_{X_2}(x) \tfrac{F_1(x) \cdots F_n(x)}{F_2(x)} + \cdots + f_{X_{(n)}} \tfrac{F_1(x) \cdots F_n(x)}{F_n(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{f_i(x) F_{X_{(n)}}(x)}{F_i(x)} \end{aligned}$$

   Funció de distribució d'$X_{(1)}$:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}} &= P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x) \cdots P(X_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - F_1(x))(1 - F_2(x)) \cdots (1 - F_n(x)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(x)) \end{aligned}$$

   Funció de densitat d'$X_{(1)}$:

$$f_{X_{(1)}}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X_i(x)} \frac{(1 - F_{X_{(i)}}(x))}{1 - F_i(x)}$$

   (b) $F_i = F \quad \forall i$

$$\begin{aligned} &F_{X_{(n)}}(x) = (F(x))^n \\ &f_{X_{(n)}}(x) = n(F(x))^{n-1} f(x) \\ &F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n \\ &f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

   (c) En aquest cas,

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1} I_{[0,1]}(x), f_{X_{(n)}}(x) = n x^{n-1} I_{[0,1]}(x).$$

   Aleshores

$$E(X_{(n)}) = \int_0^1 x \cdot n x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} x^{n+1}|_0^1 = \frac{n}{n+1}.$$

$$E(X_{(1)}) = \int_0^1 x \cdot n(1-x)^{n-1} dx \overset{u=1-x}{=} \int_0^1 (1-u) n u^{n-1} du =$$

$$1 - E(X_{(n)}) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

24. Suposeu que les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ són independents i que X_i segueix una distribució exponencial de paràmetre β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Definim la v.a. $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Cerqueu la distribució de la v.a. Y.

Solució:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y \geq y) = 1 - P(min\{X_1, \ldots, X_k\} \geq y) \\ &= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{k} \{X_i \geq y\}) = 1 - \prod_{i=1}^{k} P(X_i \geq y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k} e^{-\beta_i y} = 1 - e^{-(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i) y} \end{aligned}$$

per tant, $Y \sim Exp(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i)$

25. Siguin $X_1, ..., X_n$ v.a.'s independents i amb la mateixa distribució de probabilitat, que té funció densitat

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x/\beta} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

(correspòn a l'anomenada llei de Weibull(α, β)).

Trobeu la funció de densitat del $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Identifiqueu quina llei segueix $X_{(1)}$.

Solució:
Farem servir que $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. Per tant, si existeix funció de densitat,

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

Pel cas $X \sim$ Weibull(α, β)

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}} 1_{(0,\infty)}(x),\ F(x) = 1 - e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}.$$

Per tant,

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - e^{-n\frac{x^\alpha}{\beta}} \quad f_{X_{(1)}}(x) = n e^{-n\frac{x^\alpha}{\beta}} \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1}$$

i es segueix que $X_{(1)} \sim Weibull(\alpha, \frac{\beta}{n})$.

Esperança condicionada

26. Un pare té tres fills. La paga setmanal que els té assignada és d'1 euro al més petit, 2 euros al mitjà i 3 euros al fill gran. Dissabte al matí els dona la setmanada i, just després tria un dels fills a l'atzar i li demana que llenci a l'aire les monedes que acaba de rebre i apunti el nombre de cares. Designem per X el nombre de monedes que es llencen i per Y el nombre de cares obtingudes. Calculeu l'esperança de la distribució condicionada de X donat que $Y = 1$.

Solució:
Al problema 2 es va calcular la distribució conjunta i marginals:

		y				
$\Pr(X = x, Y = y)$		0	1	2	3	$\Pr(X = x)$
	1	4/24	4/24	0	0	1/3
x	2	2/24	4/24	2/24	0	1/3
	3	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
	$\Pr(Y = y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	

$\Pr(X = x|Y = 1) = \Pr(X = x, Y = 1) \Pr(Y = 1)$, $x \in \{1, 2, 3\}$. Aleshores,

x	1	2	3
$\Pr(X = x\|Y = 1)$	4/11	4/11	3/11

La seva esperança és $E(X|Y=1) = (4+8+9)/11 = 21/11$.

27. Sigui $Y \sim B(n, X)$ (això també es pot escriure com $(Y|X=x) \sim B(n,x)$), on $X \sim U([0,1])$.

    (a) Doneu la distribució marginal de Y.

    (b) Doneu també la densitat condicionada de $(X|Y=y)$ i calculeu les seves esperança i variància.

    (c) Particularitzeu els vostres resultats pel cas en que X sigui uniforme.

    Solució:

    El fet que $X \sim U([0,1])$ i que $(Y|X=x) \sim B(n,x)$ implica que la variable aleatòria bivariant (X,Y) posa tota la probabilitat al conjunt

    $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\, y \in \{0,1,\dots,n\}\},$$

    que és una unió de n segments paral·lels, de longitud 1 cadascun.

    Observeu que A no és un conjunt numerable. Per tant (X,Y) no és una variable aleatòria bivariant discreta. Per altra banda, A té àrea 0. Per tant (X,Y) no és una variable aleatòria bivariant contínua.

    (a) Sigui $y \in \{0,1,\dots,n\}$,

    $$\begin{aligned}
    \Pr(Y=y) =& \mathbb{E}(I_{Y=y}) \\
    & \text{(Teorema de l'esperança iterada)} \\
    =& \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(I_{Y=y}|X)\right) \\
    =& \int_0^1 \mathbb{E}(I_{Y=y}|X=x) f_X(x)\,dx \\
    & (f_X(x) = 1 \text{ si } 0 \le x \le 1) \\
    =& \int_0^1 \Pr(Y=y|X=x)\,dx \\
    & \text{(hem obtingut una versió contínua} \\
    & \text{del Teorema de pa Probabilitat Total)} \\
    =& \int_0^1 \frac{n!}{y!(n-y)!} x^y (1-x)^{n-y}\,dx \\
    & \text{(fem servir la integral de la densitat d'una } Beta(y+1, n-y+1)) \\
    =& \frac{n!}{y!(n-y)!} \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}{\Gamma(n+2)} \\
    =& \frac{n!}{y!(n-y)!} \frac{y!(n-y)!}{(n+1)!} \\
    =& \frac{1}{n+1},
    \end{aligned}$$

    i concloem que Y és uniforme discreta en $\{0,1,\dots,n\}$.

    (b) Volem calcular la funció de densitat de $(X|Y=y)$. Per a $x \in (0,1)$, i $h > 0$ tal que $x+h < 1$,

    $$F_{X|Y=y}(x+h) - F_{X|Y=y}(x) = \Pr(x < X \le x+h | Y=y)$$

    $$= \frac{\Pr(x < X \le x+h, Y=y)}{\Pr(Y=y)} = \frac{\Pr(Y=y|x < X \le x+h)\Pr(x < X \le x+h)}{\Pr(Y=y)}.$$

    Aleshores

    $$f_{X|Y=y}(x) = F'_{X|Y=y}(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_{X|Y=y}(x+h) - F_{X|Y=y}(x)}{h}$$

    $$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\Pr(Y=y)} \frac{\Pr(Y=y|x < X \le x+h)\Pr(x < X \le x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{\Pr(Y=y)} \lim_{h\downarrow 0} \Pr(Y=y|x<X\le x+h) \lim_{h\downarrow 0} \frac{\Pr(x<X\le x+h)}{h}$$

$$= \frac{\Pr(Y=y|X=x)f_X(x)}{\Pr(Y=y)}.$$

Hem obtingut una versió del Teorema de Bayes vàlida per treballar conjuntament amb una variable discreta i una altre contínua:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{\Pr(Y=y|X=x)f_X(x)}{\Pr(Y=y)}.$$

Ara l'aplicarem al nostre cas, si $x \in [0,1]$,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{\frac{n!}{y!(n-y)!}x^y(1-x)^{n-y}}{1/(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{y!(n-y)!}x^y(1-x)^{n-y} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}x^{(y+1)-1}(1-x)^{(n-y+1)-1}$$

i deduïm que

$$(X|Y=y) \sim \text{Beta}(\alpha = y+1, \beta = n-y+1).$$

Aleshores

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{y+1}{n+2},$$

$$\text{Var}(X|Y=y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{(y+1)(n-y+1)}{(n+2)^2(n+3)} = \frac{\frac{y+1}{n+2}\left(1-\frac{y+1}{n+2}\right)}{n+3}.$$

28. Siguin U_1 i U_2 dues v.a. uniformes i independents a l'interval $[0,1]$. Denotem per $X = \min\{U_1, U_2\}$ i per $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

    (a) Comprobeu que la funció de densitat conjunta entre X i Y ve donada per

    $$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

    (b) Trobeu la covariància i la correlació entre X i Y. Creieu que el signe de la correlació té sentit intuïtivament?

    (c) Trobeu $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\text{Var}(X \mid Y)$ i $\text{Var}(Y \mid X)$.

    (d) Comproveu que es verifica la llei de l'esperança iterada.

    Solució:

    (a) Sigui $0 < x < y < 1$:

    $$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= P(U_1 \le x, U_2 \le x) + P(U_1 \le x, x < U_2 \le y) + P(U_2 \le x, x < U_1 \le y) \\ &= x^2 + x(y-x) + x(y-x) \\ &= 2xy - x^2 \\ &\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 2. \end{aligned}$$

    Sigui ara $0 < y < x < 1$:

    $$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= P(Y \le y) \\ &= P(U_1 \le y, U_2 \le y) \\ &= y^2 \\ &\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

    Per tant,

    $$f_{X,Y}(x,y) = 2 \cdot 1_{\{(x,y):0\le x\le y\le 1\}}(x,y).$$

(b) Calculem les densitats marginals:

$$f_X(x) = \int_x^1 2\,dy = 2y|_x^1 = 2 - 2x,\ \ f_Y(y) = \int_0^y 2\,dx = 2y.$$

D'aquí es segueix que

$$X = \min\{U_1, U_2\} \sim \text{Beta}(1,2),\ \ Y = \max\{U_1, U_2\} \sim \text{Beta}(2,1).$$

Aleshores ja podem escriure que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3},\ \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3},\ \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \frac{1}{18}.$$

Tot i així, podem calcular aquestes quantitats directament:

$$\begin{array}{rcl} \mu_X & = & \int_0^1 x(2-2x)\,dx = x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\ \mu_Y & = & \int_0^1 2y \cdot y\,dy = \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E(X^2) & = & \int_0^1 x^2(2-2x)\,dx = \frac{1}{6} \\ \sigma_X^2 & = & E(X^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{3}{54} = \frac{1}{18} \\ \sigma_X & = & \sqrt{\frac{1}{18}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E(Y^2) & = & \int_0^1 2y \cdot y^2\,dy = \frac{2}{4} \\ \sigma_Y^2 & = & E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{4} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \sigma_Y & = & \sqrt{\frac{1}{18}} \end{array}$$

Finalment calculem la correlació demanada:

$$\begin{array}{rcl} E(XY) & = & \int_0^1 \int_x^1 2xy\,dy\,dx \\ & = & \int_0^1 x\left(y^2\big|_x^1\right)\,dx \\ & = & \int_0^1 (x - x^3)\,dx \\ & = & \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36},\ \ \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{2}.$$

El signe de la correlació és una dada sobre la relació entre dues variables aleatòries dependents. Específicament, si de prendre valors grans d'X en resulta obtenir valors grans d'Y, $X - \mu_X$ positiva sovint tindrà com a resultat $Y - \mu_Y$ positiva, i anàlogament en negatiu. D'aquesta manera, el producte $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ tendirà a ser positiu. En aquest cas la correlació també serà positiva. Recíprocament, si valors grans d'X generen valors petits d'Y, el producte $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ tendirà a ser negatiu, i així ho indicarà el signe de la correlació.

(c)

$$\begin{array}{rcl} f_{Y|X=x}(y) & = & \frac{1}{1-x} \quad x \leq y \leq 1 \\ & \Rightarrow & (Y|X=x) \sim U([x,1]) \\ & \Rightarrow & m_Y(x) = \mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(Y|X) = \frac{X+1}{2} \\ & & v_Y(x) = \text{Var}(Y|X=x) = \frac{(1-x)^2}{12} \Rightarrow \text{Var}(Y|X) = \frac{(1-X)^2}{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_{X|Y=y}(x) & = & \frac{1}{y} \quad 0 \leq x \leq y \\ & \Rightarrow & (X|Y=y) \sim U([0,y]) \\ & \Rightarrow & m_X(y) = \mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{y}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(X|Y) = \frac{Y}{2} \\ & & v_Y(x) = \text{Var}(X|Y=y) = \frac{y^2}{12} \Rightarrow \text{Var}(X|Y) = \frac{Y^2}{12} \end{array}$$

(d) Comprovem primer la llei de l'esperança iterada:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3} = \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} = \mathbb{E}(X)$$

Anem ara a comprovar la llei de la variància iterada:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) =& \mathbb{E}\left(\frac{(1-X)^2}{12}\right) \\
=& \frac{1}{12}\mathbb{E}(X^2 - 2X + 1) \\
=& \frac{1}{12}\left(\mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X) + 1\right) \\
=& \frac{1}{12}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{3^2} - \frac{2}{3} + 1\right) \\
=& \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathrm{Var}\left(\frac{1+X}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{18} = \frac{1}{76}$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) = \frac{1}{24} + \frac{1}{76} = \frac{3+1}{76} = \frac{1}{18} = \mathrm{Var}(Y).$$

I finalment,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|Y)) =& \mathbb{E}\left(\frac{Y^2}{12}\right) \\
=& \frac{1}{12}\left(\mathrm{Var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2\right) \\
=& \frac{1}{12}\left(\frac{1}{18} + \frac{2^2}{3^2}\right) \\
=& \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathrm{Var}\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{18} = \frac{1}{76}$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) = \frac{1}{24} + \frac{1}{76} = \frac{3+1}{76} = \frac{1}{18} = \mathrm{Var}(X).$$

29. El vector aleatori (T, U) es distribueix uniformement al triangle rectangle amb vèrtexs als punts $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,2)$.

(a) Determineu la funció de densitat conjunta de (T, U).

(b) Calculeu $\Pr(0.3 \leq U \leq 1 | T = 0.3)$.

(c) Calculeu $E(T|U = u)$ i $E(U|T = t)$.

(d) Calculeu $\mathrm{Var}(T|U = u)$.

(e) Calculeu $\mathrm{Var}(E(T|U))$.

(f) Comproveu que es verifica la Llei de l'Esperança Iterada calculant $E(T)$ a partir de la distribució marginal de T, i veient que coincideix amb $E(Z)$, on $Z = E(T|U)$.

Solució:

(a) Observeu que la densitat conjunta de (T, U) és $f(t, u) = I_A(t, u)$, on

$$\begin{aligned} A =& \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 2 - 2u\} \\ =& \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq t \leq 1 - \frac{u}{2}\}. \end{aligned}$$

(b) $\Pr(0.3 \leq u \leq 1 | T = 0.3) = 0.5$

(c) Observeu que $(T|U = u) \sim U([0, 1 - \frac{u}{2}])$ i que $(U|T = t) \sim U([0, 2 - 2t])$. Per tant,

$$E(T|U = u) = \frac{2 - u}{4}, \quad E(U|T = t) = 1 - t.$$

(d) Com que $(T|U = u) \sim U([0, 1 - \frac{u}{2}])$, aleshores $\mathrm{Var}(T|U = u) = \frac{(2-u)^2}{48}$.

(e) $\mathbb{E}(T|U) = \frac{2-U}{4}$. Per tant,

$$\mathrm{Var}[E(T|U)] = \mathrm{Var}\left(\frac{2 - U}{4}\right) = \frac{1}{16}\mathrm{Var}(U).$$

Calculem doncs $\mathrm{Var}(U)$. La marginal de U és, per $0 \leq u \leq 2$,

$$f_U(u) = \int_0^{1-u/2} dy = 1 - \frac{u}{2}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \int_0^2 u - \frac{u^2}{2}\, du = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6}\right)\bigg|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}(U^2) &= \int_0^2 u^2 - \frac{u^3}{2}\, du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{8}\right)\bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} = \frac{2}{3}, \\ \mathrm{Var}(U) &= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\mathrm{Var}[E(T|U)] = \frac{1}{16}\mathrm{Var}(U) = \frac{1}{16}\frac{2}{9} = \frac{1}{72}.$$

(f) Calculem primer la marginal de T. Si $0 \leq t \leq 1$,

$$f_T(t) = \int_0^{2-2t} du = 2 - 2t.$$

Aleshores,

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^1 2t - 2t^2\, dt = \left(t^2 - \frac{2t^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Per altra banda,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(T|U)) = \mathbb{E}\left(\frac{2 - U}{4}\right) = \frac{2 - \mathbb{E}(U)}{4} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Tenim doncs que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T|U))$.

(g) Calculem primer $\mathrm{Var}(T)$:

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^1 2t^2 - 2t^3\, dt = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Per tant,

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{18}.$$

Hem vist que $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(T|U)) = 1/72$. Calculem ara $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(T|U))$:

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(T|U)) = \mathbb{E}\left(\frac{(2-U)^2}{48}\right) = \frac{1}{48}\mathbb{E}(U^2 - 4U + 4)$$

$$= \frac{1}{48}\left(\mathrm{Var}(U) + \mathbb{E}(U)^2 - 4\mathbb{E}(U) + 4\right) = \frac{1}{48}\left(\frac{2}{9} + \frac{2^2}{3^2} - 4\frac{2}{3} + 4\right)$$

$$= \frac{1}{48}\frac{2+4-24+36}{9} = \frac{1}{24}.$$

Aleshores,

$$\mathrm{Var}(E(T|U)) + E(\mathrm{Var}(T|U)) = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

que coincideix amb $\mathrm{Var}(T)$.

30. Sigui T una v.a. exponencial, i condicionat a T sigui U una v.a. uniforme en $[0, T]$. Calculeu l'esperança i la variància (sense condicionar) de U. Nota: No és necessari calcular la llei marginal de la variable aleatòria U.

    Solució:

$$\begin{aligned}
E(U) &= E(E(U|T)) \\
E(U|T=t) &= \textstyle\int_0^t u\frac{1}{t}\,du = \frac{t}{2} \\
E(T) &= \textstyle\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} \\
E(U) &= E(E(U|T)) = E(\tfrac{T}{2}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\lambda} = \tfrac{1}{2\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(U^2|T=t) &= \textstyle\int_0^t u^2\frac{1}{t}\,du = \frac{t^2}{3} \\
E(\tfrac{T^2}{3}) &= \tfrac{1}{3}\textstyle\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{3}\frac{2}{\lambda^2} \\
V(U) &= E(U^2) - (E(U))^2 = E(E(U^2|T)) - \tfrac{1}{4\lambda^2} \\
&= \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{1}{4\lambda^2} = \tfrac{5}{12\lambda^2}
\end{aligned}$$

31. Siguin X i Y dues v.a. amb funció de densitat conjunta

$$f(x,y) = e^{-y}, \qquad 0 \le x \le y.$$

Calculeu $E(X \mid Y)$ i $E(Y \mid X)$.

Solució:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \textstyle\int_0^y e^{-y}\,dx = e^{-y}\,x|_0^y \\
&= e^{-y}\cdot y \quad 0 \le y \le \infty \\
f_X(x) &= \textstyle\int_x^\infty e^{-y}\,dy = -e^{-y}|_x^\infty \\
&= 0 - (-e^{-y}) = e^{-x} \quad 0 \le x \le \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \tfrac{e^{-y}}{e^{-y}\cdot y} = \tfrac{1}{y} \\
& X|Y = y \sim U[0,y] \quad 0 \le x \le y \\
E(X|Y=y) &= \textstyle\int_0^y x\frac{1}{y}\,dx = \frac{1}{y}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^y \\
&= \tfrac{y^2}{2y} = \tfrac{y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \tfrac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-y+x} \quad x \le y \\
E(Y|X=x) &= \textstyle\int_x^\infty ye^{-y}e^x\,dy = e^x\left[-ye^{-y} - \int -e^{-y}\right] \\
&= e^x\left(-ye^{-y} - e^{-y}|_x^\infty\right. \\
&= \left(-e^x ye^{-y} - e^x e^{-y}\right|_x^\infty = 0 - [-e^x xe^{-x} - e^x e^{-x}] \\
&= 0 - [-x-1] = x+1
\end{aligned}$$

Transformacions de variables aleatòries multivariants

32. Siguin X i Y dues v.a. i.i.d. (independents i idènticament distribuïdes) segons una exponencial de paràmetre β. Trobeu la funció de densitat de $X - Y$.

    Solució:

    Fem el canvi

$$\begin{array}{cccc} U = X - Y & X = V & 0 \le x < \infty & 0 \le y < \infty \\ V = X & Y = V - U & 0 \le v < \infty & 0 \le v - u < \infty \\ & & & -\infty < u \le v \end{array}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{array}{rcl} f_{U,V}(u,v) & = & \beta^2 e^{-\beta(2v-u)} \quad v > 0 \quad u \le v \\ f_U(u) & = & \int_0^\infty \beta^2 e^{-\beta(2v-u)}\, dv = \frac{\beta}{2} e^{\beta u} \quad u < 0 \\ f_U(u) & = & \int_u^\infty \beta^2 e^{-\beta(2v-u)}\, dv = \frac{\beta}{2} e^{-\beta u} \quad u > 0 \end{array}$$

    En resum,

$$f_U(u) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|u|} \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

    és una exponencial bilateral, o varible aleatòria de Laplace.

33. Siguin X y Y dues v.a. amb funció de densitat conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

    Definim dues noves v.a. $U = X/Y$ i $V = Y$.

    (a) Determineu la funció de densitat conjunta de U i V.
    (b) Són X i Y independents?
    (c) Són U i V independents?

    Solució:

    (a) $f_{(U,V)}(u,v) = 8uv^3; \quad 0 \le u \le 1 \quad y \quad 0 \le v \le 1.$
    (b) X i Y no són independents.
    (c) U i V són independents.

34. Siguin X i Y dues variables aleatòries independents, cadascuna amb distribució uniforme en l'interval $(0,1)$. Definim $U = X + Y, V = X - Y$. Trobeu la densitat de (U,V) i les densitats marginals.

    Solució:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = 2.$$

$$X = \frac{1}{2}(U+V) \quad Y = \frac{1}{2}(U-V)$$

    La densitat conjunta és

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 1_{[0,1]}(\frac{1}{2}(u+v)) 1_{[0,1]}(\frac{1}{2}(u-v)).$$

    És a dir, (U,V) és uniforme en el recinte definit per

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \frac{1}{2}(u+v) \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{2}(u-v) \le 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \le u+v \le 2 \\ 0 \le u-v \le 2 \end{array}\right\}$$

$$0 \leq u+v \leq 2 \Rightarrow -u \leq v \leq 2-u$$
$$0 \leq u-v \leq 2 \Rightarrow -u \leq -v \leq 2-u$$

Cerquem la marginal d'U. Donat $u \in [0,2]$, el valor de v està limitat a

$$\left\{ \begin{array}{c} u-2 \leq v \leq u \\ -u \leq v \leq 2-u \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -u \leq v \leq u \text{ si } u \in [0,1] \\ u-2 \leq v \leq 2-u \text{ si } u \in (1,2] \end{array} \right.$$

- Si $u \in [0,1]$,

$$f_U(u) = \int_{-u}^{u} f_{U,V}(u,v)\, dv = \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\, dv = \frac{1}{2}\, v|_{-u}^{u} = u$$

- Si $u \in [1,2]$,

$$f_U(u) = \int_{u-2}^{2-u} f_{U,V}(u,v)\, dv == \int_{u-2}^{2-u} \frac{1}{2}\, dv = \frac{1}{2}\, v|_{u-2}^{2-u} = 2-u$$

Busquem la marginal de V. Donat $v \in [-1,1]$, el valor d'u està restringit a

$$\left\{ \begin{array}{c} -v \leq u \leq 2-v \\ v \leq u \leq 2+v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v \leq u \leq 2-v \text{ si } v \geq 0 \\ -v \leq u \leq 2+v \text{ si } v \leq 0 \end{array} \right.$$

- Si $v \in [-1,0]$,

$$f_V(v) = \int_{-v}^{2+v} f_{U,V}(u,v)\, du = \int_{-v}^{2+v} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\, u|_{-v}^{2+v} = 1+v$$

- Si $v \in [0,1]$,

$$f_V(v) = \int_{v}^{2-v} f_{U,V}(u,v)\, du = \int_{v}^{2-v} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\, u|_{v}^{2-v} = 1-v$$

35. El temps total que un camió és al magatzem està definit per una variable aleatòria X. Sigui Y la variable temps d'espera en la cua, i Z el temps de descàrrega ($X = Y + Z$). La distribució conjunta de (X,Y) és:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0.25 \exp\{-0.5x\} & \text{si } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{altrament.} \end{array} \right.$$

(a) Calculeu el temps mig total que el camió roman al magatzem.
(b) Calculeu el temps mig de descàrrega.
(c) Identifiqueu les lleis que segueixen les variables X, Y i Z.
(d) Estudieu la independència entre els següents parells de variables aleatòries: X i Y, X i Z i Z i Y,
(e) Calculeu el coeficient de correlació entre el temps total i el temps d'espera en la cua.

Solució:

(a)

$$f_X(x) = \int_0^x f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^x 0.25e^{-0.5x}\, dy = 0.25e^{-0.5x}x$$

Per tant, $X \sim \Gamma(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2})$ i $E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = 4$.

(b) $E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

$$\begin{array}{rcl} f_Y(y) & = & \int_y^\infty f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_y^\infty 0.25e^{-0.5x}\, dx \\ & = & 0.5 \int_y^\infty (0.5)e^{-0.5x}\, dx \\ & = & 0.5P(exp(0.5) > y) = (0.5)e^{-0.5y} \end{array}$$

$Y \sim exp(0.5) \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{0.5} = 2$
$E(Z) = 4 - 2 = 2.$

(c) X i Y ja estan determinades, per trobar Z usem la transformació $(z,y) \longrightarrow (z+y,y)$.

$$\begin{array}{rcl} f_{Z,Y}(z,y) & = & f_{X,Y}(z+y,y) = 0.25e^{-0.5(z+y)} \\ f_Z(z) & = & \int_0^\infty f_{Z,Y}(z,y)\,dy = \int_0^\infty f_{X,Y}(z+y,y)\,dy \\ & = & \int_0^\infty 0.25e^{-0.5(z+y)}\,dy \\ & = & 0.5e^{-0.5z}\int_0^\infty (0.5)e^{-0.5y}\,dy = 0.5e^{-0.5z} \\ & \Rightarrow & Z \sim exp(0.5) \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcl} f_X(x)f_Y(y) & = & 0.25e^{-0.5x}(0.5)e^{-0.5y} \neq f_{X,Y}(x,y) \\ f_Y(y)f_Z(z) & = & 0.5e^{-0.5y}0.5e^{-0.5z} \\ & = & 0.25e^{-0.5(y+z)} = f_{Y,Z}(y,z) \\ f_X(x)f_Z(z) & = & 0.25e^{-0.5x}0.5e^{-0.5z} \neq f_{X,Z}(x,z) \end{array}$$

X no és independent d'Y ni de Z, però Y és independent de Z.

(e) $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.

$$\begin{array}{ll} X \sim \Gamma(2,2) & V(X) = \alpha\beta^2 = 8 \\ Y \sim Exp(0.5) & V(Y) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E(XY) & = & \int_0^\infty \int_0^x xyf_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\ & = & \int_0^\infty \int_0^x xy0.25e^{-0.5x}\,dy\,dx \\ & = & \int_0^\infty x(0.25)e^{-0.5x}\left(\int_0^x y\,dy\right)\,dx \\ & = & \int_0^\infty x(0.25)e^{-0.5x}\frac{x^2}{2}\,dx \\ & = & \int_0^\infty (0.25)\frac{1}{2}x^3e^{-0.5x}\,dx \\ & = & (0.25)\frac{1}{2}(3!2^4)\int_0^\infty \frac{1}{3!2^4}x^3e^{-\frac{x}{2}}\,dx \ \text{(densitat }\Gamma(4,2)) \\ & = & \frac{1}{4}\frac{1}{2}6\cdot 2^4 = 12 \end{array}$$

$$Cov(X,Y) = 12 - 4\cdot 2 = 12 - 8 = 4$$
$$Corr(X,Y) = \frac{4}{\sqrt{8\cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$$

36. **Monte Carlo.** Es vol estimar $J = \int_0^1 g(x)dx$, on $0 \le g(x) \le 1$ per tot x. Siguin X i Y v.a.i.i.d. $U([0,1])$. Es defineixen

$$U = I_{\{Y \le G(X)\}}, \quad V = g(X), \quad W = \frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}.$$

Proveu que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W)$ i que $\mathrm{Var}(U) \ge \mathrm{Var}(V) \ge \mathrm{Var}(W)$, d'on es segueix que W és el *estimador* de J més *eficient* dels tres.

Solució:
Calculem primer esperances:

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(I_{\{Y \le G(X)\}}) = \Pr(Y \le G(X)) =$$

$$\frac{\text{Àrea favorable a "}Y \le G(X)\text{"}}{\text{Àrea possible}} = \frac{\int_0^1 g(x)dx}{1} = J.$$

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_0^1 g(x)f_X(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = J.$$

Com que $1-X$ també es distribueix segons una $U([0,1])$, $g(1-X)$ es distribueix com $g(X)$. En particular el seu valor esperat és J. Aleshores,

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}\right) = \frac{1}{2}(J+J) = J.$$

Ara compararem les variàncies. Com que les 3 variables tenen la mateixa esperança, J, basta amb comparar els valors esperats dels seus quadrats. Observeu que $U \sim$ Bernoulli$(p = J)$, que només pot valdre 0 o 1. Per tant, $U^2 = U$ i

$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}(U) = J.$$

Ara, com que $0 \leq g(x) \leq 1$ tenim que $g(x)^2 \leq g(x)$. Per tant,

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{E}(g(X)^2) = \int_0^1 g(x)^2 dx \leq \int_0^1 g(x) dx = J.$$

D'aquí es dedueix que $\text{Var}(V) \leq \text{Var}(U)$. Finalment, si $\rho = \text{Corr}(g(X), g(1-X))$,

$$\text{Var}(W) = \text{Var}\left(\frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\text{Var}(g(X)) + \text{Var}(g(1-X)) + 2\rho\sqrt{\text{Var}(g(X))\text{Var}(g(1-X))}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\text{Var}(g(X))(2+2\rho) = \text{Var}(g(X))\frac{1+\rho}{2} \leq \text{Var}(g(X)) = \text{Var}(V).$$

Hem fet servir que $g(1-X)$ es distribueix com $g(X)$ i que $\rho \leq 1$.

Distribució normal bivariada.

37. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada i tals que $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2)$. Demostreu que les v.a $S = X_1 + X_2$ i $D = X_1 - X_2$ són independents.

    Solució:
    Com que sabem que conjuntament (S, D) tenen distribució normal bivariant, només cal veure que la seva covariància és 0:

$$\begin{aligned} Cov(S, D) &= Cov(X_1 + X_2, X_1 - X_2) \\ &= V(X_1) - Cov(X_1, X_2) + Cov(X_2, X_1) - V(X_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

38. Sigui $X \sim N(0,1)$ i $a > 0$. Sigui

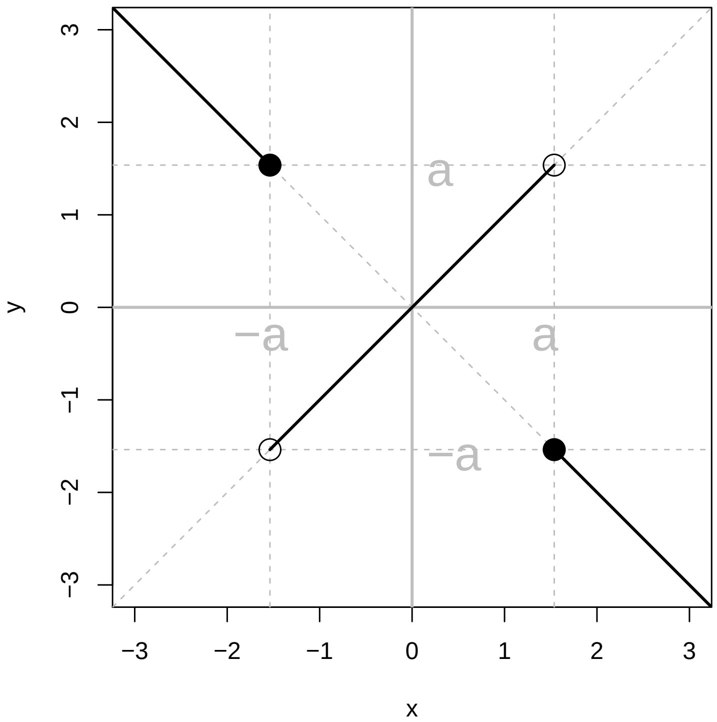
$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| < a, \\ -X & \text{si } |X| \geq a. \end{cases}$$

    (a) Proveu que $Y \sim N(0,1)$.
    (b) La distribució conjunta de (X, Y), és normal bivariant? Són independents?
    (c) Doneu l'expressió de $\rho(a) = \text{cor}(X, Y)$ en termes de la funció de densitat $\phi(x)$ de X.
    (d) Deduïu-ne que existeix un valor a^* pel qual $\text{Corr}(X, Y) = 0$ tot i que X i Y no siguin independents.

    Solució:
    Per a $a > 0$. Sigui la funció

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad |x| < a, \\ -x & \text{si} \quad |x| \geq a. \end{cases}$$

    Aleshores $Y = g(X)$.



Siguin $\phi(x)$ i $\Phi(x)$ les funcions de densitat i de distribució, respectivament, de una $N(0,1)$. Per simetria de la distribució $N(0,1)$ respecte al 0 sabem que

$$\phi(x) = \phi(-x) \ \Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Clculem la funció de distribució de Y. Sigui $y \leq -a$,

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \leq -y) = 1 - \Phi(-y) = \Phi(y).$$

Sigui ara $-a < y < a$,

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \in (-a, y)) + \Pr(X \geq a) =$$

$$\Phi(y) - \Phi(-a) + (1 - \Phi(a)) = \Phi(y) - \Phi(-a) + \Phi(-a) = \Phi(y).$$

Finalment, sigui $y \geq a$,

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \geq -y) = 1 - \Phi(-y) = \Phi(y).$$

Aleshores la funció de distribució de Y coincideix amb la d'una $N(0,1)$. Per tant $Y \sim N(0,1)$.

(b) La distribució conjunta de (X,Y) no és normal bivariant perquè posa tota la probabilitat en el conjunt

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = g(x)\},$$

anomenat *graf* de la funció $g(x)$.
X i Y no són independents: si ho fossin (X,Y) seria normal bivariant.

(c) Calculem $\rho(a) = \mathrm{Corr}(X,Y)$. Observeu primer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) =$

$E(X,Y)$ perquè $E(X)=E(Y)=0$. Per altra banda $\text{Var}(X)=\text{Var}(Y)=1$. Per tant

$$\begin{aligned}
\rho(a) &= \text{Corr}(X,Y) = \text{Cov}(X,Y) = E(XY) = E(Xg(X)) \\
&= \int_{\mathbb{R}} xg(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{-a} (-x^2)\phi(x)dx + \int_{-a}^{a} x^2\phi(x)dx + \int_{a}^{\infty} (-x^2)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi(x)dx - 4\int_{a}^{\infty} x^2\phi(x)dx \\
&= \text{Var}(X) - 4\int_{a}^{\infty} x^2\phi(x)dx \\
&= 1 - 4\int_{a}^{\infty} x^2\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Aleshores

$$\rho(0) = 1 - 4\int_{0}^{\infty} x^2\phi(x)dx1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi(x)dx = -1,$$

i

$$\lim_{a\to\infty} \rho(0) = 1.$$

(d) Com que $\rho(a)$ és funció contínua de a, existeix un valor $a^* \in [0,\infty)$ tal que $\rho(a^*)=0$. Aquest valor és

$$a^* = 1.5382$$

Sigui Y_{a^*} la variable Y definida pel valor a^*. Tenim que la variable aleatòria bivariant (X, Y_{a^*}) verifica:

- Les seves marginals són $N(0,1)$.
- No són independents.
- Són incorrelades.

Aquests fets no contradiuen el resultat que ens diu que sota normalitat conjunta hi ha independència si i només si hi ha incorrelació, perquè (X, Y_{a^*}) no tenen distribució conjunta normal bivariant.

39. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada amb mitjanes μ_1 i μ_2, variàncies σ_1^2 i σ_2^2 i correlació ρ. Determineu la distribució de $X_1 - 3X_2$.

Solució:
Definim $Y_1 = X_1 - 3X_2$. Sabem que Y_1 és normal univariant, per ser combinació lineal de (X_1, X_2), una normal bivariada.

Calculem l'esperança i la variància d'Y_1:

$$\begin{aligned}
E(Y_1) &= E(X_1 - 3X_2) \\
&= E(X_1) - 3E(X_2) \\
&= \mu_1 - 3\mu_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Y_1) &= E((Y_1)^2) - (E(Y_1))^2 \\
&= E((X_1 - 3X_2)) - (E(X_1) - 3E(X_2))^2 \\
&= E(X_1^2) - 6E(X_1X_2) + 9E(X_2^2) \\
&\quad - E(X_1^2) + 6E(X_1)E(X_2) - 9E(X_2)^2 \\
&= Var(X_1) + 9Var(X_2) - 6Cov(X_1X_2) \\
&= \sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 - 6\rho\sigma_1\sigma 2.
\end{aligned}$$

Per tant $Y_1 = X_1 - 3X_2 \sim N(\mu_1 - 3\mu_2, \sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 - 6\rho\sigma_1\sigma 2)$.

40. Sigui (X,Y) un vector aleatori que segueix una distribució normal bivariada de paràmetres $\mu_X = 40$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 4$ i $\rho = 0.6$. Trobeu l'interval més curt ($[a,b]$) tal que la probabilitat condicionada de que Y pertanyi a l'interval ($[a,b]$) donat que $X = 22$ sigui igual a 0.90.

Solució:
Sabem que si

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

aleshores la distribució condicional de Y, donat $X = x$, és la distribució normal de mitjana $\mu_* = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$ i de variància $\sigma_*^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$. És a dir,

$$Y|_{X=x} \sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right).$$

Aleshores $Y|_{X=22} \sim N(12.8, (1.6)^2)$. Hem de trobar un interval $[a,b]$ tal que $b-a$ sigui mínim de manera que $P[a \leq U \leq b] = 0.9$ per
$U \sim N(12.8, 1.6^2)$. $Z = \frac{U-12.8}{1.6} \sim N(0,1)$.
Per tant

$$P[a \leq U \leq b] = P[\frac{a-12.8}{1.6} \leq Z \leq \frac{b-12.8}{1.6}] = 0.9$$

Per tal que l'interval sigui mínim prenem un interval centrat en 12.8.

$$12.8 - a = b - 12.8 \Rightarrow b + a = 25.6 \Rightarrow a = 25.6 - b$$

$$P[\tfrac{12.8-b}{1.6} \leq Z \leq \tfrac{b-12.8}{1.6}] = 0.9$$
$$\tfrac{b-12.8}{1.6} = 1.645 \Rightarrow b = 1.645 \cdot 1.6 + 12.8$$
$$b = 15.432 \Rightarrow a = 10.168.$$

41. Sigui $X \sim N(0,1)$, i $(Y|X=x) \sim N(2x-3, 12)$. Determineu la distribució marginal de Y i la correlació entre X i Y.

Solució:
Sabem que si

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

aleshores la distribució condicional de Y, donat $X = x$, és la distribució normal de mitjana $\mu_* = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$ i de variància $\sigma_*^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$. És a dir,

$$Y|_{X=x} \sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right).$$

En aquest cas tenim que $\mu_X = 0$, $\sigma_X^2 = 1$,

$$\mu^* = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X) = 2X - 3, \;\; \sigma_*^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2) = 12.$$

Aleshores,

$$\left.\begin{array}{rcl} \mu_Y + \rho\sigma_Y X &=& 2X-3 \\ \sigma_Y^2(1-\rho^2) &=& 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \mu_Y &=& -3 \\ \rho\sigma_Y &=& 2 \\ \sigma_Y^2(1-\rho^2) &=& 12 \end{array}\right\}$$

Resolem aquest sistema d'eqüacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho &=& 2/\sigma_Y \\ \sigma_Y^2(1-\rho^2) &=& 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{2^2}{\rho^2}(1-\rho^2) = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} - 1 = 3 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma_Y = 4.$$

Aleshores $\rho(X,Y) = \rho = 0.5$ i $Y \sim N(\mu_Y = -3, \sigma_Y^2 = 4^2)$.