Probabilitat i Estadística 1
Problemes Tema 4. Sumes de variables aleatòries. Normal bivariant. Llei dels Grans Nombres. Teorema del Límit Central.

(Professors: Pedro Delicado i Oriol Serra)

1 Mitjana i variància mostral

1. Siguin $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. amb esperança μ i variància σ^2. Es defineix la variància mostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Proveu que $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$.

2 Distribució normal bivariada.

2. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada i tals que $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2)$. Demostreu que les v.a $S = X_1 + X_2$ i $D = X_1 - X_2$ són independents.

3. Sigui $X \sim N(0, 1)$ i $a > 0$. Sigui

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| < a, \\ -X & \text{si } |X| \geq a. \end{cases}$$

   (a) Proveu que $Y \sim N(0, 1)$.

   (b) La distribució conjunta de (X, Y), és normal bivariant? Són independents?

   (c) Doneu l'expressió de $\rho(a) = \mathrm{cor}(X, Y)$ en termes de la funció de densitat $\phi(x)$ de X.

   (d) Deduïu-ne que existeix un valor a^* pel qual $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$ tot i que X i Y no siguin independents.

4. Siguin (X_1, X_2) dues v.a. amb distribució conjunta normal bivariada amb mitjanes μ_1 i μ_2, variàncies σ_1^2 i σ_2^2 i correlació ρ. Determineu la distribució de $X_1 - 3X_2$.

5. Sigui (X, Y) un vector aleatori que segueix una distribució normal bivariada de paràmetres $\mu_X = 40$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 4$ i $\rho = 0.6$. Trobeu l'interval més curt ($[a, b]$) tal que la probabilitat condicionada de que Y pertanyi a l'interval ($[a, b]$) donat que $X = 22$ sigui igual a 0.90.

6. Sigui $X \sim N(0, 1)$, i $(Y|X = x) \sim N(2x - 3, 12)$. Determineu la distribució marginal de Y i la correlació entre X i Y.

3 Convergència en distribució

7. Sigui $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de variables aleatòries tals que la distribució de X_n ve donada per la funció de probabilitat següent:

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}, \text{ per a } k = 1, \ldots, n.$$

Determineu a quina distribució convergeix X_n en distribució i proveu que efectivament es té aquesta convergència.

8. Sigui $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ una successió de v.a. i.i.d. definides per

$$P(U_n = 1) = p, \quad P(U_n = -1) = q, \ 0 \leq p \leq 1, \ p + q = 1.$$

Definim la successió: $V_1 = U_1, V_2 = U_1U_2, \ldots, V_n = \prod_{k=1}^{n} U_k$.

(a) Calculeu $E[V_n]$.

(b) Trobeu p_n i q_n on $p_n = P(V_n = 1)$ i $q_n = P(V_n = -1)$.

(c) Estudieu la convergència en llei de la successió $\{V_n\}_{n\geq 1}$.

3.1 Altres tipus de convergències de succecions de variables aleatòries

9. Siguin $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatòries amb distribucions discretes donades per les funcions de probabilitat següents:
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},\ P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2n}.$$

   (a) Proveu que $X_n \xrightarrow{p} 0$ quan $n \to \infty$.

   (b) Proveu que $X_n \xrightarrow{r} 0$ quan $n \to \infty$ per a qualsevol $r > 0$.

10. Siguin $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatòries independents amb distribució $U([0,1])$.

   (a) Proveu que $X_{(n),n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{p} 1$ quan $n \to \infty$.

   (b) Proveu que $X_{(1),n} = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{p} 0$ quan $n \to \infty$.

11. Siguin $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatòries independents amb distribució $U([0,1])$. Sigui $X_{(1),n} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Proveu que $Y_n = nX_{(1),n} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$ quan $n \to \infty$.

12. Sigui $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una successió de v.a.i.i.d. amb esperança μ i variància finita σ^2. Definim
$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i.$$
Demostreu que Y_n convergeix a μ en probabilitat.
Nota: Recordeu que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, aleshores
$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} iX_i}{\sum_{i=1}^{n} i}.$$
Per tant Y_n és una mitjana ponderada de les variables aleatòries $X_1, \ldots, X_n$, on el pes de cada variable aleatòria X_i és proporcional al seu índex i.

4 Teorema del Límit Central i Lleis dels Grans Nombres

13. Sigui $X_r \sim \text{BinNeg}(r,p)$, $r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$. X_r compte el nombre d'experiments independents de Bernoulli amb probabilitat d'èxit p que s'han de fer fins a obtenir r èxits. Recordem que $E(X_r) = r/p$, $V(X_r) = r(1-p)/p^2$. Feu servir el TCL per provar que
$$\frac{pX_r - r}{\sqrt{r(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ quan } r \to \infty.$$

14. Sigui $h(x)$ una funció real definida en $[0,1]$ tal que se sap que la seva integral
$$I(h) = \int_0^1 h(x)dx$$
existeix y és finita. Es vol calcular $I(h)$ i no és possible fer-ho explícitament. Una forma de resoldre numèricament aquesta integral és el mètode de Monte Carlo, que consisteix en

   (i) generar n v.a.i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$, amb $X_i \sim U([0,1])$, i

(ii) estimar $I(h)$ mitjançant

$$\hat{I}(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i).$$

(a) Demostreu que $E(\hat{I}(h)) = I(h)$.

(b) Demostreu que $\hat{I}(h) \xrightarrow{p} I(h)$ quan $n \to \infty$.

(c) Sabem que

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

donat que aquesta integral és l'àrea d'un quart del cercle de centre $(0,0)$ i radi unitat. Feu servir el Teorema del Límit Central per calcular quantes observacions aleatòries X_i s'han de generar per tal que, amb una probabilitat de 0.95, l'estimació de π mitjançant el mètode de Monte Carlo tingui una precisió de 0.01? Dit d'una altra manera, calculeu n tal que

$$P(|\hat{\pi}_{MC} - \pi| \leq 0.01) \geq 0.95.$$

15. Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a.i.i.d. $U(0,1)$. Estudieu la convergència en probabilitat de la successió $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i^{1/n}$. ($Z_n$ és la mitjana geomètrica de les n primeres variables X_i).

16. Suposeu que una companyia envia paquets de pesos variables, amb un pes mig de 9 Kg i una desviació estàndard de 4 Kg. Els paquets provenen d'un gran nombre de clients i per tant és raonable el pensar que llurs pesos són independents. Trobeu la probabilitat que el pes total corresponent a 100 paquets sobrepassi una tona.

17. Es tira 1000 vegades una moneda perfecta i es demana:

(a) Probabilitat que el nombre de cares estigui comprés entre 490 i 510.

(b) L'interval $[a,b]$, centrat en 500, que compleixi $P([a,b]) = 0.95$.

18. Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successió de variables aleatòries independents tals que $E[X_i] = \mu$ per a tot i i $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Demostreu que si $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \longrightarrow 0$ quan $n \to \infty$, aleshores $\overline{X}_n \longrightarrow \mu$ en probabilitat quan $n \to \infty$.