

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.3 Additiver Funktor Hom

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Die Hom-Funktoren in der der Kategorie der R -Moduln sind additiv.

Damit dieser Satz Sinn macht, muss vorher erwiesen werden, dass die Hom-Mengen in der Kategorie der R -Moduln abelsche Gruppen sind und dass die Komposition von Morphismen ist biadditiv ist, mit anderen Worten dass das Distributivgesetz zwischen Addition und Verknüpfung von Morphismen gilt.

Damit erweisen sich die Kategorien der R -Moduln als **Ab**-Kategorien. Dies ist ein erster Schritt zu zeigen, dass sie sogar abelsche Kategorien sind.

Die Hom-Mengen sind aber nicht wieder R -Moduln. Das ist anders als in der Kategorie der abelschen Gruppen, wo die Hom-Mengen selber in der Kategorie liegen. In der Kategorie der R -Moduln liegen die Hom-Mengen in einer anderen Kategorie.

Wenn wir uns das Hindernis ansehen, welches bei den Hom-Mengen dem R -Modul im Wege steht, so ist es die fehlende Kommutativität im Ring R .

Da die Elemente des Zentrums von R , also $Z(R)$ mit allen Elementen von R vertauschen, können diese unter diesem Hindernis hindurch schlüpfen: die Hom-Mengen sind $Z(R)$ -Moduln.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Funktoren, additive Funktoren, **Ab**-Kategorien

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln

https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.1.1.2 (Höher) Homologische Algebra - Ring-Darstellung = Modul

<https://youtu.be/FBQAdljFVF4>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellung_\(Gruppe\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellung_(Gruppe))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Polynomring>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Monoidring>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebra>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter [uups](#)

1. v5.1.1.1.3 ADDITIVER FUNKTOR HOM

1.1. Po. Die folgende

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Eine Gruppe, nicht notwendig abelsch
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
\vec{x}, \vec{y}	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen.
	Entspricht in etwa Vektoren
\vec{r}	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus