

(Höhere Grundlagen) Kategorien

## **v5.0.1.1.4.5 Prägarben**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Eine Prägarbe ist eine Funktor-Kategorie nach **Set**, also ein  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  für eine kleine Kategorie  $\mathcal{C}$ .

**Präsentiert.** Von Jörg Kunze

**Voraussetzungen.** Kategorie, Funktor, Natürliche Transformation, Funktor-Kategorie

**Text.** Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren

<https://youtu.be/0jf5LQGeyOU>

v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen

<https://youtu.be/v1F5BFH8nbo>

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen

<https://youtu.be/IN7Qa-Sw1D0>

vv5.0.1.1.4 (Höher) Kategorien - Funktorkategorien

<https://youtu.be/byvbGxRz1hs>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Funktorkategorie>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Pfeilkategorie>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutatives\\_Diagramm](https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutatives_Diagramm)

<https://ncatlab.org/nlab/show/commutative+square>

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

**Das Video.** Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

#### 1. v5.0.1.1.4.1 KOMMUTATIVE QUADRATE

**1.1. Kommutatives Quadrat.** Ein kommutatives Quadrat besteht aus folgender Anordnung von Objekten und Morphismen

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & C \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{s} & D \end{array}$$

so dass gilt  $gr = sf$ .

In dem hier eingenommenen Blickwinkel wird der Pfeil  $f$  auf den Pfeil  $g$  abgebildet. Nennen wir die Abbildung  $\alpha$ , so können wir das Bild von oben so darstellen:

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(A) \\ \downarrow f & & \downarrow \alpha(f) \\ B & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(B) \end{array}$$

Ähnlich, wie in der Gruppentheorie die unterschiedlichsten Verknüpfungen immer mit  $*$  oder  $+$  bezeichnet werden, haben wir (nur für dieses Bild) auch den Zielmorphismus mit  $f$  bezeichnet. Die beiden Komponenten von  $\alpha$  würden präzise mit  $\alpha_A$  und  $\alpha_B$  bezeichnet werden.

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(A) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(B) \end{array}$$

so dass gilt:

$$(4) \quad f\alpha = \alpha f.$$

In der Gruppentheorie gilt bei einem Gruppenhomomorphismus  $\phi$ , dass  $\phi(x*y) = \phi(x)*\phi(y)$ , d. h. es ist egal, ob wir erst verknüpfen und dann den Homomorphismus anwenden oder umgekehrt. In einem Komm-Quad ist es egal ob wir zuerst unser  $\alpha$  und dann  $f$  anwenden oder umgekehrt. Im Falle von **Set** haben wir  $f(\alpha(a)) = \alpha(f(a))$

**1.2. Innerhalb der Kategorie.** Die  $\alpha_A$  und  $\alpha_B$  sind Morphismen der Kategorie, in der wir gerade befinden. Sind wir in der Kategorie der Gruppen unterwegs, sind es also Gruppen-Homomorphismen und nicht irgendwelche Funktionen. Diese Verschiebung findet also innerhalb der Kategorie statt. Ähnlich wie eine Homotopie einer Kurve in eine andere nicht irgendeine stetige Abbildung ist, sondern eine stetige Verschiebung der Kurve innerhalb des betrachteten Raumes in die Zielkurve.

Siehe v5.0.1.0.4 Natürliche Transformationen

**1.3. Beispiele kommutativer Quadrate.** Distributiv:

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{a \cdot} & a \cdot b \\ \downarrow +c & & \downarrow +a \cdot c \\ b + c & \xrightarrow{a \cdot} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \end{array}$$

Assoziativ:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{a \cdot} & a \cdot b \\ \downarrow \cdot c & & \downarrow \cdot c \\ bc & \xrightarrow{a \cdot} & a(bc) = (ab)c \end{array}$$

Funktor:

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{F} & C \\ \downarrow \circ g & & \downarrow \circ F(g) \\ f \circ g & \xrightarrow{F} & F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \end{array}$$

Natürliche Transformation:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

**1.4. Das Verknüpfen kommutativer Quadrate.** Bei dem Beweis, dass die natürlichen Transformationen die Axiome der Morphismen einer Kategorie erfüllen (v5.0.1.1.4 Funktorkategorien), haben wir im Grunde genommen bewiesen, dass das Aneinanderhängen kommutativer Quadrate wieder kommutative Quadrate ergibt.

Hier gibt es eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung.

#### LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)  
 [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)  
 [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)  
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)  
 [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

#### SYMBOLVERZEICHNIS

$P(x)$	ein Prädikat
$A, B, C, \dots, X, Y, Z$	Objekte
$F, G$	Funktoren
$V, V'$	Vergiss-Funktoren
$f, g, h, r, s, \dots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
<b>Set</b>	Die Kategorie der kleinen Mengen
<b>Ab</b>	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von $X$ nach $Y$
$\alpha, \beta, \dots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\text{op}}$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
<b>Ring, Gruppe</b>	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
$U, U', U''$	Universen
$V_{\alpha}$	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl $\alpha$