

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.4 Unter-Moduln

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Ein Unter-Modul ist eine Teilmenge, die abgeschlossen bezüglich der Modul-Operationen ist, also eine Unter-Abelsche-Gruppe, in der die Skalarmultiplikation mit Elementen aus dem Ring in der Unter-Gruppe bleibt.

Kategorisch und äquivalent ist es das Ziel eines Epi-Morphismus.

Ein Ring und seine Ideale sind selber Unter-Module.

Ausgehend von einem Ideal und eine Modul, können wir die Menge aller Vielfachen von Modul-mit Ideal-Elementen bilden. Dies ist ein Unter-Modul. Intuitiv entsteht es durch ausdünnen. Eine Situation, die es so bei Vektorräumen nicht gibt.

Aus einer Teilmenge eines Moduls können wir die Menge aller endlichen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus dem Ring bilden. Dies ist ein Unter-Modul.

Eine Basis gibt es aber nicht immer und es gibt allerlei Phänomene, wie das \mathbb{Z} -Modul \mathbb{Q} zeigt.

Den Beweis, dass \mathbb{Q} kein minimales Erzeugendensystem hat, habe ich aus [math.stackexchange.com](https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-generating-set) von Camilo Arosemena Serrato. Vielen Dank dahin. <https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-generating-set>

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Vektorräume, Unter-Gruppen

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.4%20Unter-Moduln>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln

https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null

https://youtu.be/n4-qZJK_sH0

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Unterm modul>

<https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-gener>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Ideal_\(Ringtheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Ideal_(Ringtheorie))

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebra>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter [uups](#)

1. v5.1.1.1.4 UNTER-MODULN

1.1. Definition Unter-Modul.

Definition 1.1.1. (Unter-Modul): Sei R ein Ring mit 1 und M ein R -Modul. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge der Elemente von M . Ist diese abgeschlossen gegenüber den Ringoperationen $(0, 1, +, -, \cdot)$, so ist es ein **Unter-Modul**.

Kategorischer und leichter auf andere Situationen zu verallgemeinern ist folgende äquivalente Definition:

Definition 1.1.2. (Unter-Modul kategorisch): Sei R ein Ring mit 1 und M, N seien R -Moduln. Sei $i: N \rightarrow M$ ein R -Modul-Homomorphismus. Sei weiter i mono. Mit anderen Worten ist i linkskürzbar in folgendem Sinne: für alle $f, g: L \rightarrow N$ gilt $i \circ f = i \circ g \Rightarrow f = g$. $i': N' \rightarrow M$ ist äquivalent zu i , wenn es einen Isomorphismus $h: N \rightarrow N'$ gibt mit $i = i' \circ h$. Die Äquivalenzklassen dazu heißen **Unter-Moduln**.

Das Bild eines solchen i ist das Unter-Modul gemäß der oberen Definition passend zur Äquivalenzklasse $[i]$ der unteren Definition.

1.2. Ideale als Unter-Moduln. Sei R ein Ring mit 1 und I ein Ideal von R . Dann ist I ein R -Modul. Insbesondere ist auch R ein R -Modul. Das ein Teil vom Skalarbereich ein Modul zu eben diesem Skalarbereich ist, gibt es bei Vektorräumen nicht.

Sei M ein R -Modul und I wie oben ein Ideal von R .

Definition 1.2.1. (Ideal mal Modul):

$$(1) \quad IM := \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}.$$

IM ist R -Unter-Modul von M . IM ist auch (und im Allgemeinen eine echte) Teilmenge von M . Aber, falls $I \neq \{0\}$, dann IM steckt alle Richtungen von M ab (ein intuitiver Begriff) in folgendem exakten Sinne:

$$(2) \quad \forall m \in M \exists r \in R: rm \in IM.$$

Wir müssen ja nur für r ein $i \neq 0$ aus I wählen.

Diese Intuition hat eine Schwäche darin, dass es durchaus Ideale geben kann, die nicht alle Richtungen innerhalb des Rings abdecken. Nehmen wir z. B. \mathbb{Z}^2 als *Ring* mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Dann ist $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal. Aus diesem kommen wir durch Multiplikation mit Elementen aus \mathbb{Z}^2 nicht raus. Das ist ja gerade die Definition von Ideal.

1.3. Generierte Unter-Moduln. Sei R ein Ring mit 1. Sei M ein R -Modul und $G \subseteq M$ irgendeine Teilmenge von M .

Definition 1.3.1. (Generiertes Unter-Modul):

$$(3) \quad \langle G \rangle := \{r_1 g_1 + \cdots + r_n g_n \mid g_i \in G \wedge r_i \in R \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Also die Menge aller **endlichen** Linearkombinationen von Elementen aus G mit Koeffizienten aus dem Ring. Die leere Summe hat dabei den Wert 0.

Ein generiertes Unter-Modul ist ein R -Unter-Modul, was bewiesen werden muss.

WICHTIG: es sind nur *endliche* Summen erlaubt. Unendlichen Summen kann so ohne weiteres kein Wert in M zugeordnet werden.

1.4. Es gibt nicht immer eine Basis. Wir können zu jedem R -Modul M eine Menge G finden, die M generiert: wir nehmen einfach ganz ineffizient $G := M$.

Betrachten wir das \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Hier gilt für jedes $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dass $nx = 0$. Also gibt es hier keine linear unabhängigen Elemente. Jedenfalls nicht im üblichen Sinne.

Betrachten wir das \mathbb{Q} -Modul \mathbb{Q} . Sei $q \in \mathbb{Q}$. Dann ist $q/2$ nicht in $\langle \{q\} \rangle$. Also generiert $\{q\}$ nicht \mathbb{Q} . Seien nun q_1, \dots, q_n Elemente von \mathbb{Q} . Sei s der kleinste gemeinsame Nenner dieser Brüche. Dann kann $\frac{1}{2s}$ nicht durch Linearkombinationen dieser q_i dargestellt werden. Es kann also kein endliche generierende Mengen geben.

Auf der anderen Seite sind je zwei Generatoren linear abhängig. Seien $p_1/q_1, p_2/q_2$ zwei Generatoren dann gilt

$$(4) \quad p_2 q_1 \frac{p_1}{q_1} - p_1 q_2 \frac{p_2}{q_2} = 0.$$

Sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine generierende Mengen. Solche Mengen gibt es, wie z. B. $G = \mathbb{Q}$ zeigt. Sei $g \in G$. Für jedes $n \in \mathbb{N}, n > 0$ lässt sich g/n mit Hilfe der Generatoren darstellen: Wir müssen beachten, dass dazu eventuell g selber benötigt wird.

$$(5) \quad \frac{g}{n} = r_n g + \sum_i r_{n,i} g_i.$$

Daraus folgt, dass sich g immer unter Verwendung eines beliebigen Vielfachen von g darstellen lässt:

$$(6) \quad g = nr_n g + \sum_i nr_{n,i} g_i,$$

und, die Zahlen $(1 - nr_n)g$ lassen sich ohne die Verwendung von g darstellen:

$$(7) \quad (1 - nr_n)g = \sum_i nr_{n,i} g_i.$$

Nun starten wir mit $n = 2$ (es geht aber auch jede andere ganze Zahl größer 0)

$$(8) \quad (1 - 2r_2)g = \sum_i 2r_{2,i} g_i.$$

Wir wissen also, wir können $(1 - 2r_2)g$ durch einen Ausdruck ohne g ersetzen. Nun drücken wir g unter Verwendung des $(1 - 2r_2)$ -fachen von g aus mit $n = (1 - 2r_2) =: m$

$$(9) \quad g = mr_m g + \sum_j mr_{m,j} g_j = r_m (1 - 2r_2)g + \sum_j mr_{m,j} g_j = \sum_i 2r_m r_{2,i} g_i + \sum_j mr_{m,j} g_j.$$

Sei p ein Zahl. Betrachte die Generator-Menge G_p :

$$(10) \quad G_p := \left\{ \frac{1}{p^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dies ist nicht ganz \mathbb{Q} und somit ein Unter- \mathbb{Z} -Modul. Aus G_p können wir beliebig viele Elemente entfernen, solange wir zu jedem $\frac{1}{p^n}$ ein $\frac{1}{p^m}$ mit $m > n$ haben, was drinne bleibt.

Die beiden letzten Beispiele zeigen, dass es Generierenden-Systeme gibt, die kein minimales Untersystem haben, welches dasselbe Modul generiert.

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
\vec{x}, \vec{y}	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
\vec{r}	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R -Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul