

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.5.1 Direkte Summe vs Summe

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Neben der kategorisch definierten Summe als Kolimit (direkte Summe genannt) können wir im Falle zweier Unter-Moduln eines Moduls eine Summe der beiden auch als Menge aller Summen von je einem Element aus dem einen und einem aus dem anderen definieren. Dann erhalten wir ein neues Unter-Modul des Ausgangsmoduls. Wir bleiben also innerhalb des Moduls. Dies ist ein anderes Konzept die beiden Summen sind nie gleich und nur unter besonderen Bedingungen isomorph.

Bei zwei Unter-Moduln können wir die kategorische/direkte und die innere Summe bilden.

Wir nennen die innere Summe eine innere direkte Summe, wenn jedes Element der Summe sich in nur einer Weise als Summe der Ausgangs-Moduln schreiben lässt. In dem Fall ist die innere direkte Summe auch isomorph zur direkten Summe. Sie ist aber nie gleich.

Mit der Schreibweise des Gleich drücken wir (etwas komisch) aus, dass diese Eindeutigkeit gegeben ist.

Aus der Isomorphie einer inneren Summe von zwei Unter-Moduln zu deren direkten Summe folgt allerdings noch nicht, dass es eine innere direkte Summe ist. Letzteres ist also ein stärkeres Kriterium.

Das Konzept der innere direkte Summe wird oft dann verwendet, wenn diese Summe gleich dem ganzen Ausgangsmodul ist. Wir nennen dann die Summanden „direkte Summanden“.

Wir definieren „ S ist direkter Summand von M “ als: es gibt einen weiteren Unter-Modul T von M , sodass M direkte Summe von S und T ist. Wir schreiben dann $M = S \oplus T$.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.5.1%20Direkte%20Summe%20vs%20Summe>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln

https://youtu.be/JY43_07kNmA

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

https://proofwiki.org/wiki/Definition:Internal_Direct_Sum_of_Modules

<https://ncatlab.org/nlab/show/internal+direct+sum>

<https://ncatlab.org/nlab/show/direct+sum>

https://en.wikipedia.org/wiki/Direct_sum_of_modules

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebra>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter [uups](#)

1. v5.1.1.1.5.1 DIREKTE SUMME VS SUMME

1.1. ???

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen.
	Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R -Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul