(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.4.1 Kommutative Quadrate

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Ein kommutatives Quadrat wird so durch 4 Objekte und 4 Morphismen aufgespannt, dass wir vom ersten zum vierten sowohl über das zweite als auch über das dritte kommen können und das Ergebnis ist das gleiche.

Hier wird also nichts vertauscht, wie beim Kommutativgesetz. Sondern in einer Masche (Quadrat) im Netz einer Kategorie ist es egal, wie 'rum wir gehen. Oder doch rechts-runter und runter-rechts.

Wir gehen auf zwei Wegen von A nach B aber es kommt das gleiche raus.

Wieso kommen die immer wieder und überall in der Kategorientheorie vor? Wieso ist es die „richtige" Wahl bei der Definition von natürlichen Transformationen? (als Hom der Hom's, als Nat's)

Ein Komm-Quad ist eine strukturerhaltende Abbildung von einem Pfeil auf einen anderen.

... und das innerhalb einer Kat. Also eine Art Morphismen-Endomorphismus.

Dabei werden Anfang und Ende des Pfeils mit Morphismen der Kat auf ihre Ziele abgebildet.

Der Pfeil wird also nicht irgendwie abgebildet, sondern durch die Kat als Medium gezogen.

Es eine natürliche Transformation der einfachsten Kategorie (nur ein Pfeil.)

Es ist die Urzelle aller strukturkonformen Überführungen einer Struktur in eine andere.

Wie eine Homotopie eine Kurve durch einen Raum zieht.

Ein kommutatives Quadrat ist also eine Art Morphismen-Homotopie.

Kommutative Quadrate umgeben uns (heimlich) seit wir klein sind.

Das Aneinanderhängen kommutativer Quadrate ergibt wieder kommutative Quadrate. Wir haben horizontale und eine vertikale Verknüpfungen kommutativer Quadrate.

Wir können mit ihnen rechnen.

Das Gewebe aus kommutativen Quadraten durchzieht die Mathematik von Anfang an und zunächst unentdeckt wie ein Stützskelett. Nur hat uns bisher niemand den Blickwinkel gezeigt, unter welchem sie sich als solche zu erkennen geben.

Distributiv-, Assoziativ-, Kommutativgesetz, Funktoraxiom, natürliche Transformation: alles sind in Wirklichkeit kommutative Quadrate.

Die Kategorien-Theorie macht dieses Gewebe sichtbar. Nun können wir oft unsere Rechen-Intuition durch geplante Wege durch das Gewebe ersetzen.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, Natürliche Transformation, Funktor-Kategorie

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU

v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen
https://youtu.be/v1F5BFH8nbo

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen
https://youtu.be/IN7Qa-SwlDO

vv5.0.1.1.4 (Höher) Kategorien - Funktorkategorien
https://youtu.be/byvbGxRz1hs

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)
https://de.wikipedia.org/wiki/Funktorkategorie
https://de.wikipedia.org/wiki/Pfeilkategorie
https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutatives_Diagramm
https://ncatlab.org/nlab/show/commutative+square

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.4.1 Kommutative Quadrate

1.1. **Kommutatives Quadrat.** Ein kommutatives Quadrat besteht aus folgender Anordnung von Objekten und Morphismen

(1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "s"] & D \end{tikzcd}$$

so dass gilt $gr = sf$.

In dem hier eingenommenen Blickwinkel wird der Pfeil f auf den Pfeil g abgebildet. Nennen wir die Abbildung α, so können wir das Bild von oben so darstellen:

(2)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \alpha(A) \arrow[d, "\alpha(f)"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(B) \end{tikzcd}$$

Ähnlich, wie in der Gruppentheorie die unterschiedlichsten Verknüpfungen immer mit $*$ oder $+$ bezeichnet werden, haben wir (nur für dieses Bild) auch den Zielmorphismus mit f bezeichnet. Die beiden Komponenten von α würden präzise mit α_A und α_B bezeichnet werden.

(3)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \alpha(A) \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(B) \end{tikzcd}$$

so dass gilt:

(4)
$$f\alpha = \alpha f.$$

In der Gruppentheorie gilt bei einem Gruppenhomomorphismus ϕ, dass $\phi(x*y) = \phi(x)*\phi(y)$, d. h. es ist egal, ob wir erst verknüpfen und dann den Homomorphismus anwenden oder umgekehrt. In einem Komm-Quad ist es egal ob wir zuerst unser α ud dann f anwenden oder umgekehrt. Im Falle von **Set** haben wir $f(\alpha(a)) = \alpha(f(a))$

1.2. **Innerhalb der Kategorie.** Die α_A und α_B sind Morphismen der Kategorie, in der wir gerade befinden. Sind wir in der Kategorie der Gruppen unterwegs, sind es also Gruppen-Homomorphismen und nicht irgendwelche Funktionen. Diese Verschiebung findet also innerhalb der Kategorie statt. Ähnlich wie eine Homotopie einer Kurve in eine andere nicht irgendeine stetige Abbildung ist, sondern eine stetige Verschiebung der Kurve innerhalb des betrachteten Raumes in die Zielkurve.

Siehe v5.0.1.0.4 Natürliche Transformationen

1.3. **Beispiele kommutativer Quadrate.** Distributiv:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "a\cdot"] \arrow[d, "+c"] & a \cdot b \arrow[d, "+a\cdot c"] \\ b+c \arrow[r, "a\cdot"] & a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \end{tikzcd} \tag{5}$$

Assoziativ:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "a\cdot"] \arrow[d, "\cdot c"] & a \cdot b \arrow[d, "\cdot c"] \\ bc \arrow[r, "a\cdot"] & a(bc) = (ab)c \end{tikzcd} \tag{6}$$

Funktor:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\circ g"] & F(f) \arrow[d, "\circ F(g)"] \\ f\circ g \arrow[r, "F"] & F(f\circ g) = F(f)\circ F(g) \end{tikzcd} \tag{7}$$

Natürliche Transformation:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{8}$$

1.4. **Das Verknüpfen kommutativer Quadrate.** Bei dem Beweis, dass die natürlichen Transformationen die Axiome der Morphismen einer Kategorie erfüllen (v5.0.1.1.4 Funktorkategorien), haben wir im Grunde genommen bewiesen, dass das Aneinanderhängen kommutativer Quadrate wieder kommutative Quadrate ergibt.

Hier gibt es eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung.

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$P(x)$	ein Prädikat
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, **Gruppe**	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α