

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

## **v5.1.1.1.5.4 R-Mod ist abelsch**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2025 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Damit sich uns die Kategorie der  $R$ -Moduln als abelsch erweist, müssen wir noch das Axiom AK6 zeigen: Die Kategorie ist normal. D.h. alle Epi's und alle Mono's sind normal. D.h. jeder Epi ist ein Kokern und jeder Mono ist ein Kern.

Umgekehrt gilt das übrigens immer: jeder Kern ist Mono und jeder Kokern Epi.

Zum Beweis nutzen wir die in  $R$ -Mod vorhandene  $(E, M)$ -Faktorisierung (Epi-Mono-Faktorisierung): Jeder Morphismus  $f$  lässt sich als  $f = me$  schreiben. Bei  $R$ -Mod ist das Objekt zwischen  $e$  und  $m$  genau das Bild des Homomorphismuses.

Für dieses Bild gilt: Bild = Ker Koker = Koker Ker.

Damit beweisen wir schließlich das jeder Mono und jeder Epi normal ist.

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1.2 (Höher) Kategorien - Abelsche - Kern, Kokern  
<https://youtu.be/0et-arXLe0g>

v5.1.1.1.4 (Höher) Homologische Algebra - Unter-Moduln  
<https://youtu.be/4g2TgQx7JkI>

v5.1.1.1.4.5 (Höher) Homologische Algebra - Quotienten-Moduln  
<https://youtu.be/IomDICJyHdI>

v5.1.1.1.5 (Höher) Homologische Algebra - R-Mod ist additiv  
<https://youtu.be/aASa0qcjPgQ>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche\\_Kategorie](https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche_Kategorie)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian\\_category](https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_category)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Normal\\_morphism](https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_morphism)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Category\\_of\\_modules](https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_modules)

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag  
978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebra>

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

## 1. v5.1.1.1.5.4 R-MOD IST ABELSCH

### 1.1. ???

## LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

## SYMBOLVERZEICHNIS

$R$	Ein kommutativer Ring mit Eins
$G$	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe $G$
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von $n$ in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo $n$
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$x, y$	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
$r$	Element von $R^n$
$\phi$	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings $R$
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der $R$ -Homomorphismen von $X$ nach $Y$
$IM$	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus $G$ generierte Modul