

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

## **v5.1.1.1 Moduln**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Moduln sind die prototypischen Beispiele in der homologischen Algebra. Genauer sind es die Kategorien der  $R$ -Moduln, für jeden kommutativen Ring mit Eins eine Kategorie. Der eigentliche Schauplatz der homologischen Algebra sind die abelschen Kategorien. So dass wir sagen können, die homologische Algebra ist die Untersuchung von abelschen Kategorien.

Die Kategorien der  $R$ -Moduln sind abelsche Kategorien: welche Eigenschaften das sind und der Nachweis ist Teil dieses Kurses.

$R$ -Moduln sind Vektorräume, in denen wir statt einen Körper nur einen kommutativen Ring mit Eins voraussetzen. Das heißt wir haben eine kommutative Gruppe (wir sagen eine additive Gruppe) mit einer Skalarmultiplikation, welche assoziativ und distributiv ist und wo die Multiplikation mit Eins nichts macht.

Die simple Tatsache, dass wir nicht mehr zu jedem Skalar ein multiplikativ Inverses (noch  $0 \neq 1$ ) fordern, hat umfangreiche Konsequenzen für die entstehenden Phänomene. Es gibt erheblich schrägere Phänomene als bei den Vektorräumen.

Auf der anderen Seite funktioniert ein großer Teil der linearen Algebra auch in  $R$ -Moduln, so dass man lineare Algebra da studieren sollte, mit Anmerkungen, welche Sätze nur in Vektorräumen gelten. So verfährt z. B. „Algèbre“ Chapitre 2 von Nicolas Bourbaki [Bourbaki1970]

Phänomene sind beispielsweise

- Der Ring  $R$  kann Nullteiler haben
- In einer linearen Gleichung können wir nicht einfach durch einen Koeffizienten teilen, um ihn zu 1 zu machen
- Echte Teilmengen von  $R$ , die aber ungleich dem Null-Modul  $\{0\}$  sind, können  $R$ -Moduln sein
- Ein  $R$ -Modul kann stärker aufgewickelt sein als  $R$  selber (in dem Sinne, indem der Körper  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  aufgewickelt ist.) So ist z. B.  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul, obwohl  $\mathbb{Z}$  selber gar nicht aufgewickelt ist.
- Es gibt  $R$ -Moduln, die keine Basis haben.

Da abelsche Gruppen das selbe ist wie  $\mathbb{Z}$ -Moduln, sind  $R$ -Moduln gleichzeitig die Verallgemeinerung von Vektorräumen und abelschen Gruppen.

**Präsentiert.** Von Jörg Kunze

**Voraussetzungen.** Kategorien-Theorie, Ringe, Gruppen, lineare Algebra

**Text.** Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1%20Moduln>

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1 (Höher) Kategorien - Playlist

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLqVqq9xKS5R-baIvTr9GnW0Pb8r1Pig7S>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche\\_Kategorie](https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche_Kategorie)

[https://de.wikipedia.org/wiki/Homologische\\_Algebra](https://de.wikipedia.org/wiki/Homologische_Algebra)

[https://de.wikipedia.org/wiki/Modul\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Vektorraum>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Freier\\_Modul](https://de.wikipedia.org/wiki/Freier_Modul)

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre>

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

**Das Video.** Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

## 1. MODULN

**1.1. Definition.** Salopp: Ein  $R$ -Modul ist ein  $R$ -Vektorraum, wo  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins aber nicht notwendig ein Körper ist.

**Definition 1.1.1. (R-Modul):** Eine abelsche Gruppe  $M$  (additiv geschrieben, also mit  $+$  und  $0$ ) zusammen mit einem kommutativen Ring mit Eins  $R$  und einer Skalar-Multiplikation  $R \times M \rightarrow M$  heißt  **$R$ -Modul**, wenn für alle  $m, n \in M$  und  $r, s \in R$  gilt

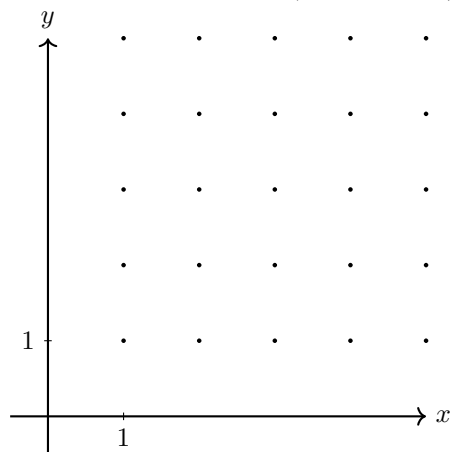
- (1)  $(rs)m = r(sm)$
- (2)  $(r + s)m = rm + sm$
- (3)  $r(m + n) = rm + rn$
- (4)  $1m = m$

### 1.2. Beispiele.

- (1)  $R$  ist selbst  $R$ -Modul
- (2)  $\mathbb{Z}^2$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (mit Löchern)
- (3)  $2\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (Echte Teilmenge von  $R$ )
- (4) Ideal = Unter- $R$ -Modul von  $R$
- (5)  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln)
- (6)  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (stärker aufgewickelt als  $R$ )
- (7)  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$  als  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -Modul (Achtung Nullteiler)
- (8) Freier  $R$ -Modul
- (9) Das  $\mathbb{Z}$ -Modul  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$  ist nicht kürzbar
- (10)  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist auch  $\mathbb{K}$ -Modul

1.2.1. *R ist selbst R-Modul.* Die Ring-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die Multiplikation eine interne ist, in dem Sinne, dass die Skalare die Elemente der additiven Gruppe selber sind.

1.2.2.  *$\mathbb{Z}^2$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (mit Löchern).* Auf den Achsen gibt es nur die ganzzahligen Werte.



1.2.3.  *$2\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (Echte Teilmenge von  $R$ ).* Dies ist bei Körpern nicht möglich. Da es auch keinen Null-Körper gibt, da hier immer  $0 \neq 1$  gilt, ist der einzige  $\mathbb{K}$ -Vektorraum in  $\mathbb{K}$  der ganze Körper  $\mathbb{K}$ .

1.2.4. *Ideal = Unter- $R$ -Modul von  $R$ .* Die Ideal-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die additiven Gruppe eine Teilmenge der Skalare sind.

1.2.5.  *$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  sind  $\mathbb{Z}$ -Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln).* Da es für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  Werte  $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$  mit

$$(5) \quad n_x x + n_y y = 0$$

gibt, bestehen hier Relationen zwischen den Elementen.

1.2.6.  *$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul (stärker aufgewickelt als  $R$ ).* Obwohl es in  $\mathbb{Z}$  keine Nullteiler gibt, gibt es im  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ein Element welches mit einem Skalar multipliziert Null ergibt:  $2 \cdot 3 = 0$ . Hier ist  $2 \in \mathbb{Z}$  aber  $3 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

1.2.7.  *$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$  als  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -Modul (Achtung Nullteiler).* Aufgrund der Nullteiler in  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  haben wir  $3\vec{x} + 3\vec{x} = 0$  für alle  $\vec{x} \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ .

1.2.8. *Freier  $R$ -Modul.*  $G$  ist die Menge der Generatoren (entspricht in etwa einer Basis)

$$(6) \quad \left\{ \sum_{i \in I} r_i g_i \mid I \subseteq G, I \text{ endlich}, r_i \in R, g_i \in G \right\}$$

in Worten: der  $R$ -Modul der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus  $G$  mit Koeffizienten aus  $R$ . Bei endlichem  $G = \{0, \dots, n-1\}$  schreiben wir dafür auch

$$(7) \quad R^n := R^{\{0, \dots, n-1\}},$$

in welchem Fall wir die Elemente des Moduls als Tupel schreiben:  $(r_0, r_1, r_2) \in R^3$ .

1.2.9. Das  $\mathbb{Z}$ -Modul  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$  ist nicht kürzbar. Wir haben

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und gleichzeitig

$$(9) \quad 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das heißt, in diesem  $\mathbb{Z}$ -Modul gilt im allgemeinen nicht

$$(10) \quad 4\vec{x} = 4\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y},$$

obwohl das entsprechende innerhalb von  $\mathbb{Z}$  gilt.

1.2.10.  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist auch  $\mathbb{K}$ -Modul. Da ein Körper unter anderem auch ein kommutativer Ring mit Eins ist, sind Vektorräume automatisch auch Moduln. Da abelsche Gruppen das gleiche wie  $\mathbb{Z}$ -Moduln sind, sind Moduln die gleichzeitige Verallgemeinerung von Vektorräumen und abelschen Gruppen.

#### LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)  
 [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)  
 [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)  
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

#### SYMBOLVERZEICHNIS

$R$	ein kommutativer Ring mit Eins
$n\mathbb{Z}$	das Ideal aller Vielfachen von $n$ in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo $n$
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente des Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren