(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.4.4.8 Äquivalenz von Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Äquivalente Kategorien können mit den Mitteln der Kategorien-Theorie kaum unterschieden werden. Viele Tatsachen übe eine Kategorie gelten automatisch immer auch für alle zu ihr äquivalenten.

Intuitiv unterscheiden sie sich ausschließlich in den Mächtigkeiten ihrer Äquivalenzklassen isomorpher Objekte. Isomorphe Objekte, also solche zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, können mit den Mitteln der Kategorien-Theorie gar nicht unterschieden werden.

Im Extremfall gibt es in einer Kategorie zu jedem Objekt kein weiteres isomorphes, jedes Objekt ist also das einzige seiner Art. Wählen wir aus einer Kategorie zu jeder Klasse isomorpher Objekte jeweils genau eins aus, erhalten wir das Skelett der Kategorie. Das Skelett ist äquivalent zur Ausgangskategorie. Zwei Kategorien sind äquivalent genau dann, wenn deren Skelette isomorph sind.

Äquivalente Kategorien können gegenseitig ineinander funktoriel abgebildet werden. Diese beiden Einbettungen hintereinandergeschaltet ergibt eine Einbettung in sich selbst. Diese ist natürlich isomorph zur Identität.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, natürliche Transformation, Isomorphismus

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.6.2.1%20Nullen%20in%20additiven%20Kategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1 (Höher) Kategorien - Abelsche - Nullobjekt
`https://youtu.be/XbOf-nVZ1t0`

v5.0.1.6.1.4 (Höher) Kategorien - Abelsche - Additiver Funktor
`https://youtu.be/zSP_a2RvoYE`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://ncatlab.org/nlab/show/Ab-enriched+category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_category`
`https://ncatlab.org/nlab/show/additive+category`
`https://ncatlab.org/nlab/show/zero+object`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Initial_and_terminal_objects`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Anfangsobjekt,_Endobjekt_und_Nullobjekt`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology`

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory`

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics`

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `huch!`

1. Nullen in additiven Kategorien

1.1. **Sorten von Nullen.** Wir unterscheiden folgende Nullen. Außerhalb dieses Textes werden wir sie alle mit 0 bezeichnen.

(1) 0^G Eine triviale abelsche Gruppe (auch Null-Gruppe genannt)

(2) $\vec{0}^G$ Das neutrale Element einer abelschen Hom-Gruppe

(3) 0^K Ein Null-Objekt der Kategorie

(4) $\vec{0}^K$ Ein Null-Morphismus in der Kategorie

Der Pfeil über der Null soll andeuten, dass es sich um einen Homomorphismus handelt. Wenn wir die beteiligten Objekte notieren wollen, so schreiben wir sie unten dran:

$$\vec{0}^G_{X,Y} \in \mathrm{Hom}(X,Y) \tag{5}$$

$$\vec{0}^K_{X,Y} \in \mathrm{Hom}(X,Y) \tag{6}$$

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X) \tag{7}$$

1.2. **Additive Kategorien.**

Definition 1.2.1. (Ab Kategorie): Eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren Hom-Mengen abelsche Gruppen also Objekte in **Ab** sind (**AB1**), heißt **Ab-Kategorie**, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Hom-Funktoren

$$\mathrm{Hom}(X, \_)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \tag{8}$$

$$\mathrm{Hom}(\_, Y)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \tag{9}$$

additive Funktoren sind (**AB2**). Diese Kategorien werden auch „präadditive Kategorien“ oder „**Ab**-angereicherte Kategorien“ genannt.

Satz 1.2.2. (Rechenregeln für Ab Kategorien): Sei $\mathcal{C}$ eine **Ab**-Kategorie und W, X, Y, Z Objekte aus $\mathcal{C}$. Dann gilt für alle $f \in \mathrm{Hom}(W, X)$ und alle $g, h \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und alle $k \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$:

$$(g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f) \quad \text{(Aa), additiv} \tag{10}$$

$$\vec{0}^G \circ f = \vec{0}^G \quad \text{(An), neutrales Element} \tag{11}$$

$$(-g) \circ f = -(g \circ f) \quad \text{(Ai), inverses.} \tag{12}$$

Und:

$$k \circ (g + h) = (k \circ g) + (k \circ h) \quad \text{(Aa), additiv} \tag{13}$$

$$k \circ \vec{0}^G = \vec{0}^G \quad \text{(An), neutrales Element} \tag{14}$$

$$k \circ (-g) = -(k \circ g) \quad \text{(Ai), inverses.} \tag{15}$$

Definition 1.2.3. (Additive Kategorie): Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **additiv**, wenn sie eine **Ab**-Kategorie ist und es alle endlichen (auch leeren) Produkte und Koprodukte gibt (**AB3**). Insbesondere gibt es Anfangs- und End-Objekte (initiale und terminale Objekte).

Das prototypische Beispiel einer additiven Kategorie ist die Kategorie aller R-Moduln über einem Ring R.

Satz 1.2.4. (Additive Kategorie hat Null-Objekt): Jede additive Kategorie hat Null-Objekte.

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Nach Definition hat sie ein End-Objekt E (leeres Produkt). Aufgrund der universellen Eigenschaften von End-Objekt enthält $\mathrm{Hom}(E, E)$ genau ein Element. Nach **AB1** ist $\vec{0}^G_E \in \mathrm{Hom}(E, E)$. Nach den Axiomen einer Kategorie ist $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Hom}(E, E)$ also gilt

$$\mathrm{id}_E = \vec{0}^G_E. \tag{16}$$

Sei $A \in \mathcal{C}$ ein beliebiges Objekt. $\mathrm{Hom}(E, A)$ ist, weil es eine Gruppe ist nicht leer. Sei nun $f \in \mathrm{Hom}(E, A)$ ein beliebiger Morphismus. Es gilt

$$f = f \circ \mathrm{id}_E = f \circ \vec{0}^G_E = \vec{0}^G_{E,A} \tag{17}$$

Das erste = gilt wegen der Axiome der Kategorien, das zweite wegen der eben gezeigten Identität und das dritte wegen der Rechenregel (An) aus [Satz 1.2.2, “Rechenregeln für Ab Kategorien”]. Also gibt es genau einen Morphismus von E nach A und, da A beliebig war, ist E auch ein Anfangs-Objekt. Die Definition von Null-Objekt ist, gleichzeitig Anfangs- und End-Objekt zu sein. □

1.3. Null-Morphismen.

Satz 1.3.1. (Null-Morphismus im Gruppen- und im Kategorie-Sinn ist das selbe): Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Ein Morphismus in der Gruppe $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist genau das neutrale Element dieser Gruppe, wenn er ein Null-Morphismus im Sinne der Null-Objekte ist.

$$\vec{0}^G = \vec{0}^K. \tag{18}$$

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Sei N ein Null-Objekt. $\mathrm{Hom}(N,N)$ hat wie im Beweis oben genau ein Element, was direkt aus der Definition von Null-Objekt folgt. $\mathrm{Hom}(N,N)$ enthält immer die Identität und immer das neutrale Element. Der eindeutige Morphismus von oder zu N ist aber auch der kategoriale Null-Morphismus. Somit:

$$\mathrm{id}_N = \vec{0}^G_N = \vec{0}^K_N. \tag{19}$$

Sei $A \in \mathcal{C}$ ein beliebiges Objekt. $\mathrm{Hom}(N,A)$ und $\mathrm{Hom}(N,A)$ enthalten, weil N Null-Objekt ist, genau einen Morphismus, der damit gleich dem neutralen Element sein muss:

$$\vec{0}^G_{N,A} = \vec{0}^K_{N,A} \tag{20}$$

$$\vec{0}^G_{A,N} = \vec{0}^K_{A,N}. \tag{21}$$

Sei schließlich $\vec{0}^K_{A,B}$ der Null-Morphismus zwischen A und B, dann gilt

$$\vec{0}^K_{A,B} = \vec{0}^K_{N,B} \circ \vec{0}^K_{A,N} = \vec{0}^G_{N,B} \circ \vec{0}^G_{A,N} = \vec{0}^G_{A,B} \tag{22}$$

Das erste = gilt wegen der Definition von Null-Morphismus, das zweite wegen der eben gezeigten Identität und das dritte wegen der Rechenregel (An) aus [Satz 1.2.2, "Rechenregeln für Ab Kategorien"]. □

Wegen dieses Satzes lassen wir bei Null-Morphismen ab hier das hochgestellte G oder K weg.

1.4. **Null-Objekte.**

Satz 1.4.1. (Null-Objekte haben triviale Hom-Mengen): Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und N ein Objekt in $\mathcal{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$N \quad \text{ist Null-Objekt} \quad \textbf{(N-Null)} \tag{23}$$

$$\mathrm{Hom}(N,N) = 0^G := \{\vec{0}\} \quad \textbf{(N-Hom)} \tag{24}$$

$$\mathrm{id}_N = \vec{0} \quad \textbf{(N-id)} \tag{25}$$

Beweis. **(N-Null) ⇒ (N-Hom)**: Da N Null-Objekt ist, enthält $\mathrm{Hom}(N,N)$ wie jedes $\mathrm{Hom}(N,X)$ genau ein Element und da $\mathrm{Hom}(N,N)$ eine Gruppe ist, muss dies das neutrale Element sein.

(N-Hom) ⇒ (N-id): Nach den Kategorie-Axiomen ist $\mathrm{id}_N \in \mathrm{Hom}(N,N)$ und da dies wiederum einelementig ist und $\vec{0}$ enthält, folgt die Behauptung.

(N-id) ⇒ (N-Null): Sei X ein beliebiges Element aus $\mathcal{C}$ und seien $f\colon X \to N$ und $g\colon N \to X$ beliebige Homomorphismen. Sie existieren, da $\mathrm{Hom}(X,N)$ und $\mathrm{Hom}(N,X)$ Gruppen also insbesondere nicht leer sind. Im Folgenden gilt das erste = wegen der Rechenregeln für id (der Kategorie-Axiome), das zweite wegen **(N-id)** und das dritte wegen **(An)**:

$$f = \mathrm{id}_N \circ f = \vec{0}_N \circ f = \vec{0}_{X,N} \tag{26}$$

$$g = g \circ \mathrm{id}_N = g \circ \vec{0}_N = \vec{0}_{N,X}. \tag{27}$$

Somit gibt es genau einen Morphismus $X \to N$ und genau einen $N \to X$, welches die Definition von Null-Objekt ist. □

1.5. **Bild von Null-Objekten.** Ein additiver Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definiert sich über die gruppentheoretische Eigenschaft bei der Abbildung von Morphismen f,g über $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$. Für solche Funktoren haben wir bereits gezeigt, dass

$$\mathcal{F}(\vec{0}) = \vec{0}. \tag{28}$$

Hier wird $\vec{0}$ in seiner Rolle als neutrales Element der Hom-Gruppen bemüht.

Die Definition von Null-Objekt hat zunächst nichts mit Gruppen zu tun. Dennoch sind sie nicht völlig losgelöst von der Gruppenstruktur auf den Hom-Mengen, wie wir oben gesehen haben. Es ergibt sich dennoch folgender

Satz 1.5.1. (Bild von Null-Objekt unter Funktor ist wieder Null-Objekt): Sei $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ additive Kategorien und $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein additiver Funktor. Dann gilt:

$$\mathcal{F}(0) = 0. \tag{29}$$

Beweis. Im Folgenden gilt das erste = wegen der Funktor-Axiome, das zweite wegen [Satz 1.3.1, “Null-Morphismus im Gruppen- und im Kategorie-Sinn ist das selbe”] und das dritte wegen $\mathcal{F}(\vec{0}) = \vec{0}$.

$$\mathrm{id}_0 = \mathcal{F}(\mathrm{id}_0) = \mathcal{F}(\vec{0}) = \vec{0}. \tag{30}$$

Damit folgt dann aus [Satz 1.4.1, “Null-Objekte haben triviale Hom-Mengen”] und dort **(N-id)** die Behauptung. □

Da wir in der Regel die Pfeile bei den Null-Morphismen weglassen, können wir uns einfach $\mathcal{F}(0) = 0$ im doppelten Sinne (Null-Objekte und Null-Morphismen) merken.

1.6. **Additiver Funktor ist die richtige Definition von Homomorphismus zwischen additiven Kategorien.** Additive Funktoren sind also verträglich mit ...

- der kategorischen Struktur, da es Funktoren sind
- der Gruppen-Struktur der Hom-Gruppen, da sie additiv sind
- (zumindest zum Teil) der additiven Struktur der additiven Kategorie, da sie Null-Objekte erhalten.

Es bleibt die Frage, ob ein additiver Funktor auch die übrigen endlichen Limites und Kolimites erhält. Dies ist der Fall, was wir aber hier nicht zeigen (siehe [MacLane1978] VIII Abelian Categories, 2. Additive Categories Proposition 4 (zusammen mit Theorem 2 ebendort)).

Sind zwei Categorien
$C, \mathcal{D}$ additive so auch ihr Produkt $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Viele „übliche“ Funktoren sind bei den additiven Kategorien additiv:

- Die Hom-Funktoren (ko- und kontravariant)
- Die Projekionen $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$
- Das Tensorprodukt abelscher Gruppen
- Adjungierte Funktoren und damit jede Menge weiter Beispiele wie z.B. der Produkt-Funktor und der Diagonal-Funktor.

Deswegen können wir sagen, dass additiver Funktoren die richtige Wahl für die Definition von Homomorphismen zwischen additiven Kategorien sind.

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
Ring nach **Gruppe**	Kategorie der Ringe und der Gruppen
$\mathrm{GL}_n(R)$	Allgemeine lineare Gruppe über dem Ring R
R^*	Einheitengruppe des Rings R
Det_n^R	n-dimensionale Determinante für Matrizen mit Koeffizienten in R.