(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.6.1.4 Additiver Funktor

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Additive Funktoren auf Kategorien, deren Hom-Mengen abelsche Gruppen, also Objekte in **Ab**, sind, sind definiert als verträglich mit den Gruppenstrukturen. Das will sagen, dass die induzierten Abbildungen **Ab**-Hom's, also abelsche Gruppen-Homomorphismen sind.

Wir könnten sie vielleicht besser gruppen-homomorphe Funktoren nennen. Allerdings folgt die Gruppen-Homomorphie schon aus der Additivität, daher der Name.

Ab-Kategorien sind über zwei Eigenschaften definiert: 1. Hom-Mengen sind Objekte in **Ab** und zusätzlich sind die Hom-Funktoren additiv also Gruppen-Homomorphismen.

Ab-Kategorien sind nicht zu verwechseln mit der Kategorie **Ab**. Letztere ist die eine Kategorie der abelschen Gruppen. **Ab**-Kategorien sind all die Kategorien, deren Hom-Mengen Objekte in **Ab** sind (und deren Hom-Funktoren struktur-verträglich sind). Allerdings ist **Ab** selbst auch eine **Ab**-Kategorie.

Generell sind zu bestimmten Kategorien V die V-Kategorien definiert als solche, deren Hom-Mengen Objekte in V sind, so dass eine Batterie weiterer Verträglichkeitseingenschaften gelten.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Axiome der Kategorien, Funktor, Hom-Funktor, abelsche Gruppen.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.6.1.4%20Additiver%20Funktor`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
`https://youtu.be/X8v5KylyOKI`

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorientheorie`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Hom-Funktor`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Gruppe_(Mathematik)`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche_Gruppe`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Gruppenhomomorphismus`
`https://ncatlab.org/nlab/show/Ab-enriched+category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Angereicherte_Kategorie`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter https://youtu.be/zSP_a2RvoYE

1. Additiver Funktor

Seien im Folgenden G, H abelsche Gruppen.

Definition 1.0.1. (Additive Funktion): Eine Funktion $f\colon G \to H$ zwischen zwei Gruppen heißt **additiv**, wenn für alle Elemente $x, y \in G$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Definition 1.0.2. (Gruppen-Homomorphismus): Eine Funktion $f\colon G \to H$ zwischen zwei abelschen Gruppen heißt **Gruppen-Homomorphismus**, wenn die Abbildung die Gruppenstruktur respektiert, präziser, wenn für alle Elemente $x, y \in G$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{(Ga), additiv} \tag{2}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{(Gn), neutrales Element} \tag{3}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{(Gi), inverses.} \tag{4}$$

Ein Gruppen-Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen ist nicht anderes als ein Morphismus in **Ab**, also ein **Ab**-Hom.

Satz 1.0.3. (Additive Funktion ist Gruppen-Homomorphismus): Eine additive Funktion $f\colon G \to H$ zwischen zwei Gruppen ist ein **Ab**-Hom.

Beweis. Mit Hilfe der Rechenregeln in Gruppen können wir wie folgt ausrechnen:

$$f(0) = f(0) + f(0) - f(0) = f(0+0) - f(0) = f(0) - f(0) = 0. \tag{5}$$

$$f(-x) = f(-x) + f(x) - f(x) = f(-x+x) - f(x) = f(0) - f(x) = 0 - f(x) = f(x). \tag{6}$$

Hier nutzen wir die Additivität und in der zweiten Zeile zusätzlich das in der ersten bewiesene $f(0) = 0$. □

Anmerkung 1.0.4. (Alternative Definition von Gruppen-Homomorphismus): Der [Satz 1.0.3, "Additive Funktion ist Gruppen-Homomorphismus"] ist der Grund, dass oft die Additivität als Definition von Gruppen-Homomorphismus genommen wird. Der Witz ist aber, dass wir sämtliche Gruppenstruktur respektiert haben wollen, und wir würden in anderen Umständen die Definition immer so weit ausdehnen, dass sie äquivalent wird zu der hier gegebenen.

1.1. **Additiver Funktor.** Allgemein seine im folgenden $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien deren Hom-Mengen Gruppen also Objekte in **Ab** sind.

Da ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ neben den Objekten der Kategorie $\mathcal{C}$ auch deren Morphismen abbildet, induziert dieser für jeweils zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ auch einen Funktion

$$\mathcal{F}_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \tag{7}$$

$$f \mapsto \mathcal{F}(f) \tag{8}$$

Definition 1.1.1. (Additiver Funktor): Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **additiv**, wenn die auf den Hom-Mengen $\operatorname{Hom}(X,Y)$ induzierten Funktionen $\mathcal{F}_{X,Y}$ jeweils additiv im Sinne von [Definition 1.0.1, "Additive Funktion"] sind.

Satz 1.1.2. (Rechenregeln für additive Funktoren): Seien $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein additiver Funktor und X, Y Objekte aus $\mathcal{C}$. Dann gilt für alle $f, g \in \operatorname{Hom}(X,Y)$:

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g) \quad \text{(Fa), additiv} \tag{9}$$

$$\mathcal{F}(0) = 0 \quad \text{(Fn), neutrales Element} \tag{10}$$

$$\mathcal{F}(-f) = -\mathcal{F}(f) \quad \text{(Fi), inverses.} \tag{11}$$

Ein additiver Funktor induziert Gruppen-Homomorphismen zwischen den Hom-Gruppen.

Beweis. [Satz 1.0.3, "Additive Funktion ist Gruppen-Homomorphismus"] □

Anmerkung 1.1.3. (Richtige Definition von Funktor mit Hom-Gruppen): [Satz 1.1.2, "Rechenregeln für additive Funktoren"] zeigt, dass additive Funktoren die Gruppenstruktur auf den Hom-Mengen respektieren. Damit ist es die „richtige" Definition für Funktore in Kategorien mit der Extra-Struktur von abelschen Gruppen auf den Hom-Mengen. Die 0 in (Fn) ist übrigens der Null-Morphismus $0 \in \operatorname{Hom}(X,Y)$, den es immer gibt, da $\operatorname{Hom}(X,Y)$ eine Gruppe ist.

1.2. **Ab-Kategorien.**

Definition 1.2.1. (Ab Kategorie): Eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren Hom-Mengen abelsche Gruppen also Objekte in **Ab** sind, heißt **Ab-Kategorie**, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Hom-Funktoren

$$\operatorname{Hom}(X, \_)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \tag{12}$$

$$\operatorname{Hom}(\_, Y)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \tag{13}$$

additive Funktoren sind. Diese Kategorien werden auch „präadditive Kategorien" oder „**Ab**-angereicherte Kategorien" genannt.

Hier eine graphische Veranschaulichung der Objekte und Homomorphismen des folgenden Satzes:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"] & \\ X \arrow[r, "{g,h}"] \arrow[dr, dashed, "k\circ g"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ & Z \end{tikzcd} \tag{14}$$

Satz 1.2.2. (Rechenregeln für Ab Kategorien): Sei $\mathcal{C}$ eine **Ab**-Kategorie und W, X, Y, Z Objekte aus $\mathcal{C}$. Dann gilt für alle $f \in \mathrm{Hom}(W, X)$ und alle $g, h \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und alle $k \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$:

$$(g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f) \quad \text{(Aa), additiv} \tag{15}$$

$$0 \circ f = 0 \quad \text{(An), neutrales Element} \tag{16}$$

$$(-g) \circ f = -(g \circ f) \quad \text{(Ai), inverses.} \tag{17}$$

Und:

$$k \circ (g + h) = (k \circ g) + (k \circ h) \quad \text{(Aa), additiv} \tag{18}$$

$$k \circ 0 = 0 \quad \text{(An), neutrales Element} \tag{19}$$

$$k \circ (-g) = -(k \circ g) \quad \text{(Ai), inverses.} \tag{20}$$

Beweis. Der [Satz 1.0.3, "Additive Funktion ist Gruppen-Homomorphismus"] verbunden mit

$$\mathrm{Hom}(f, Y) = \_ \circ f \colon \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(W, Y) \tag{21}$$

$$g \mapsto f \circ g. \tag{22}$$

sowie

$$\mathrm{Hom}(X, k) = k \circ \_ \colon \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z) \tag{23}$$

$$g \mapsto k \circ g. \tag{24}$$

□

Das prototypische Beispiel einer **Ab**-Kategorie ist die Kategorie aller R-Moduln über einem Ring R. Die Gruppenstruktur auf den Hom-Mengen ergibt sich hier aus der punktweisen Addition der zugrunde liegenden Funktionen:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x). \tag{25}$$

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
Ring nach **Gruppe**	Kategorie der Ringe und der Gruppen
$\mathrm{GL}_n(R)$	Allgemeine lineare Gruppe über dem Ring R
R^*	Einheitengruppe des Rings R
Det_n^R	n-dimensionale Determinante für Matrizen mit Koeffizienten in R.