(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.4.4 Natürlicher Isomorphismus

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Natürliche Isomorphismen werden oft beiläufig eingeführt. So sagen wir z.B., dass es eine Bijektion zwischen den Morphismen des Produktes von X und Y nach Z und den Morphismen von X in die Morphismen von Y nach Z gibt. Wir sagen weiter salopp, dass dieser natürlich in X, Y und Z sei.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Axiome der Kategorien, Funktor.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.4%20Nat%C3%BCrliche%20Transformationen

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU
v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen
https://youtu.be/v1F5BFH8nbo
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Transformation
https://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation
https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories
https://ncatlab.org/nlab/show/small+category
https://de.wikipedia.org/wiki/Homotopie
https://ncatlab.org/nlab/show/natural+isomorphism
https://www.youtube.com/watch?v=Ir-DiecNUmA
https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf
https://ncatlab.org/nlab/show/category+of+presheaves
https://mathoverflow.net/questions/64365/natural-transformations-as-categorical-homotopies

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter huhu

1. Natürliche Transformation

Seien im Folgenden $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren mit $\mathcal{C}$ als Quell- und $\mathcal{D}$ als Ziel-Kategorie.

1.1. Definition einer natürlichen Transformation.

1.2. Ein paar Worte zum Wort natürlich.

Wenn wir sagen, es gibt da und da einen **natürlichen** Homomorphismus, ist mit diesem unscheinbar daherkommenden Wort immer viel gemeint:

- Es gibt zwei Kategorien,
- es gibt zwei Funktoren zwischen denen,
- „der“ Homomorphismus ist eigentlich eine Schar von Homomorphismen und
- diese Schar verträgt sich (kommutiert) mit den Bildern der Homomorphismen unter den zwei Funktoren im Sinne von (**??**).

Natürlichkeit ist ein kategorischer Begriff und erfordert eine präzise Angabe der vorliegenden Daten: Quell- und Ziel-Kategorie, Quell- und Ziel-Funktor sowie eine Schar von Morphismen.

1.3. Kategorien von Prägarben.

Das ganze funktioniert auch für kontravariante Funktoren.

Definition 1.3.1. (Prägarbe): Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ ist ein kontravarianter Funktor nach Set:

$$\mathcal{F} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}. \tag{1}$$

Falls $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie ist, dann ist $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ eine Funktor-Kategorie: die Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$, also die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Set. Diese Kategorien haben sehr gute Eigenschaften und bilden ein wichtiges Beispiel für Funktorkategorien.

2. TODO

Literatur

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathbf{Set}$	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie