

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.6 Mathematische Grundlagen der Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2023 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Mathematische Grundlagen in der Kategorientheorie werden notwendig, da wir bei der Definition einer Kategorie nicht fordern, dass die Klasse der Objekte oder die der Homomorphismen eine Menge ist. Wir fordern dies noch nicht einmal von der Klasse der Morphismen zwischen je zwei Objekten einer Kategorie.

Wegen dieser weiten Auffassung können wir von der Kategorie der Gruppen reden. Und das wollen wir auch.

Die Objekte und die Morphismen sind aber alles mathematische Objekte. Somit können wir z.B. formulieren: Für alle Objekte der Kategorie \mathcal{C} gilt ...

Aber wir müssen immer auf der Hut, dass wir Kategorien nicht als mathematische Objekte betrachten. Z.B. können wir nicht die Klasse aller Kategorien bilden oder einen Satz wie „Für alle Kategorien gilt ...“ als mathematischen Satz auffassen.

Geführt bilden aber die Kategorien selber eine Kategorie: die Kategorie der Kategorien mit den Funktoren als Morphismen. Hier wären dann Objekte keine Mengen mehr. Mist!

Wir haben also ein Größenproblem. Hier bleiben wir bei der Intuition, dass echte Klassen „zu groß“ sind um Mengen zu sein.

Wir haben hier zwei sehr unterschiedliche Möglichkeiten, dies zu lösen.

1. Wir verabschieden uns von ZFC und betrachten Kategorien, Objekte und Morphismen als Grundobjekte die mit geeigneten Axiomen zu einer Mathematik aufgebaut werden. In dieser Mathematik versuchen wir dann Mengen, Zahlen, und, was wir alles so brauchen, zu definieren. Dies wird z.B. in der „Elementary Theory of the Category of Sets“ (ETCS) gemacht. Ein Ansatz, den wir hier nicht verfolgen.

2. Wir führen die Idee eines Universums (dies ist eine bestimmte Klasse) und den der kleinen Klassen ein. Eine Klasse ist klein, wenn sie Element des Universums ist. Kleine Klassen sind also automatisch Mengen. Wir könnten also auch von kleinen Mengen reden.

Die Eigenschaft „klein“ dehnt sich dann auf andere mathematische Objekte aus und wir können von kleinen Gruppen oder auch kleinen Kategorien reden. Im ersten Fall ist die Klasse der Elemente im zweiten Fall die der Objekte und die der Morphismen klein.

In lokal kleinen Kategorie wird nur gefordert, dass die Klassen der Morphismen zwischen jeweils Objekten klein ist.

Wenn wir haben wollen, dass in der Kategorie der kleinen Gruppen die Klasse der Objekte eine Menge ist, muss das Universum eine Menge sein.

Universen können auch geschachtelt sein $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots$. Damit hätten wir dann verschiedene Kleins: klein₁, klein₂, klein₃, ...

Wenn wir wollen, dass die Klasse der Objekte und die der Morphismen der Kategorie der kleinen Gruppen oder die der kleinen Kategorien Mengen sind, muss unser Universum eine Menge sein.

Wenn wir in diesem Kurs nichts anderes sagen, ist unser Universum die Klasse aller Mengen und „klein“ bedeutet „Menge seiend“. Die K

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Homomorphismus

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5.0.1.0.6%20Mathematische%20Grundlagen%20der%20Kategorien>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
<https://youtu.be/X8v5Kyly0KI>

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
<https://youtu.be/sIaKt-Wxlog>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorientheorie>
<https://ncatlab.org/nlab/show/small+category>
[https://en.wikipedia.org/wiki/Small_set_\(category_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Small_set_(category_theory))
<https://de.wikipedia.org/wiki/Von-Neumann-Hierarchie>
<https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+universe>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Grothendieck-Universum>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Tarski-Grothendieck-Mengenlehre>
<https://mathoverflow.net/questions/437256/why-do-we-care-about-small-sets>
<https://ncatlab.org/nlab/show/ETCS>
<https://mathoverflow.net/questions/3278/whats-a-reasonable-category-that-is-not-locally-small>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Tarski-Grothendieck-Mengenlehre>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Grothendieck-Universum>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Von-Neumann-Hierarchie>
<https://ncatlab.org/nlab/show/span>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben

und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter <https://youtu.be/ezW54mnzHMw>

1. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER KATEGORIEN

1.1. Das Problem der Größe. In der Kategorie aller Gruppen ist die Klasse der Objekte eine echte Klasse. Das können wir uns klar machen, da wir allein schon zu jeder Menge x eine einelementige und damit triviale Gruppe $(x, +)$ mit $x + x = x$ konstruieren können, in der das x die Rolle des neutralen Elementes hat.

Dies ist oft gar kein Problem und wir wollen den Fall explizit mit einschließen und behandeln.

Aber: Wir müssen ständig akribisch darauf achten, dass wir nicht irgendwo unbemerkt, Klassen wie Mengen behandeln, wo es nicht erlaubt ist.

Beachte z.B., dass es zwei verschiedene „für alle“ gibt: zum einen das normale, welches über Mengen quantifiziert und durch den All-Quantor geschrieben werden kann. Zum anderen ein meta-sprachliches, wie in „für alle Prädikate $P(x)$ ist $P(x) \vee \neg P(x)$ immer wahr“. Prädikate sind Formeln, die wir hingeschrieben haben. So gibt es z.B. eine Formel, die besagt, x ist Gruppe.

Es gibt auch eine Formel, die besagt \mathcal{F} ist Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Ringe. „Für alle Funktoren von **Gruppe** nach **Ring** ...“ bedeutet, dass wir aus der Formel, das „...“ ableiten können.

Wenn wir aber die Funktorkategorie

$$(1) \quad \mathbf{Ring}^{\mathbf{Gruppe}}$$

bilden, hängen wir am Fliegenfänger. Da ein Funktor zwischen Echt-Klassen-Kategorien kein mathematisches Objekt, sprich keine Menge ist, sondern ein Prädikat, können wir NICHT die Klasse aller Funktoren bilden. Das haben wir im Video „v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen“ schon angedeutet. Damit wir die Funktorkategorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ bilden können, muss die Klasse der Objekte und die der Morphismen von \mathcal{C} eine Menge sein.

Da intuitiv echte Klassen zu groß sind, sprechen wir von Größenproblemen.

1.2. Die Lösung: Universen. Ein Universum ist eine Klasse, deren Elemente wir kleine Mengen nennen. Alle Klassen, die nicht im Universum liegen, nennen wir groß. **Da eine echte Klasse nirgendwo drinne liegen kann, sind echte Klassen immer groß.** Ein Gruppe, die im Universum liegt heißt kleine Gruppe, eine Kategorie deren Klasse aller Objekte und deren Klassen aller Morphismen im Universum liegen heißt kleine Kategorie. Das Universum liegt selbst nicht im Universum.

Dann definieren wir z.B. die Kategorie der kleinen Gruppen. Diese enthält als Objekte nur kleine Gruppen. Universen sind in der Regel so aufgebaut, dass damit auch die Klasse der Morphismen zwischen kleinen Gruppen klein ist.

Damit wir in einem Universum arbeiten können, fordern wir vom Universum, dass wir bei unserer Arbeit mit mathematischen Objekten nicht aus dem Universum fallen. Wir möchten, dass es abgeschlossen gegenüber der normalen mathematischen Tätigkeit ist. Wir stellen im Folgenden drei mögliche Konstruktionen vor.

1.3. Abgeschlossene Universen. Damit wir bei unseren Arbeiten nicht aus dem Universum fallen, wollen wir, dass es gegenüber allen gängigen mathematischen Konstruktionen abgeschlossen ist. Das präzisieren wir wie folgt:

Definition 1.3.1. (Abgeschlossenes Universum): Eine Klasse U heißt **abgeschlossenes Universum**, falls folgendes gilt:

- (2) $x \in U \wedge y \in x \Rightarrow y \in U$ (Transitivität)
 (3) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$ (Potenzmenge)
 (4) $I \in U \wedge \forall i \in I: u_i \in U \Rightarrow \bigcup_{i \in I} u_i \in U$ (Vereinigung)

Anmerkungen:

- Mit $x \in U$ ist $x \subseteq U$, da alle Elemente von x auch in U sind.
- Mit x und y sind auch $\{x, y\}$ und (x, y) in U .
- Es sind nicht notwendig beliebige Vereinigungen von Mengen aus U wieder in U . Wichtig ist, dass sie über eine Menge in U indiziert werden können.
- Es wird nicht gefordert, dass U nicht leer ist.
- Es wird nicht gefordert, dass U unendliche Mengen enthält.

1.4. **Erste Lösung: Klasse aller Mengen.** Hier definieren wir z.B.

Definition 1.4.1. (Klassen-Universum): Das Klassen-Universum U_K ist die Klasse aller Mengen, also z.B.

$$(5) \quad U_K := \{x \mid x = x\}.$$

Wenn wir mit diesem Universum arbeiten, sind kleine Klassen Mengen und große Klassen sind echte Klassen. Jede Gruppe ist eine kleine Gruppe und eine Kategorie ist dann klein, wenn Objekt- und Morphismen-Klassen Mengen sind. Das Klassen-Universum ist aufgrund der Axiome von ZFC abgeschlossen. Mit diesem Universum arbeiten wir in dieser Vorlesungsreihe, wenn nichts anderes dazugesagt wird. Die Vorteile sind:

- Dieses Universum kann mit Mitteln aus ZFC gebildet werden.
- Es ist nicht leer, enthält unendliche Mengen und alle bekannten Objekte, mit denen wir betrüblicherweise hantieren.

Nachteile: Die Kategorie der kleinen Gruppen ist keine Menge und somit können wir die oben gewollte Funktorkategorie nicht bilden.

1.5. **Zweite Lösung: Grothendieck-Universum.** Hier definieren wir z.B.

Definition 1.5.1. (Grothendieck-Universum): Ein Grothendieck-Universum ist ein Klassen-Universum, welches eine Menge ist.

Vorteile sind:

- Nun ist die Klasse aller kleinen Gruppen und wir können unsere Funktorkategorie bilden, die selber aber nicht mehr klein ist.
- Ähnlich besteht die Kategorie der kleinen Kategorien jetzt aus Mengen.

Nachteile: Die einzigen beiden Grothendieck-Universen, deren Existenz in ZFC nachgewiesen werden können, ist das leere Universum und V_ω (die kleinste unendliche Menge in der von Neumann Hierarchie). V_ω enthält nur endliche Mengen und ist damit für die mathematische Forschung nur bedingt brauchbar.

Die üblich Lösung ist eine Erweiterung des Axiomensystems um das Universen-Axiom zur ZFCU (auch Tarski-Grothendieck-Mengenlehre oder TG genannt).

Definition 1.5.2. (Universen-Axiom): Für jede Menge x existiert ein Grothendieck-Universum U mit $x \in U$.

Aber eigentlich wollen wir nicht leichtfertig unser Axiomen-System erweitern. Also nutzen wir diesen Ansatz nur, wenn wir anders nicht weiterkommen. Und wir führen dann sehr genau Buch, für welche Sätze wir dieses Axiom benutzt haben. Wir versuchen auch in Zukunft alternative Beweise zu finden, die dieses Axiom nicht anwenden.

Da aufgrund des Axioms auch das Universum U selbst Element eines Universums, sagen wir U' ist, bilden die Grothendieck-Universen ein System. Damit können wir den Begriff „klein“ relativ zum gewählten Universum bilden. Wird sagen dann U -klein. Damit ist die Funktorkategorie zwischen U -kleinen Gruppen und U -kleinen Ringen selbst U' -klein. Wir können mit der Funktorkategorie also ganz normal weiterarbeiten und, wenn nötig, diesen Schritt wiederholen zu einem U'' .

1.6. Dritte Lösung: Von-Neumann-Hierarchie. Im Folgenden sind α, β, γ Ordinalzahlen. Die folgenden Mengen existieren in ZFC ohne zusätzliche Axiome.

Definition 1.6.1. (Von-Neumann-Hierarchie):

$$\begin{aligned} (6) \quad & V_0 := \emptyset \\ (7) \quad & V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha) \\ (8) \quad & V_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (9) \quad & V_1 = \{\emptyset\} \\ (10) \quad & V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ (11) \quad & V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ (12) \quad & \vdots \\ (13) \quad & V_\omega = \{x \mid x \text{ ist erblich endlich}\} \\ (14) \quad & \vdots \end{aligned}$$

Die V_α wachsen ($\alpha < \beta \Rightarrow V : \alpha \subset V_\beta$) und sie decken alle mathematischen Objekte ab: zu jedem x gibt es ein α mit $x \in V_\alpha$.

Damit können wir auch eine Hierarchie von „klein“-Begriffen aufbauen.

Nachteil: die V_α sind nicht notwendigerweise abgeschlossen. Damit müssen wir mit unseren Konstruktionen immer sehr genau Buch führen, wie viel mal wir den Potenzmengenoperator benötigen.

Alternativ, könnten versuchen mit einem V_α zu beginnen, und einfach annehmen, dass wir am Ende all unsere Konstruktionen mit einem ausreichend großen V_β einfangen können, ohne dass wir dieses β benennen.

1.7. Vokabeln. Wählen wir ein, sagen wir mal Grothendieck-) Universum U , können wir folgende Namenshierarchie bilden:

- x kleine Menge: $x \in U$
- \mathcal{C} kleine Kategorie: $\text{Obj}(\mathcal{C})$ und $\text{Hom}(\mathcal{C})$ sind klein
- \mathcal{C} große Kategorie: die Objekte und Hom-Mengen sind klein
- \mathcal{C} Mengen-Kategorie: $\text{Obj}(\mathcal{C})$ und $\text{Hom}(\mathcal{C})$ sind Mengen
- \mathcal{C} Klassen-Kategorie: $\text{Obj}(\mathcal{C})$ und $\text{Hom}(\mathcal{C})$ sind Klassen
- \mathcal{C} Meta-Kategorie: Objekte und Morphismen sind eigenständige Dinge einer Prädikationslogik. Wir scheren uns nicht um deren Implementierung in ZFC

Die Namen Mengen-Kategorie und Klassen-Kategorie sind Eigenkreationen von mir. So wie wir in diesem Kurs auch Klassen-Relation und Klassen-Funktion sagen, wenn die Klasse der Paare, die die Relation oder Funktion ausmachen, nicht notwendig eine Menge ist. Bei [MacLane1978] werden Klassen-Kategorie und Meta-Kategorie zusammengefasst zu Meta-Kategorie.

1.8. Lokal klein. Wir verlangen weder von $\text{Obj}(\mathcal{C})$, noch von $\text{Hom}(\mathcal{C})$ **aber noch nicht einmal** von $\text{Hom}(X, Y)$, dass es Mengen sind.

Definition 1.8.1. (Lokal klein): Eine Kategorie heißt **lokal klein**, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die Klasse $\text{Hom}(X, Y)$ aller Morphismen von X nach Y eine kleine Menge ist.

Es gibt Situationen, in denen Konstruktionen schon dann möglich sind, wenn die Kategorie lokal klein ist. Ein Beispiel ist die Klassen-Kategorie aller Gruppen. Die Klasse der Gruppen-Homomorphismen zwischen je zwei Gruppen ist aber immer eine Menge, also klein, wenn wir die Klasse aller Mengen als Universum zu Grunde legen.

Da Morphismen nicht Mengen sein müssen, gibt es Kategorien mit endlich vielen Objekten, die nicht lokal klein sind. Hier ein künstliches Beispiel: Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit zwei Objekten X, Y . Die obligatorischen id_X, id_Y definieren wir als $(0, X)$ und $(0, Y)$. Und weiter

$$(15) \quad \text{Hom}(X, Y) := \{(1, x) \mid x = x\}.$$

Damit gibt es zu jeder Menge x einen Homomorphismus. Die Paare mit der 0 und der 1 davor haben wir nur gemacht, damit die Hom-Klassen paarweise disjunkt sind. Im Resultat ist $\text{Hom}(X, Y)$ eine echte Klasse und unsere Kategorie ist nicht lokal klein.

Ein „realistisches“ Beispiel ist die Kategorie der Spanne, siehe <https://ncatlab.org/nlab/show/span>.

1.9. Wieso erst jetzt? Wieso taucht das Groß-Klein-Problem erst bei den Kategorien auf und nicht schon bei beispielsweise den Gruppen? Beide sind doch letztendlich algebraische Strukturen.

In der Tat könnten wir auch Klassen-Gruppen definieren. Z.B. so:

Definition 1.9.1. (Freie Klassen-Gruppe): Sei $V := \{x \mid x = x\}$ die Klasse aller Mengen. Damit definieren wir:

$$(16) \quad A := \{(a, x) \mid a \in \{0, 1\} \text{ und } x \in V\} \setminus \{(1, \emptyset)\}$$

Das ist ein **Klassen-Alphabet**, bestehend aus $+x := (0, x)$ und $-x := (1, x)$, wobei x alle nicht-leeren Mengen durchläuft und $0 := \{(0, \emptyset)\}$. Wir definieren weiter ein **Wort** als Funktion $\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow a$, wobei a eine Teilmenge von A ist (eine Menge!). Wir definieren ein **reduziertes Wort** als ein solches, wo nicht $+x$ und $-x$ oder umgekehrt aufeinander folgen. Die Klasse G sei die Klasse aller reduzierten Wörter. Sodann definieren wir eine Klassen-Relation $M := \{(u, v, w) \mid u, v, w \in V \text{ und } w \text{ geht aus } u \text{ und } v \text{ durch die üblichen Kürzungsregeln hervor}\}$.

Diese Konstruktion erfüllt alle Axiome einer Gruppe, außer dass Elemente und Verknüpfung echte Klassen sind und keine Mengen.

Der Punkt ist: diese Konstruktion taucht während üblicher mathematischer Untersuchungen niemals ungefragt von selbst auf. Sie wird für nichts benötigt und wirkt manieristisch. Die Klassen-Kategorie aller Gruppen entsteht dagegen schon im Grundstudium völlig automatisch im Kopf, wenn wir ein wenig Gruppentheorie und dort Gruppen-Homomorphismen studieren.

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

$P(x)$	ein Prädikat
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
F, G	Funktoren
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op}	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, Gruppe	Kategorie der Ringe und der Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie