(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.4.5 Quotienten-Moduln

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Ein Unter-Modul ist eine Teilmenge, die abgeschlossen bezüglich der Modul-Operationen ist, also eine Unter-Abelsche-Gruppe, in der die Skalarmultiplikation mit Elementen aus dem Ring in der Unter-Gruppe bleibt.

Kategorisch und äquivalent ist es das Ziel eines Epi-Morphismus.

Ein Ring und seine Ideale sind selber Unter-Module.

Ausgehend von einem Ideal und eine Modul, können wir die Menge aller Vielfachen von Modul- mit Ideal-Elementen bilden. Dies ist ein Unter-Modul. Intuitiv entsteht es durch ausdünnen. Eine Situation, die es so bei Vektorräumen nicht gibt.

Aus einer Teilmenge eines Moduls können wir die Menge aller endlichen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus dem Ring bilden. Dies ist ein Unter-Modul.

Eine Basis gibt es aber nicht immer und es gibt allerlei Phänomene, wie das $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ zeigt.

Den Beweis, dass $\mathbb{Q}$ kein minimales Erzeugendensystem hat, habe ich aus math.stackexchange.com von Camilo Arosemena Serrato. Vielen Dank dahin. https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-generating-set

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Vektorräume, Unter-Gruppen

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.4%20Unter-Moduln

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln
https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null
https://youtu.be/n4-qZJK_sH0

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik)
https://de.wikipedia.org/wiki/Untermodul
https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-gener
https://de.wikipedia.org/wiki/Ideal_(Ringtheorie)

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki

1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `uups`

1. v5.1.1.1.4.5 Quotienten-Moduln

kompatible Relation, Unter-Modul, Epimorphismen: beweis, dass dies das selbe ist. Aufwickeln durch Teilen durch ein Ideal

1.1. **Definition Unter-Modul.**

Definition 1.1.1. (Unter-Modul): Sei R ein Ring mit 1 und M ein R-Modul. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge der Elemente von M. Ist diese abgeschlossen gegenüber den Ringoperationen $(0, 1, +, -, \cdot)$, so ist es ein **Unter-Modul**.

Kategorischer und leichter auf andere Situationen zu verallgemeinern ist folgende äquivalente Definition:

Definition 1.1.2. (Unter-Modul kategorisch): Sei R ein Ring mit 1 und M, N seien R-Moduln. Sei $i\colon N \to M$ ein r-Modul-Homomorphismus. Sei weiter i mono. Mit anderen Worten ist i linkskürzbar in folgendem Sinne: für alle $f, g\colon L\ toN$ gilt $i \circ f = i \circ g \Rightarrow f = g$. $i'\colon N' \to M$ ist äquivalent zu i, wenn es einen Isomorphismus $h\colon N \to N'$ gibt mit $i = i' \circ h$. Die Äquivalenzklassen dazu heißen **Unter-Moduln**.

Das Bild eines solchen i ist das Unter-Modul gemäß der oberen Definition passend zur Äquivalenzklasse $[\![i]\!]$ der unteren Definition.

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
$\vec{r}$	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R-Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul