(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.2.1.1 Universeller Morphismus

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Ein **universeller Morphismus** von einem Funktor zu einem Objekt X, besteht aus einem Stellvertreter dieses Objektes in der Quell-Kategorie zusammen mit einem Morphismus ϵ vom Stellvertreter dieses Objektes innerhalb der (ausgezeichneten) Bild-Objekte. Und das auf eine Art, dass jeder (universell) Morphismus von einem Bild-Objekt zu X eindeutig durch ϵ faktorisiert werden können.

Wir erhalten somit eine 1:1-Beziehung zwischen den Morphismen von Bild-Objekten zu X und den Morphismen von Quell-Objekten zum Stellvertreter.

Der Stellvertreter vertritt das Objekte bezüglich der Morphismen nach X vollständig.

Dual dazu erhalten wir kouniverselle Morphismen.

Wichtig: der Stellvertreter lebt in der Quell-Kategorie, der Morphismus ϵ aber in der Ziel-Kategorie.

Zu einem X kann es 0 oder 1 oder sogar mehrere universelle Morphismen geben.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien, Funktoren, Funktor-Bilder

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.2.1.1%20Universeller%20Morphismus`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.2.1 (Höher) Kategorien - Funktor-Bilder
`https://youtu.be/-_GBnQ_vZQM`

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property`
`https://ncatlab.org/spahn/show/couniversal+mapping+property+1`
`https://ncatlab.org/nlab/show/universal+construction`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology`

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:
„Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Ausführlich:
„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“
Francis Borceux 2008 Cambridge University Press
978-0521061193 (ISBN)

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.2.1.1 Universeller Morphismus

Ein **universeller Morphismus** von einem Funktor zu einem Objekt X der Ziel-Kategorie dieses Funktors besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f vom Bild dieses Objektes nach X. Und das so, das dieses Paar die **universelle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von einem Bild-Objekt nach X kann durch f faktorisiert werden.

Das U, welches wie f von X abhängt, ist eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X in der Quell-Kategorie was abgehende Morphismen anbetrifft. Genauso ist das Bild von U eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X unter den Funktor-Bildern was abgehende Morphismen anbetrifft.

Dual ein **kouniverseller Morphismus** von einem Objekt X der Ziel-Kategorie zu diesem Funktor besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f von X nach dem Bild dieses Objektes. Und das so, das dieses Paar die **kouniverselle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von X nach einem Bild-Objekt kann durch f faktorisiert werden. Dual (aber die Richtung des Funktors wird nicht umgedreht)

Wenn wir nach universellen Morphismen zu/von allen Objekten suchen, stellen wir fest, dass es sie nicht immer gibt. Und zu einem Objekt kann es mehrere geben. Somit haben wir eine partielle, mehrwertige Funktion.

Bei festgelegtem universellen Morphismus sind die Morphismen sind allerdings die Morphismen von/zu Bild-Objekten bijektiv zu den Morphismen zu/vom Stellvertreter-Objekt.

1.1. Ideen.

-

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α