(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.4 Unter-Moduln

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Die Hom-Funktoren in der der Kategorie der R-Moduln sind additiv.

Den Beweis, dass $\mathbb{Q}$ kein minimales Erzeugendensystem hat, habe ich aus math.stackexchange.com von Camilo Arosemena Serrato. Vielen Dank dahin. https://math.stackexchange.com/questions/487820/additive-group-of-rationals-has-no-minimal-generating-set

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Funktoren, additive Funktoren, **Ab**-Kategorien

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.3%20Additiver%20Funktor%20Hom

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln
https://youtu.be/JY43_07kNmA
v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
https://youtu.be/sIaKt-Wxlog
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
https://youtu.be/0jf5LQGey0U
v5.0.1.6.1.4 (Höher) Kategorien - Abelsche - Additiver Funktor
https://youtu.be/zSP_a2RvoYE

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category
https://en.wikipedia.org/wiki/Module_homomorphism#Module_structures_on_Hom

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki
1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter uups

1. v5.1.1.1.4 Unter-Moduln

1.1. Definition Unter-Modul.

Definition 1.1.1. (Unter-Modul): Sei R ein Ring mit 1 und M ein R-Modul. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge der Elemente von M. Ist diese abgeschlossen gegenüber den Ringoperationen $(0, 1, +, -, \cdot)$, so ist es ein **Unter-Modul**.

Kategorischer und leichter auf andere Situationen zu verallgemeinern ist folgende äquivalente Definition:

Definition 1.1.2. (Unter-Modul kategorisch): Sei R ein Ring mit 1 und M, N seien R-Moduln. Sei $i\colon N \to M$ ein r-Modul-Homomorphismus. Sei weiter i mono. Mit anderen Worten ist i linkskürzbar in folgendem Sinne: für alle $f, g\colon L\ toN$ gilt $i \circ f = i \circ g \Rightarrow f = g$. $i'\colon N' \to M$ ist äquivalent zu i, wenn es einen Isomorphismus $h\colon N \to N'$ gibt mit $i = i' \circ h$. Die Äquivalenzklassen dazu heißen **Unter-Moduln**.

Das Bild eines solchen i ist das Unter-Modul gemäß der oberen Definition passend zur Äquivalenzklasse $[\![i]\!]$ der unteren Definition.

1.2. Ideale als Unter-Moduln.

Sei R ein Ring mit 1 und I ein Ideal von R. Dann ist I ein R-Modul. Insbesondere ist auch R ein R-Modul. Das ein Teil vom Skalarbereich ein Modul zu eben diesem Skalarbereich ist, gibt es bei Vektorräumen nicht.

Sei M ein R-Modul und I wie oben ein Ideal von R.

Definition 1.2.1. (Ideal mal Modul):

$$IM := \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}. \tag{1}$$

IM ist R-Unter-Modul von M. IM ist auch (und im Allgemeinen eine echte) Teilmenge von M. Aber, falls $I \neq \{0\}$, dann IM steckt alle Richtungen von M ab (ein intuitiver Begriff) in folgendem exakten Sinne:

$$\forall m \in M \exists r \in R\colon rm \in IM. \tag{2}$$

Wir müssen ja nur für r ein $i \neq 0$ aus I wählen.

Diese Intuition hat eine Schwäche darin, dass es durchaus Ideale geben kann, die nicht alle Richtungen innerhalb des Rings abdecken. Nehmen wird z. B. $\mathbb{Z}^2$ als *Ring* mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Dann ist $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal. Aus diesem kommen wir durch Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{Z}^2$ nicht raus. Das ist ja gerade die Definition von Ideal.

1.3. Generierte Unter-Moduln.

Sei R ein Ring mit 1. Se M ein R-Modul und $G \subseteq M$ irgendeine Teilmenge von M.

Definition 1.3.1. (Generiertes Unter-Modul):

$$\langle G \rangle := \{r_1 g_1 + \cdots r_n g_n \mid g_i \in G \wedge r_i \in R \wedge n \in \mathbb{N}\}. \tag{3}$$

Also die Menge aller **endlichen** Linearkombinationen von Elementen aus G mit Koeffizienten aus dem Ring. Die leere Summe hat dabei den Wert 0.

Ein generiertes Unter-Modul ist ein R-Unter-Modul, was bewiesen werden muss.

WICHTIG: es sind nur *endliche* Summen erlaubt. Unendlichen Summen kann so ohne weiteres kein Wert in M zugeordnet werden.

1.4. **Es gibt nicht immer eine Basis.** Wir können zu jedem R-Modul M eine Menge G finden, die M generiert: wir nehmen einfach ganz ineffizient $G := M$.

Betrachten wir das $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Hier gilt für jedes $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dass $nz = 0$. Also gibt es hier keine linear unabhängigen Elemente. Jedenfalls nicht im üblichen Sinne.

Betrachten wir das $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$. Sei $q \in \mathbb{Q}$. Dann ist $q/2$ nicht in $\langle\{q\}\rangle$. Also generiert $\{q\}$ nicht $\mathbb{Q}$. Seien nun $q_1, \cdots, q_n$ Elemente von $\mathbb{Q}$. Sei s der kleinste gemeinsame Nenner dieser Brüche. Dann kann $\frac{1}{2s}$ nicht durch Linearkombinationen dieser q_i dargestellt werden. Es kann also kein endliche generierende Mengen geben.

Sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine generierende Mengen. Solche Mengen gibt es, wie z. B. $G = \mathbb{Q}$ zeigt. Sei $g \in G$. Für jedes $n \in \mathbb{N}, n > 0$ lässt sich g/n mit Hilfe der Generatoren darstellen: Wir müssen beachten, dass dazu eventuell g selber benötigt wird.

$$\frac{g}{n} = r_n g + \sum_i r_{n,i} g_i. \tag{4}$$

Daraus folgt, dass sich g immer unter Verwendung eines beliebigen Vielfachen von g darstellen lässt:

$$g = n r_n g + \sum_i n r_{n,i} g_i, \tag{5}$$

und, die Zahlen $(1 - r_n n)g$ lassen sich ohne die Verwendung von g darstellen:

$$(1 - n r_n) g = \sum_i n r_{n,i} g_i. \tag{6}$$

Nun starten wir mit $n = 2$ (es geht aber auch jede andere ganze Zahl größer 0)

$$(1 - 2r_2) g = \sum_i 2 r_{2,i} g_i. \tag{7}$$

Wir wissen also, wir können $(1 - 2r_2)g$ durch einen Ausdruck ohne g ersetzen. Nun drücken wir g unter Verwendung des $(1 - 2r_2)$-fachen von g aus mit $n = (1 - 2r_2) =: m$

$$g = m r_m g + \sum_j m r_{m,j} g_j = r_m (1 - 2r_2) g + \sum_j m r_{m,j} g_j = \sum_i 2 r_m r_{2,i} g_i + \sum_j m r_{m,j} g_j. \tag{8}$$

Sei p ein Zahl. Betrachte die Generator-Menge G_p:

$$G_p := \{\frac{1}{p^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$

Dies ist nicht ganz $\mathbb{Q}$ und somit ein Unter-$\mathbb{Z}$-Modul. Aus G_p können wir beliebig viele Elemente entfernen, solange wir zu jedem $\frac{1}{p^n}$ ein $\frac{1}{p^n}$ mit $m > n$ haben, was drinne bleibt.

die beiden letzten Beispiele zeigen, dass es Generierenden-Systeme gibt, die kein minimales Untersystem haben, welches dasselbe Modul generiert.

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)

[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Eine Gruppe, nicht notwendig abelsch
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
$\vec{r}$	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R-Homomorphismen von X nach Y