

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.1 Kategorisch dual

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. „Dual“ ist eine Eigenschaft von Ausdrücken, Prädikaten oder Sätzen der Kategorien-Theorie. Es ist keine Eigenschaft von den mathematischen Objekten dieser Theorie. Also keine Eigenschaft von z. B. Objekten, Homomorphismen oder Kategorien.

Damit wir dual definieren können müssen wir eine weitere Ebene schaffen, da wir dabei über die Sprache sprechen müssen, mit der wir die ganze Zeit über Kategorien sprechen. Damit das möglich wird, bedienen wir uns der mathematischen Logik. In ihr formalisieren wir eine „normale“ Theorie in der Prädikaten-Logik erster Stufe (Variablen, Ausdrücke, boolesche Operatoren, Quantoren, Prädikate, Aussagen, Beweise. Kurz: logische Bestandteile). Wir fügen Variablen für Objekte (A, B, C, \dots) und für Morphismen (f, g, h, r, s, \dots) hinzu. Weiter fügen wir die üblichen Axiome der Kategorien-Theorie als Axiome hinzu.

Das Ergebnis ist ETAC = Elementary Theory of an abstract Category.

Wir haben also drei Ebenen: Meta-Mathematik (META). Das ist der deutsche Text, in dem wir über die Dinge reden. Mathematik (MATH). Das ist die Welt der mathematischen Objekte. Hier befinden wir uns in der Regel in ZFC. Kategorien-Theorie ist eine Theorie über bestimmte solche Objekte. ETAC (LOGIK). Das ist eine mathematische Struktur, die Sätze der Kategorien-Theorie als endliche Folgen von Zeichen formalisiert. Objekt-Mathematik (OBMA). Das sind die Objekte, die wir uns mit den Variablen bezeichnet denken. Es ist intuitiv klar, dass alle wahren Aussagen in ETAC gesehen als Sätze in META über MATH in jeder Kategorie aus MATH wahr sind.

Hier nutzen wir eine Art geheimes Pseudo-Axiom: Wenn wir beweisen können, dass wir eine Aussage aus LOGIK beweisen/nicht beweisen können, gehen wir davon aus, dass wir die entsprechende Aussage auch in META beweisen/nicht beweisen können. Ich nenne es das Pseudo-Axiom des logischen Ebenen-Liftings.

ETAC hat neben den Atomen der normalen mathematischen Logik, wie Gleichheit, boolesche Operatoren usw., noch drei Funktionssymbole \circ, Q, Z . $f \circ g$ lesen wir als die Komposition von f und g , $Q(f)$ lesen wir als das Quellobjekt des Morphismus f , und $Z(Y)$ das Zielobjekt des Morphismus f .

Nun definieren wir das Dual zu einem logischen Bestandteil Σ , indem wir überall Q durch Z , Z durch Q und $f \circ g$ durch $g \circ f$ für alle Ausdrücke f und g . Mit anderen Worten: wir drehen die Pfeile um.

Offensichtlich ist Dualisierung idempotent.

Denn

$$(1) \quad (f: X \rightarrow Y) :\Leftrightarrow (X = Q(f) \wedge Y = Z(f)).$$

Da die Dualen der Axiome von ETAC wahr sind, ist jedes Dual eines beweisbaren Satzes ebenfalls beweisbar: wir brauchen nur das Dual des Beweises hinschreiben.

Also ist es so: wenn immer wir etwas hinschreiben, eine Notation, Definition, einen Satz oder einen Beweis, gibt es immer auch das Dual dazu. Ein wahrer Satz über ein Konstrukt ist automatisch auch der wahre duale Satz über das duale Konstrukt.

Manchmal haben Duale eigene Namen, manchmal hängen wir „Ko“ davor und manchmal gibt es beides.

Komono = Epi.

Witze innerhalb der Kategorientheorie, die durch Wortspiele mit Ko entstehen, sind verpönt, weil zu einfach zu generieren.

Funktoren werden bei der Dualisierung NICHT umgedreht.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Homomorphismus, Mono, Epi, Anfangs-, End- und Null-Objekt, ein wenig mathematische Logik

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1%20Kategorisch%20dual>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
<https://youtu.be/X8v5Kyly0KI>

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
<https://youtu.be/sIaKt-Wxlog>

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null
https://youtu.be/n4-qZJK_sH0

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Kategorie
https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe
[https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_\(category_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_(category_theory))
<https://ncatlab.org/nlab/show/duality>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“
 Saunders Mac Lane
 1998 | 2nd ed. 1978
 Springer-Verlag New York Inc.
 978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“
 Tai-Danae Bradley
 2020 MIT Press
 978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“
 Joseph J. Rotman
 2009 Springer-Verlag New York Inc.
 978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey
 2010 Oxford University Press
 978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
 2009 Cambridge University Press
 978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben

und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. DUAL

1.1. Lokal kleine Kategorien.

Definition 1.1.1. (Additiver Funktor): Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} zwei additive Kategorien. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **additiv**, falls für alle parallel Morphismen (die beiden haben die selben Quell- und Ziel-Objekte) f, g gilt:

$$(2) \quad F(f + g) = F(f) + F(g).$$

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awodey, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

$P(x)$	ein Prädikat
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op}	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, Gruppe	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α