(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.3 Produkte von Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Das Produkt zweier Kategorien ist das kartesische Produkt der Klassen der Objekte und das der Klasse der Homomorphismen mit einer geeignet definierten Verknüpfung.

Hier betrachten wir Kategorien weniger als Werkzeug zur Untersuchung von Strukturen und ein wenig als mathematische Struktur selber. Und wie bei Gruppen oder topologischen Räumen können wir die Struktur auf die Produkte der zugrunde liegenden Klasse/Menge ausdehnen.

Ein Funktor vom Produkt von zwei Kategorien in eine Kategorie heißt Bi-Funktor (Bifunktor).

$\mathrm{Hom}(\_,\_)$ liefert mit jeweils festem Wert links oder rechts einen Funktor. Damit haben wir dadurch zwei Funktor-Scharen gegeben. Ist dies ein Bi-Funktor?

Generell erfüllt eine Funktion vom Produkt von zwei Kategorien in eine Kategorie, welche mit jeweils festem Wert links oder rechts einen Funktor liefert, fast alle Axiome eines Bi-Funktors. Damit wir diese Funktion auch auf beliebige Paare von Morphismen anwenden können, müssen wir ihn darauf sinnvoll erweitern.

Dies ist genau dann möglich, wenn die Ausgangsfunktion die Bi-Funktor-Bedingung erfüllt.

Dies ist nicht automatisch der Fall, wie ein Gegenbeispiel zeigen wird.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, Hom-Funktor, kontravarianter Funktor, Duale-Kategorie

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.3%20Produkte%20von%20Kategorien

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
https://youtu.be/X8v5Kyly0KI

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
https://youtu.be/sIaKt-Wxlog

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
https://youtu.be/0jf5LQGey0U

v5.0.1.0.8 (Höher) Kategorien - Hom-Mengen
https://youtu.be/bnMkDng-NnA
v5.0.1.1.1 (Höher) Kategorien - Kategorisch dual
https://youtu.be/5bll2AYkCC4
v5.0.1.1.2 (Höher) Kategorien - Kontravarianz und duale Kategorie
https://youtu.be/D3DfjfSjNlc

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Kategorie
https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)
https://de.wikipedia.org/wiki/Hom-Funktor
https://ncatlab.org/nlab/show/bifunctor
https://ncatlab.org/nlab/show/product+category
https://en.wikipedia.org/wiki/Product_category

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)

https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. Produkt von Kategorien

1.1. Produkt von Kategorien.

Definition 1.1.1. (Produkt von Kategorien): Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ zwei Kategorien. Das **Produkt** ist definiert als das kartesische Produkt der beiden Klassen der Objekte als Klasse der Objekte und das kartesische Produkt der beiden Klassen der Morphismen als Klasse der Morphismen. Für jeden Morphismus $f\colon C_1 \to C_2$ und $g\colon D_1 \to D_2$ ist

$$(f, g)\colon (C_1, D_1) \to (C_2, D_2). \tag{1}$$

Weiter wird definiert:

$$\mathrm{id}_{(C,D)} := (\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_D) \tag{2}$$

$$(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) := (f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2). \tag{3}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Axiome einer Kategorie erfüllt sind.

1.2. **Hom().** Hom definiert zwei Scharen vom Morphismen $\mathrm{Hom}(C, \_)$ und $\mathrm{Hom}(\_, D)$. Ergeben diese zusammen einen Bi-Funktor $\mathrm{Hom}(\_, \_)\colon \mathcal{C}^* \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$?

Allgemeiner: Sei $K\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine Funktion auf den Objekten von $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ und eine Funktion auf den Morphismen der Form (f, id_D) und (id_c, g) und seien $K(C, \_)$ und $K(\_, D)$ Scharen von Funktoren. Können wir K als Bi-Funktor erweitern? Wir müssen ihn erweitern, da er nicht auf allgemeinen Morphismen der Form (f, g) definiert ist.

Mit dem Ansatz für $f\colon C_1 \to C_2$ und $g\colon D_1 \to D_2$

$$K(f, g) := K(f, D_2) \circ K(C_1, g) \tag{4}$$

können wir fast alle Axiome eines Funktors beweisen. Außer das mit der Verknüpfung. Wir haben also einen Fast-Funktor.

Damit $K((f_2, g_2)\circ(f_1, g_1)) = K(f_2, g_2)\circ K(f_1, g_1)$ ist, können wir unserer angesetzten Definition und der Definition der Verknüpfung im Produkt zeigen, dass folgendes gelten muss:

$$K(f_2, D_3)\circ K(f_1, D_3)\circ K(C_1, g_2)\circ K(C_1, g_1) = K(f_2, D_3)\circ K(C_2, g_2)\circ K(f_1, D_2)\circ K(C_1, g_1). \tag{5}$$

NICHT FERTIG!

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$P(x)$	ein Prädikat
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, **Gruppe**	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α