(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.4.4.8 Äquivalenz von Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze
Copyright (C) 2023 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Äquivalente Kategorien können mit den Mitteln der Kategorien-Theorie kaum unterschieden werden. Viele Tatsachen übe eine Kategorie gelten automatisch immer auch für alle zu ihr äquivalenten.

Intuitiv unterscheiden sie sich ausschließlich in den Mächtigkeiten ihrer Äquivalenzklassen isomorpher Objekte. Isomorphe Objekte, also solche zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, können mit den Mitteln der Kategorien-Theorie gar nicht unterschieden werden.

Im Extremfall gibt es in einer Kategorie zu jedem Objekt kein weiteres isomorphes, jedes Objekt ist also das einzige seiner Art. Wählen wir aus einer Kategorie zu jeder Klasse isomorpher Objekte jeweils genau eins aus, erhalten wir das Skelett der Kategorie. Das Skelett ist äquivalent zur Ausgangskategorie. Zwei Kategorien sind äquivalent genau dann, wenn deren Skelette isomorph sind.

Äquivalente Kategorien können gegenseitig ineinander funktoriel abgebildet werden und zwar so, dass diese beiden Einbettungen hintereinandergeschaltet eine Einbettung in sich selbst ergeben, die natürlich isomorph zur Identität ist.

Äquivalenzen sind nicht immer mit bloßem Auge zu erkennen, was das folgende Beispiel auch zeigt.

Als Beispiel nehmen wir einen Satz von Gelfand-Neumark, der sagt, dass die Kategorie der kompakten Hausdorffräume zu der der kommutativen C^*-Algebren mit Einselement äquivalent ist. Also zwei völlig verschiedene Gebilde sind kategorisch fast gleich. Diese Korrespondenz kann dazu genutzt werden topologische Eigenschaften algebraisch zu kodieren und dann auf den nicht-kommutativen Fall zu erweitern: nicht-kommutative Topologie.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, natürliche Transformation, Isomorphismus

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.4.4.8%20%C3%84quivalenz%20von%20Kategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1 (Höher) Kategorien - Abelsche - Nullobjekt
`https://youtu.be/XbOf-nVZ1t0`

v5.0.1.6.1.4 (Höher) Kategorien - Abelsche - Additiver Funktor
`https://youtu.be/zSP_a2RvoYE`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quivalenz_(Kategorientheorie)`
`https://ncatlab.org/nlab/show/equivalence+of+categories`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Transformation`
`https://ncatlab.org/nlab/show/natural+isomorphism`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Skelett_(Kategorientheorie)`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Gelfand-Neumark`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

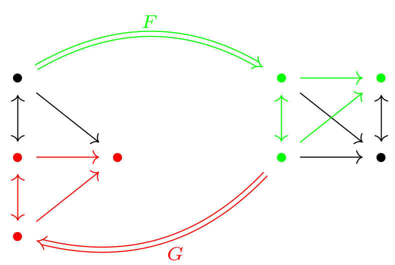
Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe `http://www.gnu.org/licenses/`.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `huch!`

1. Äquivalente Kategorien

1.1. Ein endliches Beispiel.

(1)



1.2. Definition der Äquivalenz von Kategorien.

Definition 1.2.1. (Äquivalenz von Kategorien): Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heißen **äquivalent**, wenn es zwei Funktoren

$$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D} \tag{2}$$

$$G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C} \tag{3}$$

und zwei natürliche Isomorphismen

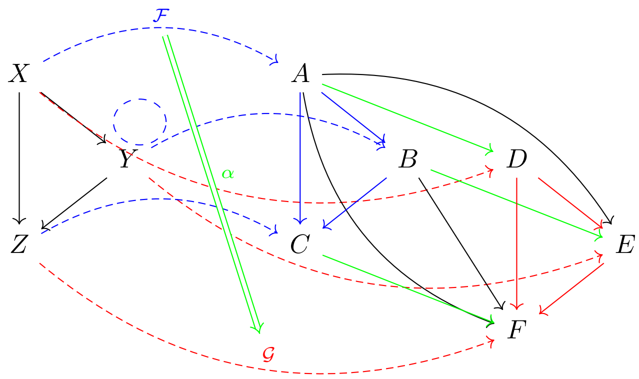
$$\alpha\colon FG \to 1_{\mathcal{C}} \tag{4}$$

$$\beta\colon GF \to 1_{\mathcal{D}} \tag{5}$$

gibt.

1.3. Endo-Funktoren.

(6)



TODO: drei Bilder: Nat zwischen 1. Funktoren 2. Endo-Funktoren 3. 1 und Endo-Funktor

1.4. Das Skelett einer Kategorie.

Definition 1.4.1. (Skelett einer Kategorie): Ein **Skelett** einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Unter-Kategorie bestehend aus genau einem Objekt von $\mathcal{C}$ pro Isomorphie-Klassen von Objekten und zwischen zwei Objekten im Skelett bestehen alle Homomorphismen wie in $\mathcal{C}$.

- Zu jedem Objekt in $\mathcal{C}$ gibt es genau ein zum ihm isomorphes Objekt im Skelett.
- Je zwei Objekte im Skelett sind nicht isomorph.
- Die Ausgangskategorie ist äquivalent im Sinne von [Definition 1.2.1, "Äquivalenz von Kategorien"].
- Zwei Kategorien sind genau dann äquivalent, wenn sie isomorphe Skelette besitzen.

TODO: Male in Skelett

Grundlegend ist, dass jede Kategorie ein Skelett besitzt. (Diese Aussage ist zum Auswahlaxiom für Klassen äquivalent, wie es etwa die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre bereitstellt.) Wenn auch eine Kategorie mehrere verschiedene Skelette besitzen kann, sind sie jedoch als Kategorien isomorph. Also besitzt jede Kategorie bis auf Isomorphie ein eindeutiges Skelett.

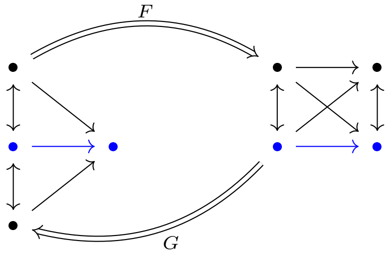
Die Bedeutung von Skeletten rührt daher, dass sie (bis auf Isomorphie) kanonische Vertreter der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenz von Kategorien sind. Das ergibt sich daraus, dass jede Kategorie zu einem Skelett äquivalent ist, und dass zwei Kategorien genau dann äquivalent sind, wenn sie isomorphe Skelette besitzen. (Die letzten beiden Absätze sind dem Wikipedia-Eintrag über Skelette entnommen.)

In der folgenden Skizze ist jeweils die Kategorie

$$\bullet \longrightarrow \bullet \tag{7}$$

als Skelett blau hervorgehoben:

(8)



Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
Ring nach **Gruppe**	Kategorie der Ringe und der Gruppen
$\mathrm{GL}_n(R)$	Allgemeine lineare Gruppe über dem Ring R
R^*	Einheitengruppe des Rings R
Det_n^R	n-dimensionale Determinante für Matrizen mit Koeffizienten in R.