

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.2.1.1 Universeller Morphismus

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2025 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Ein **universeller Morphismus** von einem Funktor zu einem Objekt X der Ziel-Kategorie dieses Funktors besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f vom Bild dieses Objektes nach X . Und das so, dass dieses Paar die **universelle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von einem Bild-Objekt nach X kann durch f faktorisiert werden.

Das U , welches wie f von X abhängt, ist eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X in der Quell-Kategorie was abgehende Morphismen anbetrifft. Genauso ist das Bild von U eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X unter den Funktor-Bildern was abgehende Morphismen anbetrifft.

Dual ein **kouniverseller Morphismus** von einem Objekt X der Ziel-Kategorie zu diesem Funktor besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f von X nach dem Bild dieses Objektes. Und das so, dass dieses Paar die **kouniverselle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von X nach einem Bild-Objekt kann durch f faktorisiert werden. Dual (aber die Richtung des Funktors wird nicht umgedreht)

Wenn wir nach universellen Morphismen zu/von allen Objekten suchen, stellen wir fest, dass es sie nicht immer gibt. Und zu einem Objekt kann es mehrere geben. Somit haben wir eine partielle, mehrwertige Funktion.

Bei festgelegtem universellen Morphismus sind die Morphismen sind allerdings die Morphismen von/zu Bild-Objekten bijektiv zu den Morphismen zu/vom Stellvertreter-Objekt.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien, Funktoren, Funktor-Bilder

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.2.1%20Funktor-Bilder>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
<https://youtu.be/sIaKt-Wxlog>

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
<https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property
<https://ncatlab.org/spahn/show/couniversal+mapping+property+1>
<https://ncatlab.org/nlab/show/universal+construction>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:

„Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Ausführlich:

„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“

Francis Borceux 2008 Cambridge University Press

978-0521061193 (ISBN)

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.2.1.1 UNIVERSELLER MORPHISMUS

Ein **universeller Morphismus** von einem Funktor zu einem Objekt X der Ziel-Kategorie dieses Funktors besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f vom Bild dieses Objektes nach X . Und das so, das dieses Paar die **universelle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von einem Bild-Objekt nach X kann durch f faktorisiert werden.

Das U , welches wie f von X abhängt, ist eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X in der Quell-Kategorie was abgehende Morphismen anbetrifft. Genauso ist das Bild von U eine Art Repräsentant/Stellvertreter von X unter den Funktor-Bildern was abgehende Morphismen anbetrifft.

Dual ein **kouniverseller Morphismus** von einem Objekt X der Ziel-Kategorie zu diesem Funktor besteht aus einem Objekt der Quell-Kategorie U und einem Morphismus f von X nach dem Bild dieses Objektes. Und das so, das dieses Paar die **kouniverselle Eigenschaft** erfüllt: Jeder Morphismus von X nach einem Bild-Objekt kann durch f faktorisiert werden. Dual (aber die Richtung des Funktors wird nicht umgedreht)

Wenn wir nach universellen Morphismen zu/von allen Objekten suchen, stellen wir fest, dass es sie nicht immer gibt. Und zu einem Objekt kann es mehrere geben. Somit haben wir eine partielle, mehrwertige Funktion.

Bei festgelegtem universellen Morphismus sind die Morphismen sind allerdings die Morphismen von/zu Bild-Objekten bijektiv zu den Morphismen zu/vom Stellvertreter-Objekt.

1.1. Ideen.

•

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
 [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
 [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
 [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
 [Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

•	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
\mathcal{P}	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op} oder \mathcal{C}^*	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α