(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.4 Natürliche Transformationen

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Natürliche Transformationen sind Morphismen zwischen Funktoren. Dabei wird der Quell-Funktor mit den Mitteln, nämlich Morphismen, der Ziel-Kategorie in den Ziel-Funktor überführt. Wir können also sagen, dass die beiden Funktoren „innerhalb“ der Ziel-Kategorie vergleichbar sind.

Diese sind uns bereits beim Thema Morphismen zwischen Morphismen aufgefallen als ein oft (aber nicht immer) wiederkehrendes Prinzip.

Ein Funktor ist das Finden der Form oder Figur der Quell-Kategorie in der Ziel-Kategorie. Zwei Funktoren der selben Quell-Kategorie entspricht also dem Finden von zwei Figuren der selben Form in der Ziel-Kategorie. Falls eine natürliche Transformation von dem einen Funktor in den andern existiert, dann können wir die eine Figur innerhalb der Ziel-Kategorie in die andere überführen.

So wie wir zwei homotope Wege innerhalb des Trägerraumes ineinander überführen können. Natürliche Transformationen und Homotopien liegen also intuitiv sehr nahe bei einander.

Algebraisch ist eine natürliche Transformation eine Familie von Morphismen in der Ziel-Kategorie und zwar für jedes Objekt der Quell-Kategorie ein Morphismus. Diese Morphismen müssen mit den Bilder der Morphismen der Quell-Kategorie in der Ziel-Kategorie kommutieren.

Das führt dazu, dass die Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ als *Objekte* und die natürlichen Transformationen als *Homomorphismen* die Axiome einer Kategorie erfüllen. Wir nennen die Funktorkategorie $\mathcal{D}$ hoch $\mathcal{C}$ und schreiben $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Somit können wir uns natürliche Transformationen auch als Kategorien-Homomorphismen denken. Dies ist allerdings insofern problematisch, als dann einige Objekte keine Mengen (also mathematische Objekte) sind. Wollen wir diese Intuition präzisieren, so bilden wir eine Kategorie der kleiner Kategorien. Dann stimmt auch dieser Begriff ohne Probleme.

Ein natürlicher Isomorphismus zwischen zwei Funktoren ist eine natürliche Transformation mit einer weiteren natürlichen Transformation, die das Inverse ist. Das entspricht dann dem Finden von zwei identischen Figuren, die wir innerhalb der Kategorie ineinander überführen können.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Axiome der Kategorien, Funktor.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.4%20Nat%C3%BCrliche%20Transformationen`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`
v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen
`https://youtu.be/v1F5BFH8nbo`
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Transformation`
`https://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories`
`https://ncatlab.org/nlab/show/small+category`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Homotopie`
`https://ncatlab.org/nlab/show/natural+isomorphism`
`https://www.youtube.com/watch?v=Ir-DiecNUmA`
`https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf`
`https://ncatlab.org/nlab/show/category+of+presheaves`
`https://mathoverflow.net/questions/64365/natural-transformations-as-categorical-homotopies`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter huhu

1. Natürliche Transformation

Seien im Folgenden $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren mit $\mathcal{C}$ als Quell- und $\mathcal{D}$ als Ziel-Kategorie.

1.1. **Definition einer natürlichen Transformation.**

Definition 1.1.1. (Natürliche Transformation): Eine **natürliche Transformation**

$$\alpha \colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \tag{1}$$

ist eine Schar von Homomorphismen in der Ziel-Kategorie $\mathcal{D}$ mit Index die Objekte der Quell-Kategorie $\mathcal{C}$:

$$(\alpha_X \colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X))_{X \in \mathcal{C}} \,. \tag{2}$$

mit denen jeweils die Bilder der Objekte der Quell-Kategorie verbunden werden. Diese müssen mit den Bildern der Morphismen in dem Sinne verträglich sein, dass alle Diagramme der folgenden

Art, d.h. für alle $f\colon X \to Y$, mit $f \in \mathcal{C}$, kommutativ sind:

(3)
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}
$$

Eine Schar ist nur ein anderes Wort für Familie oder Funktion. Hier müssen wir auch Klassen-Funktionen zulassen, da die Klasse der Objekte der Quell-Kategorie durchaus eine echte Klasse sein kann. In unseren Gemälden stellen wir natürliche Transformationen oft so dar:

(4)
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

Wir haben nun drei Arten von Pfeilen: die zwischen Objekten, die zwischen Kategorien und die zwischen Funktoren. Die Pfeile zwischen Funktoren sind dabei eigentlich Scharen von Pfeilen zwischen Objekten.

1.2. **Zweimaliges Finden einer Form.** Sei $\mathcal{C}$ die Quell-Kategorie der Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, die die selbe Ziel-Kategorie $\mathcal{D}$ haben. Dies können wir so beschreiben, dass $\mathcal{C}$ eine Form oder Figur ist, die wir in $\mathcal{D}$ wiederfinden. Bei zwei Funktoren handelt es sich also um ein zweimaliges Finden einer Form.

Sei z.B. $\mathcal{C}$ folgende Kategorie mit drei Objekten (wir lassen die Identitäten weg):

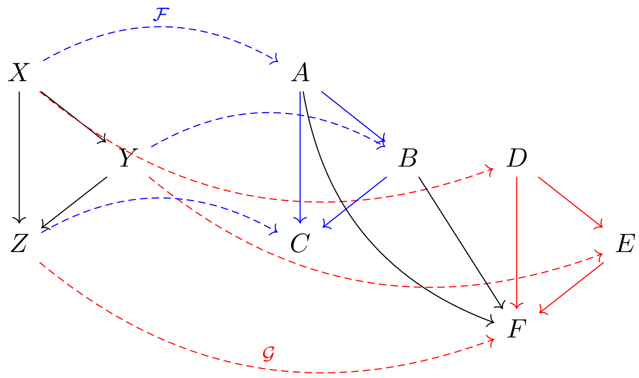
(5)
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[dl] \\
Z &
\end{tikzcd}
$$

Die Ziel-Kategorie hat die Objekte A, B, C, D, E, F und sei wie folgt.

(6)
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[dddrr, bend right] & & & \\
& B \arrow[dl] \arrow[ddr] & D \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
C & & & E \arrow[dl] \\
& & F &
\end{tikzcd}
$$

Betrachten wir nun die folgenden zwei Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$

(7)

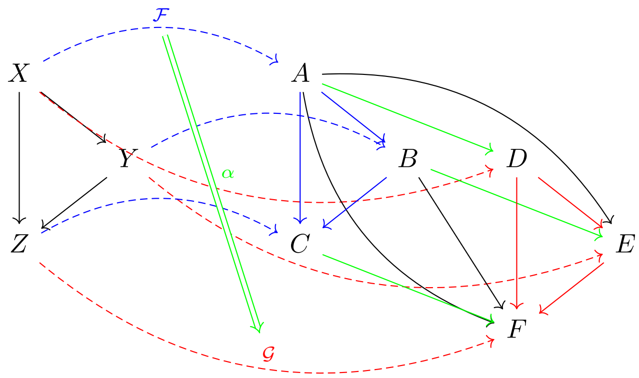


Diese finden beide die Dreiecksform als Teil der Ziel-Kategorie. Wir können aber keine natürliche Transformation finden, da Morphismen von $A \to D$, $B \to E$ und $C \to F$ fehlen. Es gibt ein Loch in der Ziel-Kategorie, welches das Überführen der einen gefundenen Form in die zweite innerhalb der Ziel-Kategorie verhindert.

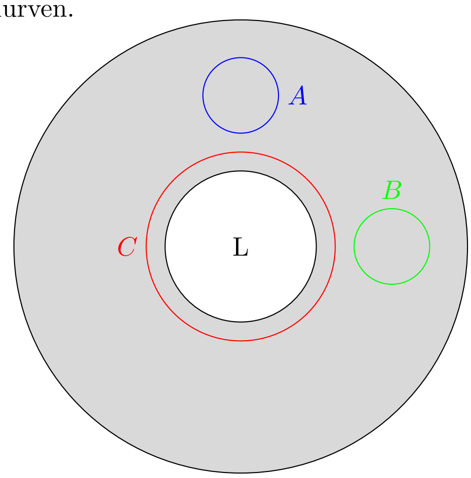
Neben den Lücken (es fehlen notwendige Morphismen) kann es auch noch das Problem geben, dass die entstehenden Diagramme (3) nicht kommutativ sind.

Geben wir unserer Ziel-Kategorie die im nächsten Gemälde gezeigten vier Morphismen, so existiert eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

(8)



1.3. **Das erinnert sehr an Homotopie.** Das Loch oder die Lücke, die verhindert, dass wir eine Figur innerhalb des Ziels in die anderen überführen können, erinnert sehr an nicht homotope Kurven.



In dieser Situation, in der der topologische Raum der Betrachtung der graue Bereich ist, kann der Quell-Kreis A in den Ziel-Kreis B innerhalb der grauen Fläche stetig deformiert werden. A kann aber nicht in C steig überführt werden, da das Loch L im Weg ist. A und B sind homotop A und C nicht.

Der fehlende Raum im Loch L entspricht den fehlenden Morphismen, falls es keine natürliche Transformation gibt.

Diese Ähnlichkeit wird in `https://mathoverflow.net/questions/64365/natural-transformations-as-categorical-homotopies` präzisiert.

1.4. **Funktor Kategorie.** Natürliche Transformationen laufen letztendlich auf Morphismen in der Ziel-Kategorie hinaus. Es vererben sich einige Eigenschaften der Morphismen auf die natürlichen Transformationen. Es ist recht leicht zu zeigen, dass

- wir zwei nat. Trans. verknüpfen können, indem wir die Morphismen ihrer Scharen verknüpfen,
- diese Verknüpfung die Assoziativität erbt
- und dass die Schar mit Identitäten die Rolle der Identität bei dieser Verknüpfung von nat. Trans. spielt.

Wenn die Quell-Kategorie klein ist (eine Menge ist), ist eine nat. Trans. selber eine Menge und kann Element von Klassen sein. Dann bilden die Funktoren als Objekte mit den nat. Trans als Morphismen eine Kategorie: die Funktorkategorie. Die Kategorie aller Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$$

und wir bezeichnen die Hom-Klasse mit Nat:

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

1.5. **Ein paar Worte zum Wort natürlich.** Wenn wir sagen, es gibt da und da einen **natürlichen** Homomorphismus, ist mit diesem unscheinbar daherkommenden Wort immer viel gemeint:

- Es gibt zwei Kategorien,
- es gibt zwei Funktoren zwischen denen,
- „der“ Homomorphismus ist eigentlich eine Schar von Homomorphismen und
- diese Schar verträgt sich (kommutiert) mit den Bildern der Homomorphismen unter den zwei Funktoren im Sinne von (3).

Natürlichkeit ist ein kategorischer Begriff und erfordert eine präzise Angabe der vorliegenden Daten: Quell- und Ziel-Kategorie, Quell- und Ziel-Funktor sowie eine Schar von Morphismen.

1.6. **Kategorien von Prägarben.** Das ganze funktioniert auch für kontravariante Funktoren.

Definition 1.6.1. (Prägarbe): Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ ist ein kontravarianter Funktor nach Set:

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}. \tag{9}$$

Falls $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie ist, dann ist $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ eine Funktor-Kategorie: die Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$, also die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Set. Diese Kategorien haben sehr gute Eigenschaften und bilden ein wichtiges Beispiel für Funktorkategorien.

2. TODO

Literatur

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie