(Mittel) Geometrie

v1.7.6.4.3.5 Senkrecht

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Senkrecht ist ein Konzept, für das es etliche Definitionen gibt. Keine der Definitionen ist die eine richtige. Alle sind sie äquivalent. Der gemeinsame Geist dahinter, ist das Konzept Senkrecht.

Bevor wir über Senkrecht reden können, bevor wir es untersuchen können, müssen wir es definieren. Die verschiedenen Vorstellungen von uns, was Senkrecht ist, kann helfen, eine Definition zu finden. Sie reicht aber für einen präzisen mathematischen Diskurs nicht aus.

Der sogenannte Satz des Pythagoras ist eine dieser Definitionen. Ein Dreieck wir dann senkrecht genannt, wenn der Satz des Pythagoras gilt.

Mit Hilfe des Rechnens mit Strecken und insbesondere dem Skalarprodukt kann die Äquivalenz der hier vorgestellten Definitionen gut gezeigt werden.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Koordinaten-System, Satz des Pythagoras, Abstand im Koordinatensystem, Rechnen mit Buchstaben, Skalarprodukt, Rechnen mit Strecken

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v1%20Mittel/v1.7%20Klasse%207%20und%208/v1.7.6.4.3.5%20Senkrecht`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v1.7.6.4.2 (Mittel) Geometrie - Satz des Pythagoras
`https://youtu.be/mTMOtXfUQzQ`

v1.7.6.4.3 (Mittel) Geometrie - Abstand im Koordinatensystem
`https://youtu.be/HEdolewfn78`

v1.7.6.4.3.2 (Mittel) Abstand Gerade vom Nullpunkt `https://youtu.be/_qN6Z-a72ok`

v1.7.6.4.3.3 (Mittel) Geometrie - Skalarprodukt `https://youtu.be/PMYHObLI54Q`

v1.7.6.4.3.4 (Mittel) Geometrie - Rechnen mit Strecken `https://youtu.be/hYRLizedcVM`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Orthogonalit%C3%A4t`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Abstand`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Skalarprodukt`
`https://www.schuelerhilfe.de/online-lernen/1-mathematik/719-skalarprodukt`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„KomplettWissen Mathematik Gymnasium Klasse 5-10“
Klett Lerntraining bei PONS
978-3-12-926097-5 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/schulbuch-lexikon-woerterbuch/35031626-9783129260975-komplettwissen-mathematik-gymnasium-klasse-5-10`

„Grundlagen der ebenen Geometrie“ Hendrik Kasten, Denis Vogel
Springer Berlin
978-3-662-57620-5 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/43394438-9783662576205-grundlagen-der-ebenen-geometrie`

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter upps

1. Senkrecht

1.1. Das Konzept Senkrecht.

Wir stellen hier 5 äquivalente Definitionen des Begriffs Senkrecht vor. Zunächst ist jede Definition so gut wie die andere. Den gemeinsam sich dahinter stehenden Geist, das Wesen von Senkrecht, nenne ich Konzept Senkrecht.

(1) Der kürzeste Abstand eines Punktes zu einer Geraden liegt auf einer senkrechten Geraden.
(2) Zu einer Gerade mit Steigung m ist eine Gerade mit Steigung $-1/m$ senkrecht (sofern $m \neq 0$).
(3) Zwei Seiten eines Dreiecks sind senkrecht, wenn der Satz des Pythagoras gilt (mit der dritten Seite als Hypotenuse).
(4) Zwei Strecken sind Senkrecht, wenn deren Skalarprodukt 0 ist.
(5) Eine Gerade ist senkrecht zu einer zweiten, wenn deren Punkte gleich weit weg von links und rechts sind.

1.2. Die Definitionen sind äquivalent.

1.2.1. *Äquivalenz zu (1), minimaler Abstand.* Wir betrachten den Fall des Nullpunktes. Für andere Punkte geht alles genauso, nur die Formeln werden alle unübersichtlicher. Der Abstand des Nullpunktes zu einem Punkt auf der Geraden $y = mx + q$ mit x-Koordinate x ist

$$\sqrt{(m^2+1)x^2 + 2mqx + q^2}, \tag{1}$$

wie wir z. B. dem Video „v1.7.6.4.3.2 (Mittel) Geometrie - Abstand einer Geraden vom Nullpunkt“ entnehmen können. Um das Minimum zu finden, genügt es den Ausdruck unter der Wurzel, der Abstand zum Quadrat zu minimieren. Diesen schreiben wir nun um mit der quadratischen Ergänzung:

$$\left(x\sqrt{m^2+1} + \frac{mq}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 - \frac{m^2q^2}{m^2+1} + q^2. \tag{2}$$

Die Terme hinter dem Quadrat zusammenfassend erhalten wir schließlich:

$$\boxed{\left(x\sqrt{m^2+1} + \frac{mq}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 + \frac{q^2}{m^2+1}.} \tag{3}$$

Das Minimum dieses Ausdrucks ist $\frac{q^2}{m^2+1}$ und es wird erreicht, wenn der Term im Quadrat 0 wird. Das führt zu dem im obengenannten Video bereits gezeigten minimalen Abstand $\sqrt{\frac{q^2}{m^2+1}}$ angenommen an der Stelle $x = -\frac{mq}{m^2+1}$.

Anders gesagt ist

$$\boxed{\Delta := \left(x\sqrt{m^2+1} + \frac{mq}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2.} \tag{4}$$

der **Fehler** vom tatsächlichen zum minimalen Abstandquadrat.

Wir möchten nun den Ausdruck im Quadrat als Skalarprodukt darstellen. Dazu suchen wir zunächst eine Strecke auf der Geraden $y = mx + q$. Dazu nehmen wir die beiden Punkte an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ auf dieser Geraden. Es handelt sich um die Punkte $(0, q)$ und $(1, m + q)$. Wir bezeichnen die Strecke von $(0, q)$ nach $(1, m + q)$ mit $\vec{d}$. Die Koordinatenversätze sind

$$d_x = 1 \tag{5}$$
$$d_y = m. \tag{6}$$

Für die Länge dieser Strecke gilt nach unserer Definition des Pythagoras

$$\boxed{|\vec{d}| = \sqrt{m^2 + 1}}. \tag{7}$$

Der Punkt an der Stelle x auf der Geraden hat die Koordinaten $(x, mx+q)$. Diese Strecke nennen wir $\vec{a}$, und da die Strecke bei 0 anfängt, sind die Koordinatenversätze gleich den Koordinaten des zweiten Punktes:

$$a_x = x \tag{8}$$
$$a_y = mx + q. \tag{9}$$

Damit gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = x \cdot 1 + (mx + q) \cdot m \tag{10}$$
$$= x + m^2 x + mq \tag{11}$$
$$= (m^2 + 1)x + mq. \tag{12}$$

Diesen letzten Ausdruck wollen wir mit dem Wert im Quadrat oben vergleichen und kommen auf:

$$\sqrt{m^2+1}\left(x\sqrt{m^2+1} + \frac{mq}{\sqrt{m^2+1}}\right) = (m^2+1)x + mq. \tag{13}$$

Schon jetzt sehen wir, dass das Skalarprodukt 0 ist, genau dann wenn das Minimum des Abstandquadrates erreicht wird, wenn also die Fehler Δ zu 0 wird.

Betrachten wir statt dessen die Strecke $\vec{e}$, deren Längen mit $1/\sqrt{m^2+1}$ multipliziert werden. Diese hat ihren ersten Punkt wieder den Achsenabschnitt der Geraden, also $(0, q)$. Der zweite Punkt ist allerdings an der Stelle $x = 1/\sqrt{m^2+1}$ und ist damit der Punkt $(1/\sqrt{m^2+1}, m/\sqrt{m^2+1} + q)$ mit den Koordinatenversätzen

$$e_x = 1/\sqrt{m^2+1} \tag{14}$$
$$e_y = m/\sqrt{m^2+1}. \tag{15}$$

Die Länge dieser Strecke ist

$$(1/\sqrt{m^2+1})^2 + (m/\sqrt{m^2+1})^2 = 1/(m^2+1) + m^2/(m^2+1) = \tag{16}$$
$$(m^2+1)/(m^2+1) = 1. \tag{17}$$

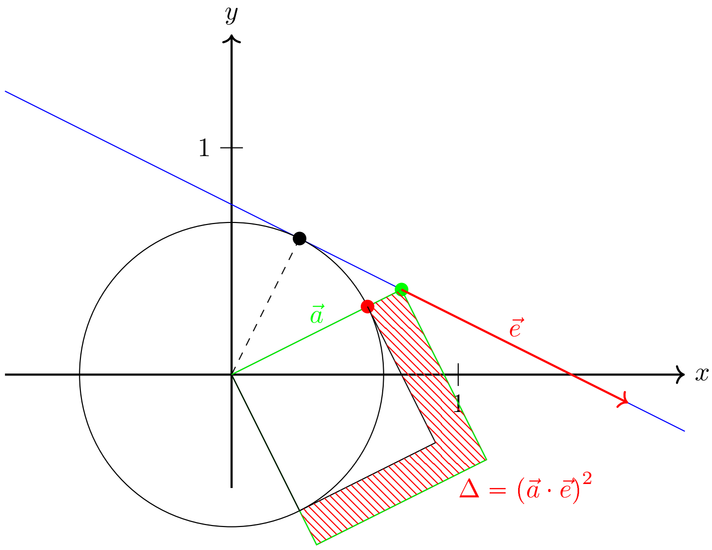
Es handelt sich also um eine Strecke der Länge 1, die auf der Geraden liegt. Die Rechnung sparen ich mir. Es ergibt sich:

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = \left(x\sqrt{m^2+1} + \frac{mq}{\sqrt{m^2+1}}\right), \tag{18}$$

und damit

$$\boxed{(\vec{a} \cdot \vec{e})^2 = \Delta.} \tag{19}$$

Das Quadrat des Skalarproduktes einer Strecke vom Null-Punkt zu einer Geraden mit einer Strecke der Länge 1 auf der Geraden misst den Fehler zum minimalen Abstandsquadrat Δ.



1.2.2. *Äquivalenz zu (2), Steigung ist $-1/m$.* Die Steigung einer Geraden ergibt sich aus beliebigen zwei verschiedenen Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_2) zu

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{20}$$

Für eine Strecke $\vec{a}$ auf der Geraden mit den Koordinatenversätzen a_x und a_y gilt demnach

$$m = \frac{a_y}{a_x}. \tag{21}$$

Für eine zweite Gerade $y = m'x + q'$ und einer Strecke $\vec{b}$ auf ihr gilt genauso

$$m' = \frac{b_y}{b_x}. \tag{22}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \quad \Leftrightarrow && (23)\\
a_x b_x + a_y b_y &= 0 \quad \Leftrightarrow && (24)\\
a_x b_x &= -a_y b_y \Leftrightarrow && (25)\\
\frac{a_x}{a_y} &= -\frac{b_y}{b_x} \quad \Leftrightarrow && (26)\\
m &= \frac{1}{-m'} && (27)
\end{aligned}$$

Bei der Umformung zur vierten Zeile haben wir durch a_y und durch b_x geteilt. Das funktioniert so nur, wenn diese beiden Werte nicht 0 sind.

Die Definition über die Steigung von Geraden funktioniert nicht für alle Strecken. Die des Skalarproduktes aber immer.

1.2.3. *Äquivalenz zu (3), es gilt der Pythagoras.* Sei ein Dreieck gegeben mit den Seiten $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und zwar so gerichtet, dass $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ gilt. Wie in dem Video „v1.7.6.4.3.4 (Mittel) Geometrie - Rechnen mit Strecken" beschrieben gilt dann

$$\vec{c}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2. \tag{28}$$

Dies ist die binomische Formel für das Rechnen mit Strecken. Wir sehen sofort, dass

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 0. \tag{29}$$

1.2.4. *Äquivalenz zu (4), gleich weit weg.* Bilden wir links und rechts von $\vec{a}$ ein Dreieck mit einer Strecke der Länge 1 auf der Geraden, die wir $\vec{e}_-$ und $\vec{e}_+$ nennen, so erhalten wir, wegen $\vec{e}_- = -\vec{e}_+$

$$(\vec{a} - \vec{e})^2 = (\vec{c}_-)^2 \tag{30}$$

$$(\vec{a} + \vec{e})^2 = (\vec{c}_+)^2 \tag{31}$$

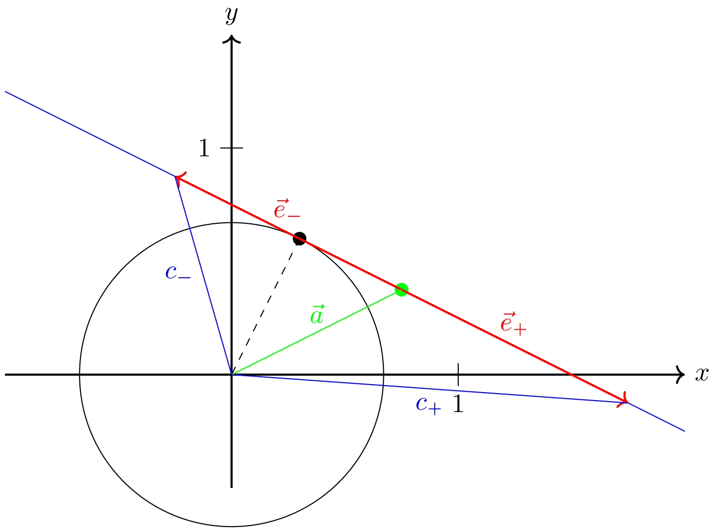
Ausmultiplizieren führt zu:

$$\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{e} + \vec{e}^2 = (\vec{c}_-)^2 \tag{32}$$

$$\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{e} + \vec{e}^2 = (\vec{c}_+)^2 \tag{33}$$

Hier können wir ablesen:

$$(\vec{c}_+)^2 = (\vec{c}_-)^2 \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{e} = 0. \tag{34}$$



2. TODO:

Literatur

[Klett2016] Klett Lerntraining, *Komplett Wissen Mathematik Gymnasium 5-10*, Klett Lerntraining, 978-3-12-926097-5 (ISBN)

[KastenVogel2018] Hendrik Kasten, Denis Vogel , *Grundlagen der ebenen Geometrie*, 2018 Springer Berlin, 978-3-662-57620-5 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$	Seiten
a_x, a_y	Koordinatenversätze der Seite a
$\|a\|$	Länge der Seite a
m	Steigung der Gerade
q	Achsenabschnitt der Gerade
x, y	Koordinatenachsen
$A, B, C, \cdots$	Punkte
A_x, A_y	Koordinaten des Punktes A
$\overrightarrow{AB}$	gerichtete Strecke von A nach B
$\perp$	Senkrecht