(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.2 Kontravarianz und duale Kategorie

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. „Dual“ ist eine Eigenschaft von Ausdrücken, Prädikaten oder Sätzen der Kategorien-Theorie. Es ist keine Eingenschaft von den mathematischen Objekten dieser Theorie. Also keine Eigenschaft von z. B. Objekten, Homomorphismen oder Kategorien.

Damit wir dual definieren können müssen wir eine weitere Ebene schaffen, da wir dabei über die Sprache sprechen müssen, mit der wir die ganze Zeit über Kategorien sprechen. Dazu bedienen wir uns der mathematischen Logik. In ihr formalisieren wir eine „normale“ Theorie in der Prädikaten-Logik erster Stufe und fügen die üblichen Axiome der Kategorien-Theorie als Axiome hinzu.

Das Ergebnis ist ETAC = elementary theory of abstract categories.

Hier nutzen wir eine Art geheimes Pseudo-Axiom: Wenn wir mathematisch beweisen können, dass etwas in dieser formalisierten Theorie gilt, gehen wir davon aus, dass die entsprechende Aussage auch für unsere Sprache gilt, in der wir über die Mathematik reden. Ich nenne es das Pseudo-Axiom des logischen Ebenen-Liftens.

Nun definieren wir das Dual zu einem logischen Bestandteil indem wir alle Pfeile umdrehen.

Da die Dualen der Axiome von ETAC wahr sind, ist jedes Dual eines beweisbaren Satzes ebenfalls beweisbar: wir brauchen nur das Dual des Beweises hinschreiben.

Ein wahrer Satz über ein Konstrukt ist automatisch auch der wahre duale Satz über da duale Konstrukt.

Manchmal haben Duale eigene Namen, manchmal hängen wir „Ko“ davor und manchmal gibt es beides.

Komono = Epi.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Homomorphismus, Mono, Epi, Anfangs-, End- und Null-Objekt, ein wenig mathematische Logik

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.1%20Kategorisch%20dual`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
`https://youtu.be/X8v5Kyly0KI`

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null
`https://youtu.be/n4-qZJK_sH0`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Kategorie`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik_erster_Stufe`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_(category_theory)`
`https://ncatlab.org/nlab/show/duality`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology`

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory`

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics`

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `xxx`

1. Dual

„Dual“ ist eine Eigenschaft von Ausdrücken, Prädikaten oder Sätzen der Kategorien-Theorie. Es ist keine Eingenschaft von den mathematischen Objekten dieser Theorie. Also keine Eigenschaft von z. B. Objekten, Homomorphismen oder Kategorien.

Damit wir dual definieren können müssen wir eine weitere Ebene schaffen, da wir dabei über die Sprache sprechen müssen, mit der wir die ganze Zeit über Kategorien sprechen. Damit das möglich wird, bedienen wir uns der mathematischen Logik. In ihr formalisieren wir eine „normale“ Theorie in der Prädikaten-Logik erster Stufe (Variablen, Ausdrücke, boolsche Operatoren, Quantoren, Prädikate, Aussagen, Beweise. Kurz: logische Bestandteile). Wir fügen Variablen für Objekte $(A, B, C, \cdots)$ und für Morphismen $(f, g, h, r, s, \cdots)$ hinzu. Weiter fügen wir die üblichen Axiome der Kategorien-Theorie als Axiome hinzu.

Das Ergebnis ist ETAC = elementary theory of abstract categories.

Wir haben also drei Ebenen: Meta-Mathematik (META). Das ist der deutsche Text, in dem wir über die Dinge reden. Mathematik (MATH). Das ist die Welt der mathematischen Objekte. Hier befinden wir uns in der Regel in ZFC. Kategorien-Theorie ist eine Theorie über bestimmte solche Objekte. ETAC (LOGIK). Das ist eine mathematische Struktur, die Sätze der Kategorien-Theorie als endliche Folgende von Zeichen formalisiert. Objekt-Matematik (OBMA). Das sind die Objekte, die wir uns mit den Variablen bezeichnet denken. Es ist intuitiv klar, dass alle wahren Aussagen in ETAC gesehen als Sätze in META über MATH in jeder Kategorie aus MATH wahr sind.

Wir haben also drei Ebenen: 1. Meta-Mathematik (META). Das ist der deutsche Text, in dem wir über die Dinge reden. 2. ETAC (LOGIK). Das ist eine mathematische Struktur innerhalb der Mathematik, die Sätze der Kategorien-Theorie als endliche Folgende von Zeichen formalisiert. 3. ACMO (MODELLE). Das sind Modelle von ETAC. Sätze in ETAC können so über Kategorien in ACMO reden, wie Sätze aus META über Kategorien reden können.

Hier nutzen wir eine Art geheimes Pseudo-Axiom: Wenn wir mathematisch beweisen können, dass etwas in dieser formalisierten Theorie gilt, gehen wir davon aus, dass die entsprechende Aussage auch für unsere Sprache gilt, in der wir über die Mathematik reden. Ich nenne es das Pseudo-Axiom des logischen Ebenen-Liftens.

(Es gibt noch ein zweites geheimes ähnliches Ebenen-Lift-Axiom, welches aber hier nicht Anwendung findet: Wenn wir beweisen können, dass wir eine Aussage aus LOGIK beweisen/nicht beweisen können, gehen wir davon aus, dass wir die entsprechende Aussage auch in META beweisen/nicht beweisen können.)

ETAC hat neben den Atomen der normalen mathematischen Logik, wie Gleichheit, boolsche Operatoren usw., noch drei Funktionssymbole $\circ, Q, Z$. $f \circ g$ lesen wir als die Komposition von f und g, $Q(f)$ lesen wir als das Quellobjekt des Morphismus f, und $Z(Y)$ das Zielobjekt des Morphismus f.

Nun definieren wir das Dual zu einem logischen Bestandteil Σ, indem wir überall Q druch Z, Z durch Q und $f \circ g$ durch $g \circ f$ für alle Ausdrücke f und g. Mit anderen Worten: wir drehen die Pfeile um.

Offensichtlich ist Dualisierung idempotent.

Denn

$$(f\colon X \to Y) :\Leftrightarrow (X = Q(f) \wedge Y = Z(f)). \tag{1}$$

Da die Dualen der Axiome von ETAC wahr sind, ist jedes Dual eines beweisbaren Satzes ebenfalls beweisbar: wir brauchen nur das Dual des Beweises hinschreiben.

Also ist es so: wenn immer wir etwas hinschreiben, eine Notation, Definition, einen Satz oder einen Beweis, gibt es immer auch das Dual dazu. Ein wahrer Satz über ein Konstrukt ist automatisch auch der wahre duale Satz über da duale Konstrukt.

Manchmal haben Duale eigene Namen, manchmal hängen wir „Ko“ davor und manchmal gibt es beides.

Komono = Epi.

Witze innerhalb der Kategorientheorie, die durch Wortspiele mit Ko entstehen, sind verpönt, weil zu einfach zu generieren.

Funktoren werden bei der Dualisierung NICHT umgedreht.

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$P(x)$	ein Prädikat
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, **Gruppe**	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α