

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.5 R-Mod ist additiv

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Additive Kategorien sind definiert als **Ab**-Kategorien, die ein Null-Objekt und endliche Produkte und Koprodukte besitzen.

Das R -Mod eine **Ab**-Kategorie ist, haben wir schon gezeigt.

Hier zeigen wir, dass der Null-Modul $\{0\}$ ein Null-Objekt ist, und dass die direkte Summe, also das kartesische Produkt mit komponentenweiser Modul-Struktur, Produkt und Koprodukt ist.

In additiven Kategorien ist ein Produkt von zwei Objekten immer auch Koprodukt und umgekehrt. In diesen Kategorien ist dies darüber hinaus äquivalent zu Biprodukten.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Moduln, Kategorien, **Ab**-Kategorie, Produkt, Koprodukt, Null-Objekt.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.4.5%20Quotienten-Moduln>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln

https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.1.1.1.4 (Höher) Homologische Algebra - Unter-Moduln

<https://youtu.be/4g2TgQx7JkI>

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null

https://youtu.be/n4-qZJK_sH0

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Quotientenmodul>

<https://ncatlab.org/nlab/show/quotient+module>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter [uups](#)

1. v5.1.1.1.5 R-MOD IST ADDITIV

1.1. Modul-kompatible Äquivalenz-Relationen. Sei R ein Ring mit 1 und M ein R -Modul. Sei \sim eine Äquivalenz-Relation auf M .

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
 [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
 [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R -Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul