

(Höhere Grundlagen) Kategorien

## **v5.0.1.6.1.4 Additiver Funktor**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2023 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Die  $n$ -dimensionale Determinante ist eine natürliche Transformation.

**Präsentiert.** Von Jörg Kunze

**Voraussetzungen.** Axiome der Kategorien, Funktor, natürliche Transformation, Ringe, Determinanten, Einheiten-Gruppe.

**Text.** Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5.0.1.0.4.5%20Determinante%20als%20Nat%3BCrliche%20Transformationen>

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren

<https://youtu.be/0jf5LQGeyOU>

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen

<https://youtu.be/IN7Qa-Sw1D0>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%3BCrliche\\_Transformation](https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%3BCrliche_Transformation)

<https://ncatlab.org/nlab/show/natural+transformation>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor\\_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik))

[https://de.wikipedia.org/wiki/Ring\\_\(Algebra\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Ring_(Algebra))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Determinante>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Determinante#Determinantenproduktsatz>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Einheitengruppe>

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

**Das Video.** Das Video hierzu ist zu finden unter [huhu](#)

## 1. DETERMINANTE IST NATÜRLICHE TRANSFORMATION

Allgemein seine im folgenden  $R, S$  kommutative Ringe mit 1.

**1.1. Allgemeine lineare Gruppe ist Funktor.** Die allgemeine lineare Gruppe ist die Zuordnung

$$(1) \quad \mathrm{GL}_n : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Gruppe}$$

$$(2) \quad R \mapsto \mathrm{GL}_n(R),$$

Wobei  $\mathrm{GL}_n(R)$  die Gruppe der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $R$  ist. Damit das ein Funktor sein kann, müssen wir die Abbildung auf Morphismen erweitern und zeigen, dass die Axiome für Funktoren erfüllt sind.

## 2. TODO

### LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

### SYMBOLVERZEICHNIS

$A, B, C, \dots, X, Y, Z$	Objekte
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funktoren
$f, g, h, r, s, \dots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
<b>Set</b>	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von $X$ nach $Y$
$\alpha, \beta, \dots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
<b>Ring nach Gruppe</b>	Kategorie der Ringe und der Gruppen
$\mathrm{GL}_n(R)$	Allgemeine lineare Gruppe über dem Ring $R$
$R^*$	Einheitengruppe des Rings $R$
$\mathrm{Det}_n^R$	$n$ -dimensionale Determinante für Matrizen mit Koeffizienten in $R$ .