

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.4 Funktorkategorien

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Das .

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, Hom-Funktor, kontravarianter Funktor, Duale-Kategorie

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5.0.1%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.3%20Produkte%20von%20Kategorien>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
<https://youtu.be/X8v5Kyly0KI>

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
<https://youtu.be/sIaKt-Wxlog>

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
<https://youtu.be/0jf5LQGeyOU>

v5.0.1.0.8 (Höher) Kategorien - Hom-Mengen
<https://youtu.be/bnMkDng-NnA>
 v5.0.1.1.1 (Höher) Kategorien - Kategorisch dual
<https://youtu.be/5b112AYkCC4>
 v5.0.1.1.2 (Höher) Kategorien - Kontravarianz und duale Kategorie
<https://youtu.be/D3DfjfsJNlc>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Kategorie
[https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik))
<https://de.wikipedia.org/wiki/Hom-Funktor>
<https://ncatlab.org/nlab/show/bifunctor>
<https://ncatlab.org/nlab/show/product+category>
https://en.wikipedia.org/wiki/Product_category

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGEND EINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.4 FUNKTORKATEGORIEN

1.1. Produkt von Kategorien.

Definition 1.1.1. (Produkt von Kategorien): Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} zwei Kategorien. Das **Produkt** ist definiert als das kartesische Produkt der beiden Klassen der Objekte als Klasse der Objekte und das kartesische Produkt der beiden Klassen der Morphismen als Klasse der Morphismen. Für jeden Morphismus $f: C_1 \rightarrow C_2$ und $g: D_1 \rightarrow D_2$ ist

$$(1) \quad (f, g): (C_1, D_1) \rightarrow (C_2, D_2).$$

Weiter wird definiert:

$$(2) \quad \text{id}_{(C,D)} := (\text{id}_C, \text{id}_D)$$

$$(3) \quad (f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) := (f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2).$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Axiome einer Kategorie erfüllt sind.

1.2. Hom(). Hom definiert zwei Scharen vom Morphismen $\text{Hom}(\mathcal{C}, _)$ und $\text{Hom}(_, \mathcal{D})$. Ergeben diese zusammen einen Bi-Funktor $\text{Hom}(_, _): \mathcal{C}^* \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$?

Allgemeiner: Sei $K: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ eine Funktion auf den Objekten von $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ und eine Funktion auf den Morphismen der Form (f, id_D) und (id_C, g) und seien $K(\mathcal{C}, _)$ und $K(_, \mathcal{D})$ Scharen von Funktoren. Können wir K als Bi-Funktor erweitern? Wir müssen ihn erweitern, da er nicht auf allgemeinen Morphismen der Form (f, g) definiert ist.

Mit dem Ansatz für $f: C_1 \rightarrow C_2$ und $g: D_1 \rightarrow D_2$

$$(4) \quad K(f, g) := K(f, D_2) \circ K(C_1, g)$$

können wir fast alle Axiome eines Funktors beweisen. Außer das mit der Verknüpfung. Wir haben also einen Fast-Funktor.

Damit $K((f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)) = K(f_2, g_2) \circ K(f_1, g_1)$ ist, können wir unserer angesetzten Definition und der Definition der Verknüpfung im Produkt zeigen, dass folgendes gelten muss:

$$(5) \quad K(f_2, D_3) \circ K(f_1, D_3) \circ K(C_1, g_2) \circ K(C_1, g_1) = K(f_2, D_3) \circ K(C_2, g_2) \circ K(f_1, D_2) \circ K(C_1, g_1).$$

NICHT FERTIG!

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
 [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
 [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
 [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

$P(x)$	ein Prädikat
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
\mathcal{P}	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op}	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, Gruppe	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α