(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1 Moduln

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Moduln sind die prototypischen Beispiele in der homologischen Algebra. Genauer sind es die Kategorien der R-Moduln, für jeden Ring mit Eins eine Kategorie. Der eigentliche Schauplatz der homologischen Algebra sind die abelschen Kategorien. So dass wir sagen können, die homologische Algebra ist die Untersuchung von abelschen Kategorien.

Die Kategorien der R-Moduln sind abelsche Kategorien: welche Eigenschaften das sind und der Nachweis ist Teil dieses Kurses.

R-Moduln sind Vektorräume, in denen wir statt einen Körper nur einen Ring mit Eins voraussetzen. Das heißt wir haben eine kommutative Gruppe (wir sagen eine additive Gruppe) mit einer Skalarmultiplikation, welche assoziativ und distributiv ist und wo die Multiplikation mit Eins nichts macht.

Die simple Tatsache, dass wir nicht mehr zu jedem Skalar ein multiplikativ Inverses (noch $0 \neq 1$) fordern, hat umfangreiche Konsequenzen für die entstehenden Phänomene. Es gibt erheblich schrägere Phänomene als bei den Vektorräumen.

Auf der anderen Seite funktioniert ein großer Teil der linearen Algebra auch in R-Moduln, so dass man lineare Algebra da studieren sollte, mit Anmerkungen, welche Sätze nur in Vektorräumen gelten. So verfährt z. B. „Algèbre“ Chapitre 2 von Nicolas Bourbaki [Bourbaki1970]

Phänomene sind beispielsweise

- Der Ring R kann nicht-kommutativ sein
- Der Ring R kann Nullteiler haben
- In einer linearen Gleichung können wir nicht einfach durch einen Koeffizienten teilen, um ihn zu 1 zu machen
- Echte Teilmengen von R, die aber ungleich dem Null-Modul $\{0\}$ sind, können R-Moduln sein
- Ein R-Modul kann stärker aufgewickelt sein als R selber (in dem Sinne, indem der Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ aufgewickelt ist.) So ist z. B. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Modul, obwohl $\mathbb{Z}$ selber gar nicht aufgewickelt ist.
- Es gibt R-Moduln, die keine Basis haben.

Da abelsche Gruppen das selbe ist wie $\mathbb{Z}$-Moduln, sind R-Moduln gleichzeitig die Verallgemeinerung von Vektorräumen und abelschen Gruppen.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien-Theorie, Ringe, Gruppen, lineare Algebra

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1%20Moduln

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1 (Höher) Kategorien - Playlist
https://www.youtube.com/playlist?list=PLqVqq9xKS5R-baIvTr9GnW0Pb8rlPig7S

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://de.wikipedia.org/wiki/Ring
https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche_Kategorie
https://de.wikipedia.org/wiki/Homologische_Algebra
https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik)
https://de.wikipedia.org/wiki/Vektorraum
https://de.wikipedia.org/wiki/Freier_Modul
https://math.stackexchange.com/questions/72723/isomorphism-of-an-endomorphism-ring-how-can-r-con

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki
1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. Moduln

1.1. **Definition.** Salopp: Ein R-Modul ist ein R-Vektorraum, wo R ein Ring mit Eins aber nicht notwendig ein Körper ist. Es können also Inverse und die Kommutativität der Multiplikation fehlen.

Definition 1.1.1. (R-Modul): Eine abelsche Gruppe M (additiv geschrieben, also mit $+$ und 0) zusammen mit einem Ring mit Eins R und einer Skalar- Multiplikation $R \times M \to M$ heißt **R-Modul**, wenn für alle $m, n \in M$ und $r, s \in R$ gilt

$$(rs)m = r(sm) \tag{1}$$

$$(r+s)m = rm + rs \tag{2}$$

$$r(m+n) = rm + rn \tag{3}$$

$$1m = m \tag{4}$$

Hier haben wir einen Links-Modul definiert. Da die Multiplikation nicht als kommutativ vorausgesetzt wird, müssen wir diese von Rechts-Moduln unterscheiden, wo wir die Skalare von rechts multiplizieren.

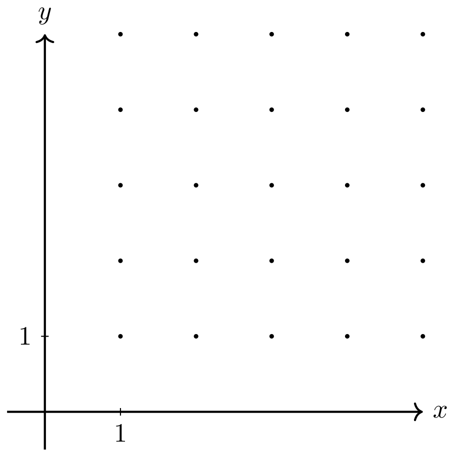
Ein wichtiges Beispiel für nicht-kommutative Ringe sind Endomorphismen-Ringe von abelschen Gruppen.

1.2. **Beispiele.**

(1) R ist selbst R-Modul
(2) $\mathbb{Z}^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul (mit Löchern)
(3) $2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (Echte Teilmenge von R)
(4) Ideal = Unter-R-Modul von R
(5) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Z}$-Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln)
(6) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (stärker aufgewickelt als R)
(7) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ als $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul (Achtung Nullteiler)
(8) Freier R-Modul
(9) Das $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ist nicht kürzbar
(10) $\mathbb{K}$-Vektorraum ist auch $\mathbb{K}$-Modul

1.2.1. *R ist selbst R-Modul.* Die Ring-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die Multiplikation eine interne ist, in dem Sinne, dass die Skalare die Elemente der additiven Gruppe selber sind.

1.2.2. *$\mathbb{Z}^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul (mit Löchern).* Auf den Achsen gibt es nur die ganzzahligen Werte.



1.2.3. *$2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (Echte Teilmenge von R).* Dies ist bei Körpern nicht möglich. Da es auch keinen Null-Körper gibt, da hier immer $0 \neq 1$ gilt, ist der einzige $\mathbb{K}$-Vektorraum in $\mathbb{K}$ der ganze Körper $\mathbb{K}$.

1.2.4. *Ideal = Unter-R-Modul von R.* Die Ideal-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die additiven Gruppe eine Teilmenge der Skalare sind.

1.2.5. *$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Z}$-Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln).* Da es für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ Werte $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ mit

$$n_x x + n_y y = 0 \tag{5}$$

gibt, bestehen hier Relationen zwischen den Elementen.

1.2.6. *$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (stärker aufgewickelt als R).* Obwohl es in $\mathbb{Z}$ keine Nullteiler gibt, gibt es im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein Element welches mit einem Skalar multipliziert Null ergibt: $2 \cdot 3 = 0$. Hier ist $2 \in \mathbb{Z}$ aber $3 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1.2.7. *$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ als $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul (Achtung Nullteiler).* Aufgrund der Nullteiler in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ haben wir $3\vec{x} + 3\vec{x} = 0$ für alle $\vec{x} \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$.

1.2.8. *Freier R-Modul.* G ist die Menge der Generatoren (entspricht in etwa einer Basis)

$$\left\{\sum_{i\in I} r_i g_i \mid I \subseteq G, I \text{ endlich}, r_i \in R, g_i \in G\right\} \tag{6}$$

in Worten: der R-Modul der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus G mit Koeffizienten aus R. Bei endlichem $G = \{0, \cdots, n-1\}$ schreiben wir dafür auch

$$R^n := R^{\{0,\cdots,n-1\}}, \tag{7}$$

in welchem Fall wir die Elemente des Moduls als Tupel schreiben: $(r_0, r_1, r_2) \in R^3$.

Hier kann $R^2 \cong R$ gelten. D. h. Begriffe wie Basis und Dimension stehen nicht oder zumindest zunächst nicht oder nicht so einfach zur Verfügung. So bei den Endomorphismen-Ringen. TODO: Beweis.

1.2.9. *Das $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ist nicht kürzbar.* Wir haben

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \tag{8}$$

und gleichzeitig

$$4 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Das heißt, in diesem $\mathbb{Z}$-Modul gilt im allgemeinen nicht

$$4\vec{x} = 4\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}, \tag{10}$$

obwohl das entsprechende innerhalb von $\mathbb{Z}$ gilt.

1.2.10. $\mathbb{K}$-*Vektorraum ist auch* $\mathbb{K}$-*Modul.* Da ein Körper unter anderem auch ein kommutativer Ring mit Eins ist, sind Vektorräume automatisch auch Moduln. Da abelsche Gruppen das gleiche wie $\mathbb{Z}$-Moduln sind, sind Moduln die gleichzeitige Verallgemeinerung von Vektorräumen und abelschen Gruppen.

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)

[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	ein kommutativer Ring mit Eins
$n\mathbb{Z}$	das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente des Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren