(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.2.1.4 Zwei universelle sind isomorph

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Ein universeller Morphismus ist ein End-Objekt in der entsprechenden Komma-Kategorie. End-Objekte einer Komma-Kategorie sind isomorph und es gibt zwischen je zwei End-Objekten nur genau einen Isomorphismus. Wir sagen:

End-Objekte sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.

Also sind zwei universelle Morphismen, vom selben Funktor zum selben Objekt, isomorph. Sie sind isomorph in der Komma-Kategorie. D. h. der Isomorphismus ergänzt die beiden Epsilons zu einem kommutativen Dreieck. Wir sagen der Isomorphismus ist kompatibel mit den Epsilons, oder auch, er vertauscht mit ihnen.

Die Objekte der beiden universelle Morphismen sind damit auch in der Ausgangskategorie isomorph, und es gibt nur einen Isomorphismus, der mit den Epsilons vertauscht.

Da sich das kartesische Produkt als universeller Morphismus entpuppt hatte, wissen wir somit, dass alle möglichen Kandidaten für das Produkt isomorph sind, und dass es zwischen zwei nur einen Isomorphismus gibt, der mit den Projektionen vertauscht.

Ein Objekt eines universellen Morphismus kann keinen nicht-trivialen Automorphismen haben, die mit den Epslions vertauschen.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien, Funktoren, Komma-Kategorie, universeller Morphismus, Anfangs- und End-Objekte

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.2.1.4%20Zwei%20universelle%20sind%20isomorph

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.2.1.3 (Höher) Kategorien - Universeller Morphismus ist End-Objekt der Komma-Kategorie
https://youtu.be/RTyECp6XogQ
v5.0.1.2.1.1 (Höher) Kategorien - Universeller Morphismus
https://youtu.be/ohhW50YFyYY

v5.0.1.1.6 (Höher) Kategorien - Kommakategorien
https://youtu.be/9NG173KqPTI

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property#Connection_with_comma_categories
https://en.wikipedia.org/wiki/Comma_category
https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:
„Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Ausführlich:
„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“
Francis Borceux 2008 Cambridge University Press
978-0521061193 (ISBN)

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.2.1.4 Zwei universelle sind isomorph

(Noch nicht begonnen ...)

1.1. Ideen.

•

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
[Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α