(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.5.1 Direkte Summe vs Summe

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Neben der kategorisch definierten Summe als Kolimit (direkte Summe genannt) können wir im Falle zweier Unter-Moduln eines Moduls eine Summe der beiden auch als Menge aller Summen von je einem Element aus dem einen und einem aus dem anderen definieren. Dann erhalten wir ein neues Unter-Modul des Ausgangsmoduls. Wir bleiben also innerhalb des Moduls.

Bei zwei Unter-Moduln können wir die kategorische/direkte und die innere Summe bilden.

Wir nennen die innere Summe eine innere direkte Summe, wenn jedes Element der Summe sich in nur einer Weise als Summe der Ausgangs-Moduln schreiben lässt. In dem Fall ist die innere direkte Summe auch isomorph zur direkten Summe. Sie ist aber nie gleich.

Mit der Schreibweise des Gleich drücken wir (etwas komisch) aus, dass diese Eindeutigkeit gegeben ist.

Aus der Isomorphie einer inneren Summe von zwei Unter-Moduln zu deren direkten Summe folgt allerdings noch nicht, dass es eine innere direkte Summe ist. Letzteres ist also ein stärkeres Kriterium.

Das Konzept der innere direkte Summe wird oft dann verwendet, wenn diese Summe gleich dem ganzen Ausgangsmodul ist. Wir nennen dann die Summanden „direkte Summanden".

Wir definieren „S ist direkter Summand von M" als: es gibt einen weiteren Unter-Modul T von M, sodass M direkte Summe von S und T ist. Wir schreiben dann $M = S \oplus T$.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1.3 (Höher) Homologische Algebra - Additiver Funktor Hom
`https://youtu.be/Xog_6hrbmx0`

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null
`https://youtu.be/n4-qZJK_sH0`
v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln
`https://youtu.be/JY43_07kNmA`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://ncatlab.org/nlab/show/additive+category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_category`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Produkt_und_Koprodukt`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Biproduct`
`https://ncatlab.org/nlab/show/biproduct`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Anfangsobjekt,_Endobjekt_und_Nullobjekt`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra"
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra"
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra`

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki
1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter uups

1. v5.1.1.1.5.1 Direkte Summe vs Summe

1.1. **Axiome.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann benennen wir folgende Liste von 6 Axiomen (AK steht für Ab, additive, oder abelsche Kategorie):

- **AK1:** $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist ablesche Gruppe
- **AK2:** $(f + f')g = fg + f'g$ und $g(f + f') = gf + gf'$
- **AK3:** $\exists$ Null-Objekt
- **AK4:** $\exists$ endliche Ko/Produkte
- **AK5:** Jeder Hom hat Ko/Kern
- **AK6:** $\mathcal{C}$ ist ko/normal (mono=Kern,epi=Kokern)

Eine Kategorie nennen wir **Ab**-Kategorie, wenn sie AK1 und AK2 erfüllt. Wir nennen sie **additiv**, wenn sie zusätzlich AK3 und AK4 erfüllt. Schließlich nennen wir sie **abelsch**, wenn sie alle 6 Axiome erfüllt.

Wir wissen bereits, dass R-Mod eine **Ab**-Kategorie ist (siehe v5.1.1.1.3 (Höher) Homologische Algebra - Additiver Funktor Hom).

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\operatorname{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R-Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul