(Bachelor) Anfang

v3.0.2.0.3 Relationen und Funktionen - Leere Funktion

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Relationen und Funktionen passen gut zu leeren Mengen.

Eine Relation zwischen zwei Mengen ist definiert als Teilmenge des kartesischen Produktes dieser beiden Mengen. So wie das Produkt selber eine seiner Teilmengen und damit eine Relation ist, so ist auch die leere Menge eine Teilmenge und damit eine Relation. Die leere Relation oder Null-Relation.

Intuitiv handelt es sich dann um eine Eigenschaft zwischen den Elementen, die nicht eintritt. Denken wir uns die Relation „ist zusammen mit“ als Relation über einer Menge von Menschen. So ist es völlig normal, dass bei der einen oder anderen Menge diese Relation von keinem Paar erfüllt wird, die Relation also leer ist.

Ein mathematisches Beispiel ist die Relation „ist echt größer und echt kleiner“ über den natürlichen Zahlen.

Wenn eine der beiden Ausgangsmengen leer ist, ist auch das Produkt leer. Dann gibt es nur eine einzige Teilmenge des Produktes, nämlich die leere Menge selber. Ist dies eine Relation: ja. Kann es eine Funktion sein? Vorsicht!

Also: ist X oder Y leer, so existiert zwar z.B. die Relation $x < y$, aber es gibt keine Paare (x, y) in ihr, die sie erfüllen. Die Relation existiert, ist aber leer.

Kann eine Null-Relation eine Funktion sein? Funktionen sind Relationen, bei denen es für alle Elemente der linken Seite ein Element der rechten Seite gibt. Eine Funktion kann nicht leer sein, wenn es auf der linken Seite Elemente gibt.

Zusammen: Es gibt keine Funktion einer nicht-leeren in die leere Menge.

Wenn die linke Seite leer ist, gibt es aber genau eine Funktion, egal ob die rechte leer ist oder nicht: die leere Funktion.

Denn $\forall x \in X \exists ! y \in Y : xFy$ ist wahr, sobald X leer ist.

Denn $\forall x \phi(x)$ ist wahr, sobald X leer ist. Wir sagen es ist eine leere Wahrheit.

Das liegt daran, dass es äquivalent zu $x \in X \Rightarrow \phi(x)$ ist und eine Implikation immer wahr ist, wenn die Annahme falsch ist.

Sei M eine Menge ganzer Zahlen. Sei G die Teilmenge der geraden Zahlen in M. Sei $f : G \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto x/2$, die Funktion, die jeder dieser geraden Zahlen ihre Hälfte zuordnet. Das macht eben alles auch dann Sinn, wenn G leer ist. Dann wird halt keiner Zahl die Hälfte zugeordnet.

Sei nun $N := \{1, 2, 3\}$. Jetzt suchen wir eine Funktion, die jeder Zahl aus N ein Element aus G zuordnet. Das geht nicht, falls G leer ist.

Sei nun $N := \varnothing$ und G ebenfalls leer. Dann können wir jedem n aus N ein Element aus G zuordnen.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Relation, Funktion, injektiv, surjektiv, bijektiv.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v3%20Bachelor/v3.0%20Anfang/v3.0.2.0.2%20Relationen%20und%20Funktionen%20-%20Geometrisches%20Bild`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:
v3.0.2.0.1 (Bachelor) Relationen und Funktionen - Surjektiv, injektiv, bijektiv
`https://youtu.be/8YFNEWZBpWc`
v3.0.2 (Bachelor) Relationen und Funktionen
`https://youtu.be/qjhNZXFAYEM`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)`
`https://jcsites.juniata.edu/faculty/rhodes/ida/relations.html`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Grundwissen Mathematikstudium“
Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel
2022
Springer-Verlag
978-3-662-63312-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/56427740-9783662633120-grundwissen-mathematikstudium

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter huhu

1. Geometrisches Bild von Relationen und Funktionen

Zur Förderung der Intuition und um verschiedene Aspekte von Relationen und damit auch Funktionen zu visualisieren, stellen wir diese hier graphisch in drei Weisen dar. Die Nummern beziehen sich auf die händischen Skizzen auf den beiden eingefügten Bildern.

Literatur

[ArensBusamHettlichKarpfingerStachel2022] Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel, *Grundwissen Mathematikstudium*, Springer, 978-3-662-63312-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$X, Y, \cdots$	Mengen
$x, y, \cdots$	Elemente
R	Eine Relation