

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.5.2 R-Mod hat Kern und Kokern

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2025 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Wir können bei R -Modulen den Kern und den Kokern ganz „normal“ wie bei Gruppen und Vektorräumen als Urbild der 0 bzw. dem Quotient durch das Bild definieren. Wie dort müssen wir dann nachweisen, dass es sich wieder um R -Moduln handelt.

Damit wir die Kategorien der R -Moduln aber als abelsch sehen können, müssen alle Morphismen einen Kern und Kokern im kategorischen Sinne haben. Hier werden diese Begriffe mit rein kategorischen Mitteln definiert und können somit auf alle Kategorien mit Null-Objekt angewandt werden.

Wir zeigen hier, dass die „traditionellen“ Definition zu den über Egalisator und Koegalisateur Kernen und Kokernen führen.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.5.2%20R-Mod%20hat%20Kern%20und%20Kokern>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1.2 (Höher) Kategorien - Abelsche - Kern, Kokern
<https://youtu.be/0et-arXLe0g>

v5.1.1.1.5 (Höher) Homologische Algebra - R-Mod ist additiv
<https://youtu.be/aASa0qcjPgQ>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Kern_\(Algebra\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Kern_(Algebra))
<https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzkern>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzkokern>
<https://de.wikipedia.org/wiki/Modulhomomorphismus>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `uups`

1. v5.1.1.1.5.2 R-MOD HAT KERN UND KOKERN

1.1. ???

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R -Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul