2024-07-21 Einen gerichteten Graphen, auch Digraph (directed graph) genannt, können wir wie folgt definieren:

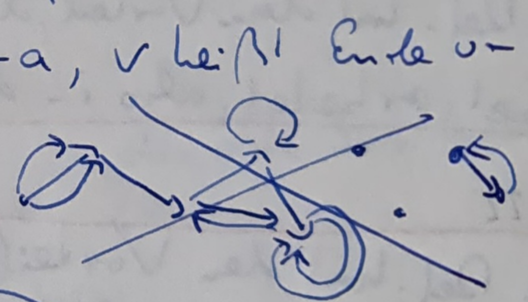
Def.: Ein gerichteter Graph ist eine Endo-Relation

Packen wir diese Def. aus:

- Eine Endo-Rel. über eine Menge V ist $A: V — V$, also (V, A), wo $A \subseteq V \times V$.
- Ein Graph ist also eine Menge V, die wir Punkte nennen (Vertex), und eine Rel. der Punkte mit sich selbst, also eine Teilmenge von $V \times V$, also eine Menge von Paaren (u,v) mit $u,v \in V$.
- Ein Graph ist eine Menge von Punkten, V zusammen mit einer Menge von ~~Kant~~, Pfeilen (Bögen), A.

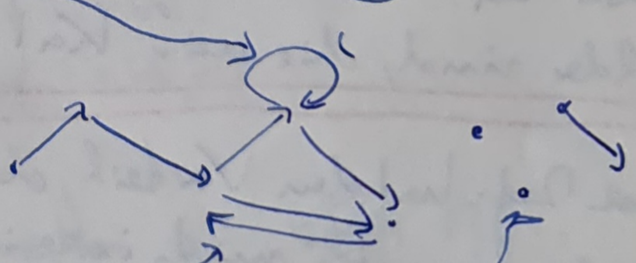
  (Paare von Punkten)

Def: Sei $G = (V, A)$ ein Graph. Sei $a = (u,v) \in A$. u heißt der Beginn von a, v heißt Ende von a.



Ein Graph sieht so aus:

- Schleifen (loop) sind erlaubt: $(v,v) \in A$.
- Hin und her geht: $(v,u) \in A \lor (u,v) \in A$
- Isolierte Punkte geht: $\forall x: (v,x) \notin A \land (x,v) \notin A$.



2024-07-21 Bei dieser Definition gibt es allerdings keine parallelen: $\circ \rightrightarrows \circ$, da zwei $(u,v) \in A$ nicht gehen?

- Bei Kategorien gibt es parallele Pfeile, z.B. in Set, wo es viele Funktionen $X \to Y$ geben kann.
- Wir modellieren anders:
  - Die Pfeile sind nicht Paare, sondern eigenständige Objekte:

- Ein Graph (genauer Multidigraph) ~~ist~~ besteht aus einer Menge von Punkten (Vertex) V und einer Menge von Pfeilen (Arrow) A und zwei Funktionen ~~...~~ $b, e : A \to V$, die Beginn und End heißen.

- Unsere Digraphen von eben in Multidigraph mit
  $b = p_1$, $e = p_2$ die Projektionen

$$b : V \times V \to V \qquad e : \longmapsto$$

$$(u,v) \longmapsto u \qquad (u,v) \longmapsto v$$

Diese Def. hat den Vorteil, daß sie mit Morphismen in Set arbeitet, also in der Kat.-Theorie bleibt.

2024-07-22

Diese Def. hat den Vorteil, daß Multidigraphen die Bilder sind, die wir [in] Kat-Theorie malen.

Diese Def. hat den Vorteil, daß Multidigraphen viele Situationen modellieren, die mich interessieren: Informationsfluss, Kausalität, mehrere (teilweise nicht-homotope) Wege von X nach Y, Zusammenhänge zwischen Seelen, ... Und eben den Graph einer Kat.
Underlying graph.

2024-07-22 Betrachte nun die Kat. mit den zwei Objekten v und a, und den beiden Mor.

$$\mathcal{G} = \left(v \bullet \overset{b}{\underset{e}{\rightrightarrows}} \bullet a \right)$$

Sei F ein (kontravarianter) Funktor $F : \mathcal{G}^{op} \longrightarrow Set$,

also eine Prägarbe über $\mathcal{G}$.

Das Bild von F besteht aus zwei Mengen und zwei Mor. in umgekehrter Richtung:

$$F(a) \overset{F(b)}{\underset{F(e)}{\rightrightarrows}} F(v) \qquad \rightsquigarrow$$

Eine Prägarbe über $\bullet \rightrightarrows \bullet$ ist ein Multidigraph!

Da wir zu jedem MDG einen entsprechenden Funktor konstruieren können:

(Prägarbe über $\bullet \rightrightarrows \bullet$) = (Multidigraph).

Schauen wir uns nun die Kat. an:

Ein Multidigraph-Homomorphismus f hat zwei Funktionen

$$f : A_1 \longrightarrow A_2$$
$$f : V_1 \rightarrow V_2 ,$$

die die Inzidenz-Rel. erhält:

$$b(f(x)) = f(b(x))$$
$$e(f(x)) = f(e(x))$$

f vertauscht mit der Struktur von ~~[illegible]~~ MDs.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

kommutieren.

2024-07-22

Nat. u- $Set^{\mathcal{G}^{op}}$: $F_1 \to F_2$

$$\begin{tikzcd}
F_1(a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "F_1(b)"] & F_2(a) \arrow[d, "F_2(b)"] \\
F_1(v) \arrow[r, "\varphi"] & F_2(v)
\end{tikzcd}$$

Wir sehen

Multidigraph-Homomorphismen = $\cancel{Set}^{(\cdot \rightrightarrows \cdot)^{op}}$ -Nat.

$\boxed{\text{Die Kat der Multidigraphen } \underline{\text{ist}} \text{ Kat der Prägarben über } \cdot \rightrightarrows \cdot}$

$\Longrightarrow$ MDG's haben alle Eigenschaften, die wir in Zukunft über Prägarben zeigen werden!

$\Longrightarrow$ Dies ist zumindest ein Hinweis darauf, daß "Multidigraphen" die "richtige" Wahl für die Def. v. Graphen sind.