

(Höhere Grundlagen) Kategorien

## **v5.0.1.2.1.5 Universelles Element**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2025 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Bei der Definition von kouniversellen Morphismen von einem Objekt nach einem Funktor reden wir permanent von Morphismen von diesem Objekt nach Bildern von Objekten unter diesem Funktor.

Dies motiviert die Sichtweise, die Mengen von Morphismen von diesem Objekt nach Bildern von Objekten unter diesem Funktor zu betrachten. Und weiter den dadurch entstehenden Funktor, der den Hom-Funktor mit dem gewählten Funktor verknüpft.

Die beteiligten Morphismen sind dann Elemente der entsprechenden Hom-Mengen. Die Bedingung an universelle Morphismen können in der Sprache von Elementen formuliert werden. Destillieren wir daraus die Bedingung an Elemente, erhalten wir die Definition von universellen Elementen.

Es stellt sich heraus, dass die beiden Konzepte universelles Element und kouniverseller Morphismus auseinander hergeleitet werden können.

**Präsentiert.** Von Jörg Kunze

**Voraussetzungen.** Kategorien, Funktoren, Komma-Kategorie, universeller Morphismus, Anfangs- und End-Objekte, Hom-Funktoren

**Text.** Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.2.1.3 (Höher) Kategorien - Universeller Morphismus ist End-Objekt der Komma-Kategorie

<https://youtu.be/RTyECp6XogQ>

v5.0.1.2.1.1 (Höher) Kategorien - Universeller Morphismus

<https://youtu.be/ohhW50YFyYY>

v5.0.1.1.6 (Höher) Kategorien - Kommakategorien

<https://youtu.be/9NG173KqPTI>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Universal\\_property#Connection\\_with\\_comma\\_categories](https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property#Connection_with_comma_categories)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Comma\\_category](https://en.wikipedia.org/wiki/Comma_category)

<https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category>

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:

„Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Ausführlich:

„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“

Francis Borceux 2008 Cambridge University Press

978-0521061193 (ISBN)

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGEND EINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

**Das Video.** Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

## 1. v5.0.1.2.1.5 UNIVERSELLES ELEMENT

(Noch nicht begonnen ...)

### 1.1. Ideen.

•

## LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awodey, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

## SYMBOLVERZEICHNIS

•	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \dots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \dots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
<b>Set</b>	Die Kategorie der kleinen Mengen
<b>Ab</b>	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von $X$ nach $Y$
$\alpha, \beta, \dots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\text{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
$U, U', U''$	Universen
$V_\alpha$	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl $\alpha$