

(Höhere Grundlagen) Kategorien

## **v5.0.1.1.5 Die Kategorie der Kategorien**

**Kategory GmbH & Co. KG**

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

## BESCHREIBUNG

**Inhalt.** Die Kategorie der kleinen Kategorien **Cat** besteht, wie wir schon wissen aus kleinen Kategorien als Objekte und Funktoren als Morphismen.

Diese Morphismen als Objekte mit den natürlichen Transformationen als Morphismen ist selber wieder eine Kategorie. Hier haben wir Identitäten und Verknüpfungen von natürlichen Transformationen.

Es gibt eine weitere Struktur in **Cat**: wir definieren eine andere Art der Verknüpfung von natürlichen Transformationen, die eine Kategorie mit den kleinen Kategorien als Objekte und den natürlichen Transformationen als Morphismen erzeugt.

Das heißt natürliche Transformationen wirken sowohl auf die Objekte von **Cat** als auch auf die Morphismen von **Cat**.

Darüber hinaus sind diese beiden Strukturen in der Hinsicht verträglich, dass sie über die selben Identitäten verfügen und dass die beiden in einer bestimmten Weise vertauschbar sind.

Die natürlichen Transformationen sind damit die Morphismen von zwei Kategorien: einmal mit den Funktoren und ein anderes Mal mit den Kategorien als Objekte.

Dies macht **Cat** zu einer 2-Kategorie mit natürlichen Transformationen als 2-Morphismen.

Dies erlaubt uns einen ersten flüchtigen Blick auf 2-Kategorien.

**Präsentiert.** Von Jörg Kunze

**Voraussetzungen.** Natürliche Transformation, kleine Kategorien, Produkt von Kategorien, Funktorkategorien, kommutative Quadrate

**Text.** Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.5%20Die%20Kategorie%20der%20Kategorien>

**Meine Videos.** Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen

<https://youtu.be/IN7Qa-Sw1D0>

v5.0.1.0.7 (Höher) Kategorien - Große Kategorien

<https://youtu.be/Dcz6at6EXqM>

v5.0.1.1.3 (Höher) Kategorien - Produkte von Kategorien

<https://youtu.be/9K4qY5ZEoq8>

v5.0.1.1.4 (Höher) Kategorien - Funktorkategorien

<https://youtu.be/byvbGxRz1hs>

v5.0.1.1.4.1 (Höher) Kategorien - Kommutative Quadrate

<https://youtu.be/ptnE4UzfZ68>

**Quellen.** Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Category\\_of\\_small\\_categories](https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories)

<https://ncatlab.org/nlab/show/Cat>

<https://ncatlab.org/nlab/show/horizontal+composition>

<https://ncatlab.org/nlab/show/exchange+law>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Category\\_of\\_small\\_categories](https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories)

<https://ncatlab.org/nlab/show/Cat>

**Buch.** Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

**Lizenz.** Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGEND EINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

**Das Video.** Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

## 1. v5.0.1.1.5 DIE KATEGORIE DER KATEGORIEN

### 1.1. Die Kategorie der Kategorien. Material is still on paper only :-(

#### LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awodey, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

## SYMBOLVERZEICHNIS

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \dots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \dots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
<b>Set</b>	Die Kategorie der kleinen Mengen
<b>Ab</b>	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von $X$ nach $Y$
$\alpha, \beta, \dots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\text{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
$U, U', U''$	Universen
$V_\alpha$	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl $\alpha$