

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.8 Hom-Mengen

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Wenn die Hom-Klassen zwischen je zwei Objekten einer Kategorie relativ zum gewählten Universum klein sind, leben diese Hom-Mengen, solche sind es dann, in Wirklichkeit in einer anderen Kategorie. Nämlich in **Set**.

Wie immer denken wir dabei immer parallel an ein Grothendieck-Universum (eine Menge), oder an die Klasse aller Mengen. Im letzteren Fall sind kleine Klassen das selbe wie Mengen.

Strukturen, die es in **Set** gibt, sind dann auch auf dem Hom-Mengen relevant. So ist in dem Fall die Komposition eine Funktion auf dem cartesischen Produkt von Hom-Mengen.

Im Falle von **Ab**, \mathbb{K} -Vektorräumen oder allgemeiner R -Moduln sind die Hom-Mengen sogar abelsche Gruppen. Falls die Komposition mit der Addition verträglich ist, im Sinne dass das Rechts- und Links-Distributivgesetz gelten, sprechen wir von **Ab**-Kategorien.

Die „richtigen“ Funktoren zwischen **Ab**-Kategorien sind additive Funktoren.

Mit **Set**- und **Ab**-Kategorien erhaschen wir einen ersten Blick auf das abgefahrene Konzept der angereicherten Kategorien.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Homomorphismus, Universum, kleine Mengen, Funktoren

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.8%20Hom-Mengen>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.1 (Höher) Kategorien - Axiome für Kategorien
<https://youtu.be/X8v5Kyly0KI>

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
<https://youtu.be/sIaKt-Wxlog>

v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen
<https://youtu.be/v1F5BFH8nbo?si=3HES4OZ5SNWP1cX6>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Hom-Funktor>
<https://ncatlab.org/nlab/show/hom-set>
<https://ncatlab.org/nlab/show/locally+small+category>
<https://ncatlab.org/nlab/show/enriched+category>
https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category
https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category#Additive_functors
<https://ncatlab.org/nlab/show/additive+functor>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane

1998 | 2nd ed. 1978

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009 Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel

2009 Cambridge University Press

978-0-521-71916-2 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. HOM-MENGEN

1.1. Lokal kleine Kategorien. Wir wählen ein Grothendieck-Universum oder die Klasse aller Mengen als Universum.

Eine Klasse heißt klein, falls sie Element unseres gewählten Universums ist.

Sei eine Kategorie \mathcal{C} gegeben.

Falls die Klassen $\text{Hom}(X, Y)$ klein sind, sind sie Objekte der Kategorie **Set**, also der Kategorie der kleinen Mengen.

Eine solche Kategorie heißt **lokal klein**. Die Klasse der Objekte oder die aller Morphismen muss dazu nicht klein sein. Es muss also nicht kann aber eine kleine Kategorie sein.

In diesem Kurs ist eine Kategorie **groß**, wenn die Objekte und die Hom-Mengen klein sind. Die Objekte selber sind klein, nicht die Klasse aller Objekte. D. h. bei uns sind große Kategorien immer lokal klein. Damit sind **Set**, **Ab**, **Gruppe** und **Top** Beispiele für lokal kleine Kategorien.

Damit haben wir den Fall einer Kategorie \mathcal{C} , deren Hom's Objekte in einer anderen Kategorie \mathcal{V} sind. Wenn noch ein paar strukturelle Bedingungen erfüllt sind (,auf die wir hier nicht eingehen und was bei **Set** der Fall ist), sagen wir \mathcal{C} ist eine \mathcal{V} -angereicherte Kategorie oder kürzer \mathcal{V} -Kategorie.

Set hat als Kategorie und darüber hinaus Strukturen. Z. B. das cartesische Produkt $X \times Y$.

Die Verknüpfung von Morphismen in \mathcal{C} induziert damit Funktionen

$$(1) \quad \circ: \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z).$$

1.2. Kategorien der R -Moduln. Im Falle der Kategorien der \mathbb{K} -Vektorräume oder in \mathbf{Ab} , der Kategorie der abelschen Gruppen (dies sind Spezialfälle der Kategorien der R -Moduln, wo R ein Ring mit 1 ist), können wir auf den Hom-Mengen die Struktur einer abelschen Gruppe definieren. Seien $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$.

$$(2) \quad (f + g)(x) := f(x) +_Y g(x)$$

$$(3) \quad (-f)(x) := -_Y f(x)$$

$$(4) \quad 0(x) := 0_Y$$

Wir sagen, das Addition, Inverses und Einselement komponentenweise definiert werden.

Damit leben in diesen Fällen die Hom-Mengen in Wirklichkeit in \mathbf{Ab} .

Die induzierten $\circ: \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ sind dann Gruppen-Homomorphismen.

Hier haben wir auch noch die zusätzliche Struktur eines Tensorproduktes, und da die Verknüpfung bilinear ist, induziert sie auch Gruppen-Homomorphismen $\circ: \text{Hom}(Y, Z) \otimes \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$.

Da auch hier die oben erwähnten ominösen Bedingungen erfüllt sind, handelt es sich hier um **Ab-Kategorien**, also um **Ab** angereicherte Kategorien.

1.3. Ab-Kategorien. „**Ab-Kategorie**“ ist ein von der Kategorie der abelschen Gruppe (**Ab**) auf der einen Seite und von „abelsche Kategorie“ andererseits zu unterscheidender Begriff. Der Name kommt von allgemeiner \mathcal{V} -Kategorie und bedeutet, dass die Kategorie über **Ab** angereichert ist. Darauf gehen wir aber hier nicht tiefer ein.

Ein andere Name für **Ab-Kategorie** ist **präadditive** Kategorie.

Definition 1.3.1. (Ab-Kategorie): Eine Kategorie \mathcal{C} ist eine **Ab-Kategorie**, wenn alle $\text{Hom}(X, Y)$ klein sind und auf ihnen eine Verknüpfung $+$ definiert ist, die diese zu (kleinen) abelschen Gruppen macht, so dass zusätzlich die Addition und die Verknüpfung verträglich im folgenden Sinne sind: es gelten das linke und rechte Distributivgesetz

$$(5) \quad f(g + h) = fg + fh$$

$$(6) \quad (g + h)f = gf + hf.$$

Wir sagen, die Komposition von Morphismen ist **biadditiv**.

Damit fühlt sich eine **Ab-Kategorie** so bisschen wie ein Ring an, bei dem wir nicht beliebig addieren und multiplizieren können. Oder anders ausgedrückt: „**Ab-Kategorie**“ ist eine Verallgemeinerung von „Ring“ in dem Sinne, in dem „Kategorie“ eine Verallgemeinerung von „Monoid“ ist.

Die „richtigen“ Funktoren zwischen **Ab-Kategorien** sind solche, die die additive Struktur respektieren.

Definition 1.3.2. (Additiver Funktor): Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} zwei additive Kategorien. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **additiv**, falls für alle parallel Morphismen (die beiden haben die selben Quell- und Ziel-Objekte) f, g gilt:

$$(7) \quad F(f + g) = F(f) + F(g).$$

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awodey, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

$P(x)$	ein Prädikat
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
F, G	Funktoren
V, V'	Vergiss-Funktoren
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op}	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
Ring, Gruppe	Kategorie der kleinen Ringe und der kleinen Gruppen
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α