(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.5.4 R-Mod ist abelsch

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Damit sich uns die Kategorie der R-Moduln als abelsch erweist, müssen wir noch das Axiom AK6 zeigen: Die Kategorie ist normal. D.h. alle Epi's und alle Mono's sind normal. D.h. jeder Epi ist ein Kokern und jeder Mono ist ein Kern.

Umgekehrt gilt das übrigens immer: jeder Kern ist Mono und jeder Kokern Epi.

Zum Beweis nutzen wir die in R-Mod vorhandene (E, M)-Faktorisierung (Epi-Mono-Faktorisierung): Jeder Morphismus f lässt sich als $f = me$ schreiben. Bei R-Mod ist das Objekt zwischen e und m genau das Bild des Homomorphismuses.

Für dieses Bild gilt: Bild = Ker Koker = Koker Ker.

Damit beweisen wir schließlich das jeder Mono und jeder Epi normal ist.

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1.2 (Höher) Kategorien - Abelsche - Kern, Kokern
`https://youtu.be/Oet-arXLeOg`

v5.1.1.1.4 (Höher) Homologische Algebra - Unter-Moduln
`https://youtu.be/4g2TgQx7JkI`

v5.1.1.1.4.5 (Höher) Homologische Algebra - Quotienten-Moduln
`https://youtu.be/IomDICJyHdI`

v5.1.1.1.5 (Höher) Homologische Algebra - R-Mod ist additiv
`https://youtu.be/aASaOqcjPgQ`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Abelsche_Kategorie`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_morphism`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_modules`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra`

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki
1980

Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

1. v5.1.1.1.5.4 R-Mod ist abelsch

1.1. ???

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)

[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R-Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul