

(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.8 Quotienten-Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. In der Mathematik ist eine Quotientenkategorie eine Kategorie, die aus einer anderen Kategorie durch Identifizierung von Morphismen gewonnen wird. Formal handelt es sich um ein Quotientenobjekt in der Kategorie der (lokal kleinen) Kategorien, analog zu einer Quotientengruppe oder einem Quotientenraum, jedoch im kategorialen Kontext.

Bei der hier gegebenen Variante einer Definition eines Quotienten, werden immer nur Morphismen identifiziert, niemals aber Objekte.

Wie bei Quotienten von Strukturen üblich, muss die zu Grunde liegende Äquivalenzrelation mit der Struktur verträglich sein. Bourbaki sagt: La composition est compatible avec la relation d'équivalence. Sehen wir eine Kategorie als Struktur mit Elementen (die Morphismen) mit nur partieller Verknüpfung, ist das die übliche Konstruktion des Quotienten wie bei Gruppen und Co.

Zum Quotienten gehört neben der Quotienten-Kategorie selber auch die Projektion von der Ursprungs-Kategorie in den Quotienten. Dies ist, wie gewünscht, ein Kategorien-Homomorphismus, also ein Funktor.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien, freie Kategorien, Funktoren

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6her%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.8%20Quotienten-Kategorien>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.1.5 (Höher) Kategorien - Die Kategorie der Kategorien
<https://youtu.be/5lov2GMpKRI>

v5.0.1.1.7 (Höher) Kategorien - Graphen und freie Kategorien
<https://youtu.be/akb7aRprDTM>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://en.wikipedia.org/wiki/Quotient_category
<https://ncatlab.org/nlab/show/quotient+category>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
 „Categories for the Working Mathematician“

Saunders Mac Lane
 1998 | 2nd ed. 1978
 Springer-Verlag New York Inc.
 978-0-387-98403-2 (ISBN)

<https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038>

Gut für die kategorische Sichtweise ist:

„Topology, A Categorical Approach“

Tai-Danae Bradley
 2020 MIT Press
 978-0-262-53935-7 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology>

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman
 2009 Springer-Verlag New York Inc.
 978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:

„Category Theory“

Steve Awodey

2010 Oxford University Press

978-0-19-923718-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory>

Ausführlich:

„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“

Francis Borceux 2008 Cambridge University Press

978-0521061193 (ISBN)

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGEND EINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.8 QUOTIENTEN-KATEGORIEN

1.1. Ideen.

- Nur Morphismen, Objekte werden nie identifiziert
- Kategorie als Elemente (Morphismen) mit nur partieller Verknüpfung. Dann Quotient wie bei Gruppen und Co.
- Übliche Gemälde können als freie Kategorie plus Relationen realisiert werden

LITERATUR

- [Awodey2010] Steve Awodey, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
- [Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
- [LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)
- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

•	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
A, B, C, \dots, X, Y, Z	Objekte
f, g, h, r, s, \dots	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$	Kategorien
\mathcal{P}	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\text{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
α, β, \dots	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
\mathcal{C}^{op} oder \mathcal{C}^*	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α