(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.5 Mono Epi Null

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Monomorphismen und Epimorphismen sind die kategorialen Verallgemeinerungen von Injektionen und Surjektionen. Bei diesen Verallgemeinerungen betrachten wir keine Elemente. Stattdessen nutzen wir andere Eigenschaften: nämlich die Kürzbarkeit. Monomorphismen sind links-kürzbare, Epimorphismen rechts-kürzbare Homomorphismen.

Die stärkere Eigenschaft der Existenz von einseitigen Inversen hätten wir auch nehmen können. Morphismen mit Links-Inversen heißen Koretraktion oder Schnitt (englisch split mono) und sind immer mono. Die mit Rechts-Inversen heißen Retraktion (englisch split epi) und sind immer epi.

in Ab ist Z→Q ist mono aber kein Schnitt. Es ist gleichzeitig epi aber nicht surjektiv.

Ein Objekt heißt Anfangs-Objekt oder initial, falls es zu jedem Objekt der Kategorie genau einen Morphismus von dem Objekt gibt. Genauso heißt ein Objekt End-Objekt oder terminal, falls es von jedem Objekt der Kategorie genau einen Morphismus zu dem Objekt gibt.

Ein Objekt, welches zugleich Anfangs- und End-Objekt ist heißt Null-Objekt.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorie, Funktor, natürliche Transformation, Isomorphismus

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.4.4.8%20%C3%84quivalenz%20von%20Kategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.6.1 (Höher) Kategorien - Abelsche - Nullobjekt
`https://youtu.be/XbOf-nVZ1t0`

v5.0.1.6.1.4 (Höher) Kategorien - Abelsche - Additiver Funktor
`https://youtu.be/zSP_a2RvoYE`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Monomorphismus`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Epimorphismus`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Retraktion_und_Koretraktion`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley

2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology`

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory`

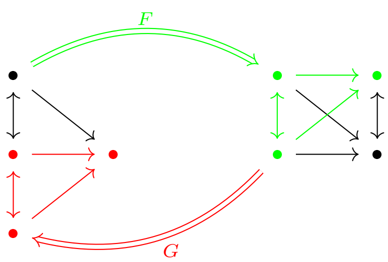
Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics`

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `huch!`

1. Äquivalente Kategorien

1.1. Ein endliches Beispiel.

(1)



1.2. Definition der Äquivalenz von Kategorien.

Definition 1.2.1. (Äquivalenz von Kategorien): Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heißen **äquivalent**, wenn es zwei Funktoren

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \tag{2}$$
$$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \tag{3}$$

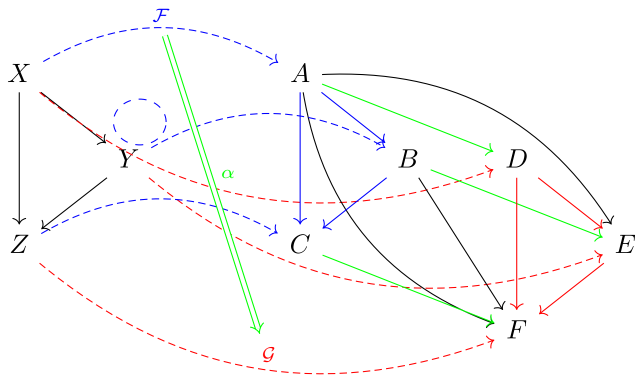
und zwei natürliche Isomorphismen

$$\alpha : FG \to 1_{\mathcal{C}} \tag{4}$$
$$\beta : GF \to 1_{\mathcal{D}} \tag{5}$$

gibt.

1.3. **Endo-Funktoren.**

(6)



TODO: drei Bilder: Nat zwischen 1. Funktoren 2. Endo-Funktoren 3. 1 und Endo-Funktor

1.4. **Das Skelett einer Kategorie.**

Definition 1.4.1. (Skelett einer Kategorie): Ein **Skelett** einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Unter-Kategorie bestehend aus genau einem Objekt von $\mathcal{C}$ pro Isomorphie-Klassen von Objekten und zwischen zwei Objekten im Skelett bestehen alle Homomorphismen wie in $\mathcal{C}$.

- Zu jedem Objekt in $\mathcal{C}$ gibt es genau ein zum ihm isomorphes Objekt im Skelett.
- Je zwei Objekte im Skelett sind nicht isomorph.
- Die Ausgangskategorie ist äquivalent im Sinne von [Definition 1.2.1, “Äquivalenz von Kategorien”].
- Zwei Kategorien sind genau dann äquivalent, wenn sie isomorphe Skelette besitzen.

TODO: Male in Skelett

Grundlegend ist, dass jede Kategorie ein Skelett besitzt. (Diese Aussage ist zum Auswahlaxiom für Klassen äquivalent, wie es etwa die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre bereitstellt.) Wenn auch eine Kategorie mehrere verschiedene Skelette besitzen kann, sind sie jedoch als Kategorien isomorph. Also besitzt jede Kategorie bis auf Isomorphie ein eindeutiges Skelett.

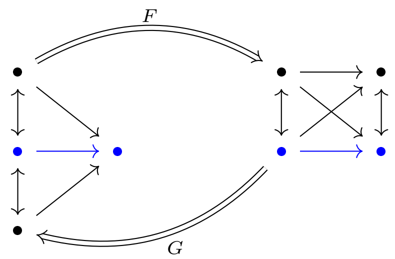
Die Bedeutung von Skeletten rührt daher, dass sie (bis auf Isomorphie) kanonische Vertreter der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenz von Kategorien sind. Das ergibt sich daraus, dass jede Kategorie zu einem Skelett äquivalent ist, und dass zwei Kategorien genau dann äquivalent sind, wenn sie isomorphe Skelette besitzen. (Die letzten beiden Absätze sind dem Wikipedia-Eintrag über Skelette entnommen.)

In der folgenden Skizze ist jeweils die Kategorie

$$\bullet \longrightarrow \bullet \tag{7}$$

als Skelett blau hervorgehoben:

(8)



Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie
Ring nach **Gruppe**	Kategorie der Ringe und der Gruppen
$\mathrm{GL}_n(R)$	Allgemeine lineare Gruppe über dem Ring R
R^*	Einheitengruppe des Rings R
Det_n^R	n-dimensionale Determinante für Matrizen mit Koeffizienten in R.