(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.2 Ring-Darstellung = Modul

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien-Theorie, Ringe, Gruppen, lineare Algebra

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1%20Moduln

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1 (Höher) Kategorien - Playlist
https://www.youtube.com/playlist?list=PLqVqq9xKS5R-baIvTr9GnW0Pb8rlPig7S

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
https://math.stackexchange.com/questions/1980543/representations-of-rings
https://de.wikipedia.org/wiki/Ganzheitsring
https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellungsring

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra

Ohne Kategorien-Theorie:
„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki

1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `https://youtu.be/JY43_07kNmA`

1. v5.1.1.1.2 Ring-Darstellung = Modul

1.1. **Definition.** Salopp: Ein R-Modul ist ein R-Vektorraum, wo R ein Ring mit Eins aber nicht notwendig ein Körper ist. Es können also Inverse und die Kommutativität der Multiplikation fehlen.

Definition 1.1.1. (R-Modul): Eine abelsche Gruppe M (additiv geschrieben, also mit + und 0) zusammen mit einem Ring mit Eins R und einer Skalar- Multiplikation $R \times M \to M$ heißt R**-Modul**, wenn für alle $m, n \in M$ und $r, s \in R$ gilt

$$(rs)m = r(sm) \tag{1}$$
$$(r+s)m = rm + rs \tag{2}$$
$$r(m+n) = rm + rn \tag{3}$$
$$1m = m \tag{4}$$

Hier haben wir einen Links-Modul definiert. Da die Multiplikation nicht als kommutativ vorausgesetzt wird, müssen wir diese von Rechts-Moduln unterscheiden, wo wir die Skalare von rechts multiplizieren.

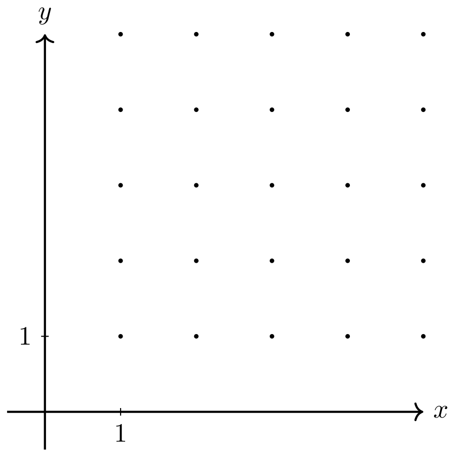
Ein wichtiges Beispiel für nicht-kommutative Ringe sind Endomorphismen-Ringe von abelschen Gruppen.

1.2. **Beispiele.**

(1) R ist selbst R-Modul
(2) $\mathbb{Z}^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul (mit Löchern)
(3) $2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (Echte Teilmenge von R)
(4) Ideal = Unter-R-Modul von R
(5) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Z}$-Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln)
(6) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul (stärker aufgewickelt als R)
(7) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ als $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul (Achtung Nullteiler)
(8) Freier R-Modul
(9) Das $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ist nicht kürzbar
(10) $\mathbb{K}$-Vektorraum ist auch $\mathbb{K}$-Modul

1.2.1. *R ist selbst R-Modul.* Die Ring-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die Multiplikation eine interne ist, in dem Sinne, dass die Skalare die Elemente der additiven Gruppe selber sind.

1.2.2. $\mathbb{Z}^2$ *als $\mathbb{Z}$-Modul (mit Löchern).* Auf den Achsen gibt es nur die ganzzahligen Werte.



1.2.3. $2\mathbb{Z}$ *als $\mathbb{Z}$-Modul (Echte Teilmenge von R).* Dies ist bei Körpern nicht möglich. Da es auch keinen Null-Körper gibt, da hier immer $0 \neq 1$ gilt, ist der einzige $\mathbb{K}$-Vektorraum in $\mathbb{K}$ der ganze Körper $\mathbb{K}$.

1.2.4. *Ideal = Unter-R-Modul von R.* Die Ideal-Axiome sind schon rein formel-technisch gleich zu den Modul-Axiomen. Nur, dass die additiven Gruppe eine Teilmenge der Skalare sind.

1.2.5. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sind $\mathbb{Z}$-Moduln (Achtung: es sind keine freien Moduln).* Da es für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ Werte $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ mit

$$n_x x + n_y y = 0 \tag{5}$$

gibt, bestehen hier Relationen zwischen den Elementen.

1.2.6. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *als $\mathbb{Z}$-Modul (stärker aufgewickelt als R).* Obwohl es in $\mathbb{Z}$ keine Nullteiler gibt, gibt es im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein Element welches mit einem Skalar multipliziert Null ergibt: $2 \cdot 3 = 0$. Hier ist $2 \in \mathbb{Z}$ aber $3 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1.2.7. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ *als $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul (Achtung Nullteiler).* Aufgrund der Nullteiler in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ haben wir $3\vec{x} + 3\vec{x} = 0$ für alle $\vec{x} \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$.

1.2.8. *Freier R-Modul.* G ist die Menge der Generatoren (entspricht in etwa einer Basis)

$$\left\{ \sum_{i \in I} r_i g_i \mid I \subseteq G, I \text{ endlich}, r_i \in R, g_i \in G \right\} \tag{6}$$

in Worten: der R-Modul der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus G mit Koeffizienten aus R. Bei endlichem $G = \{0, \cdots, n-1\}$ schreiben wir dafür auch

$$R^n := R^{\{0, \cdots, n-1\}}, \tag{7}$$

in welchem Fall wir die Elemente des Moduls als Tupel schreiben: $(r_0, r_1, r_2) \in R^3$.

Hier kann $R^2 \cong R$ gelten. D. h. Begriffe wie Basis und Dimension stehen nicht oder zumindest zunächst nicht oder nicht so einfach zur Verfügung. So bei den Endomorphismen-Ringen. TODO: Beweis.

1.2.9. *Das $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ist nicht kürzbar.* Wir haben

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \tag{8}$$

und gleichzeitig

$$4 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Das heißt, in diesem $\mathbb{Z}$-Modul gilt im allgemeinen nicht

$$4\vec{x} = 4\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}, \tag{10}$$

obwohl das entsprechende innerhalb von $\mathbb{Z}$ gilt.

1.2.10. *$\mathbb{K}$-Vektorraum ist auch $\mathbb{K}$-Modul.* Da ein Körper unter anderem auch ein kommutativer Ring mit Eins ist, sind Vektorräume automatisch auch Moduln. Da abelsche Gruppen das gleiche wie $\mathbb{Z}$-Moduln sind, sind Moduln die gleichzeitige Verallgemeinerung von Vektorräumen und abelschen Gruppen.

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)

[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	ein kommutativer Ring mit Eins
$n\mathbb{Z}$	das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente des Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren