(Mittel) Geometrie

v1.7.6.4.3.3 Skalarprodukt

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Das Skalarprodukt ist bei Dreiecken im Koordinatensystem das Hindernis (Obstruktion) gegen die oder der Fehler bei der Anwendung des Pythagoras.

Das Skalarprodukt als Summe der Produkte der Koordinaten-Versätze der Seiten mit einer recht einfachen Formel zu berechnen. Die Koordinaten-Versätze einer Strecke sind die Differenzen zwischen jeweils den beiden x- und y-Koordinaten des Anfangs- und End-Punktes der Seite. Wegen des Vorzeichens betrachten wir hier gerichtete Seiten.

Das Skalarprodukt ist der nummerische Fehler bei der Anwendung der Formel von Pythagoras in beliebigen Dreiecken. Anders gesagt ist es ein weiterer Term in einer verallgemeinerten Formel des Pythagoras, die in allen Dreiecken gilt.

Wieder anders gesagt, ist es Indikator für die Gültigkeit der Formel des Pythagoras: genau dann, wenn das Skalarprodukt Null ist, gilt der Satz des Pythagoras.

Die beiden äquivalenten Aussagen „das Skalarprodukt ist Null“ und „der Satz des Pythagoras ist gültig“ sind damit zwei gleichwertige Definitionen von „senkrecht“.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Koordinaten-System, Satz des Pythagoras, Abstand im Koordinatensystem, Rechnen mit Buchstaben.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v1.6%20Mittel/v1.7.6%20Geometrie/v1.7.6.4.3.3%20Skalarprodukt`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v1.7.6.4.2 (Mittel) Geometrie - Satz des Pythagoras
`https://youtu.be/mTMOtXfUQzQ`

v1.7.6.4.3 (Mittel) Geometrie - Abstand im Koordinatensystem
`https://youtu.be/HEdolewfn78`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

`https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Abstand`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Skalarprodukt`
`https://www.schuelerhilfe.de/online-lernen/1-mathematik/719-skalarprodukt`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„KomplettWissen Mathematik Gymnasium Klasse 5-10“
Klett Lerntraining bei PONS
978-3-12-926097-5 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/schulbuch-lexikon-woerterbuch/35031626-9783129260975-komplettwissen-mathematik-gymnasium-klasse-5-10`

„Grundlagen der ebenen Geometrie“ Hendrik Kasten, Denis Vogel
Springer Berlin
978-3-662-57620-5 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/43394438-9783662576205-grundlagen-der-ebenen-geometrie`

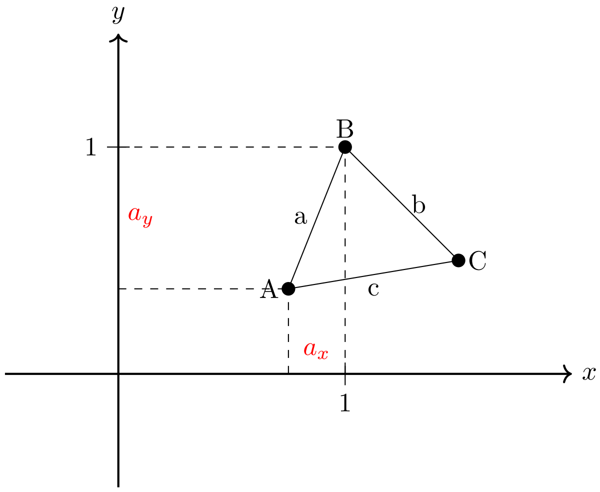
MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe `http://www.gnu.org/licenses/`.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter `https://youtu.be/PMYHObLI54Q`

1. Skalarprodukt

1.1. **Definition des Skalarproduktes.** Sei im Folgenden gegeben ein Dreieck ABC mit den Punkten $A = (A_x, A_y), B = (B_x, B_y), C = (C_x, C_y)$ und den Seiten $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{CA}$.



Definition 1.1.1. (Der Koordinaten-Versatz der Seiten): Der **Koordinaten-Versatz der Seiten** ist definiert durch:

$$a_x := B_x - A_x, \quad a_y := B_y - A_y \tag{1}$$
$$b_x := C_x - B_x, \quad b_y := C_y - B_y \tag{2}$$
$$c_x := A_x - C_x, \quad c_y := A_y - C_y. \tag{3}$$

Diese Koordinaten-Versätze tauchen ganz natürlich bei der Berechnung der Länge der Seiten auf. Das Quadrat der Länge der Seite a wird mit $a^2 := |a|^2$ bezeichnet und ist *definiert* als Abstand der Punkte A und B über die Formel des Pythagoras als $a^2 := (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2$. Somit können wir mit Hilfe der Koordinaten-Versätze der Seiten schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= a_x^2 + a_y^2 && (4)\\ b^2 &= b_x^2 + b_y^2 && (5)\\ c^2 &= c_x^2 + c_y^2. && (6) \end{aligned}}$$

Aus $B_x - A_x + C_x - B_x + A_x - C_x = 0$ und $B_y - A_y + C_y - B_y + A_y - C_y = 0$ ergibt sich sofort

$$\boxed{\begin{aligned} a_x + b_x + c_x &= 0 && (7)\\ a_y + b_y + c_y &= 0, && (8) \end{aligned}}$$

welches auch optisch im Koordinatensystem-Bild leicht nachzuvollziehen ist.

Quadrieren wir die Gleichung $a_x + b_x = -c_x$ erhalten wir $(a_x + b_x)^2 = c_x^2$ und genauso für die y-Koordinate. Damit können wir folgendermaßen rechnen:

$$c_x^2 + c_y^2 = (a_x^2 + 2a_x b_x + b_x^2) + (a_y^2 + 2a_y b_y + b_y^2) = a_x^2 + a_y^2 + 2(a_x b_x + a_y b_y) + b_x^2 + b_y^2. \tag{9}$$

Wir erhalten die wichtige Formel

$$\boxed{c^2 = a^2 + 2(a_x b_x + a_y b_y) + b^2.} \tag{10}$$

Das $2(a_x b_x + a_y b_y)$ ist die Größe, die, wenn ungleich Null, verhindert, dass die Formel des Pythagoras in einem allgemeinen Dreieck gilt.

Definition 1.1.2. (Skalarprodukt): Das **Skalarprodukt** der Seiten a und b ist definiert durch:

$$ab := a \cdot b := \langle a, b \rangle := a_x b_x + a_y b_y. \tag{11}$$

Wir werden meistens ab schreiben.

Damit erhalten wir den

Satz 1.1.3. (Verallgemeinerter Pythagoras): In einem allgemeinem Dreieck mit den Seiten a, b, c gilt

$$\boxed{c^2 = a^2 + 2ab + b^2.} \tag{12}$$

Beachte: Die Buchstaben hier sind keine Zahlen sondern Seiten, wobei allerdings a^2, b^2, c^2 über die Längen der Seiten definiert sind: $|a|^2, |b|^2, |c|^2$. Das erinnert frappant an die binomische Formel, wenn wir $c = a + b$ schreiben würden.

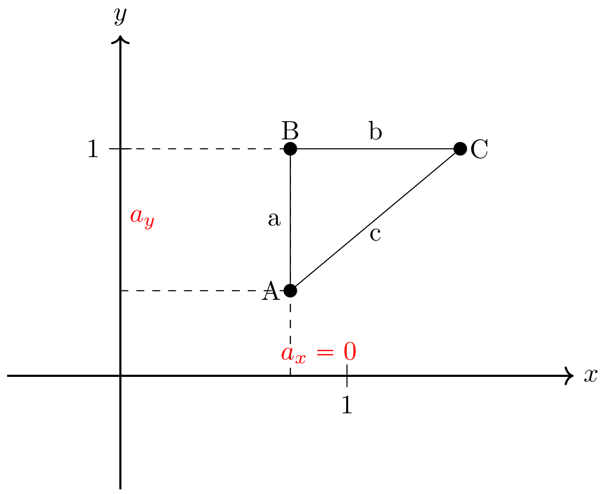
Damit verhinder das Skalarprodukt ab, wenn es ungleich Null ist, die Gültigkeit des Pythagoras. Das Skalarprodukt ist damit das (oder ein Maß für das) Hindernis für die Gültigkeit. Es ist ein Maß für die Obstruktion des Pythagoras.

Mit einem anderen Blickwinkel ist das Skalarprodukt ein Maß für den Fehler des Pythagoras oder nochmal leicht anders sein Korrekturterm für den allgemeinen Fall.

Ist eine Seite null lang, ist also z.B. $B = C$, dann ist $b_x = b_y = 0$ und damit dann $ab = a_x b_x + a_y b_y = a_x \cdot 0 + a_y \cdot 0 = 0$ also gilt für das Skalarprodukt, wenn wir etwas sallop 0 für die null-lange Seite schreiben

$$\boxed{a \cdot 0 = 0.} \tag{13}$$

Falls die Seiten a, b mit den Koordinatenachsen liegen, also a parallel zur x- und b parallal zur y-Achse, dann gilt $a_x = b_y = 0$ und somit $ab = a_x b_x + a_y b_y = 0 \cdot b_x + a_y \cdot 0 = 0.$



Für solche Dreiecke gilt der Pythagoras aufgrund unserer Definition der Länge von c und sie ist offensichtlich konsistent mit der neuen Formel.

Das Skalarprodukt einer Seite mit sich selbst ist $a \cdot a = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2 = |a|^2$. Damit ist a^2 das selbe egal, ob wir es als Quadrat der Länge oder als Skalarprodukt mit sich selbst auffassen.

Wir haben den

Satz 1.1.4. (Gültigkeit Pythagoras): In einem allgemeinem Dreieck mit den Seiten a, b, c gilt

$$\boxed{\text{Pythagoras} \Leftrightarrow ab = 0.} \tag{14}$$

Das wird uns zu folgender Definition verleiten:

Definition 1.1.5. (Senkrecht): Die beiden Seiten a, b eines allgemeines Dreieck mit den Seiten a, b, c sind **senkrecht** zueinander, genau dann wenn ihr Skalarprodukt Null ist:

$$\boxed{a \perp b :\Leftrightarrow ab = 0.} \tag{15}$$

2. TODO:

Literatur

[Klett2016] Klett Lerntraining, *Komplett Wissen Mathematik Gymnasium 5-10*, Klett Lerntraining, 978-3-12-926097-5 (ISBN)

[KastenVogel2018] Hendrik Kasten, Denis Vogel , *Grundlagen der ebenen Geometrie*, 2018 Springer Berlin, 978-3-662-57620-5 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$a, b, c, \cdots$	Seiten
a_x, a_y	Koordinatenversätze der Seite a
$\vert a\vert$	Länge der Seite a
x, y	Koordinatenachsen
$A, B, C, \cdots$	Punkte
A_x, A_y	Koordinaten des Punktes A
$\perp$	Senkrecht