(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.6 Kommakategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze
Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

Beschreibung

Inhalt. Eine **Kommakategorie** ist eine Art Kategorie der Morphismen zwischen Objekten aus unterschiedlichen Kategorien.

Um das möglich zu machen, werden die beiden Ausgangskategorien vermöge zweier Funktoren in eine dritte Vermittler-Kategorie eingebettet.

Die Konstruktion hat Ähnlichkeiten sowohl zur Kategorie aller Morphismen als auch zu natürlichen Transformationen.

Mit dem Mittel der Kommakategorie können wir weitere Kategorien bilden.

Beispiele sind die Kategorie der Morphismen, Über- und Unterkategorien.

Eine natürliche Transformation kann als ein bestimmter Funktor in eine Kommakategorie angesehen werden.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Natürliche Transformation, kleine Kategorien, Kategorie der Morphismen, Funktorkategorien, kommutative Quadrate

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.6%20Kommakategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen
`https://youtu.be/IN7Qa-SwlD0`

v5.0.1.1.4.1 (Höher) Kategorien - Kommutative Quadrate
`https://youtu.be/ptnE4UzfZ68`

v5.0.1.0.3.5 (Höher) Kategorien - Kategorien von Homomorphismen
`https://youtu.be/v1F5BFH8nbo`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Comma_category`
`https://ncatlab.org/nlab/show/comma+category`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology`

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:
„Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Ausführlich:
„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“
Francis Borceux 2008 Cambridge University Press
978-0521061193 (ISBN)

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe `http://www.gnu.org/licenses/`.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.6 Kommakategorien

1.1. **Definition einer Kommakategorie.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ drei Kategorien und $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $T\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Dann ist die Kommakategorie $(T \downarrow S)$ wie folgt definiert:

Die Objekte sind die Morphismen von Bildern von T nach Bildern von S. Die Morphismen sind kommutative Quadrate deren Kanten Bilder von Morphismen aus $\mathcal{E}$ und $\mathcal{D}$ sind.

Etwas genauer: Die Objekte sind die Morphismen der Form $f\colon T(e) \to S(d)$, wo e Objekte von $\mathcal{E}$, d Objekte von $\mathcal{D}$ und f Morphismen von $\mathcal{C}$ sind. Die Morphismen sind kommutative Quadrate der Form

$$\begin{tikzcd} T(e) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S(d) \arrow[d] \\ T(e') \arrow[r, "f'"] & S(d') \end{tikzcd} \tag{1}$$

Beachte die graphische Ähnlichkeit zu natürlichen Transformationen!

Noch genauer: Die beiden $\mathcal{C}$-Morphismen, die einen $(T \downarrow S)$-Morphismus bilden müssen darüber hinaus Bilder von Morphismen aus $\mathcal{E}$ und $\mathcal{D}$ sein.

$$\begin{tikzcd} T(e) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T(k)"] & S(d) \arrow[d, "S(h)"] \\ T(e') \arrow[r, "f'"] & S(d') \end{tikzcd} \tag{2}$$

Präzise: Die Objekte sind die Tripel (e, d, f) und (e', d', f') und die Morphismen sind die Paare (h, k). Diese Präzisierung führt dazu, dass, **selbst wenn die Funktoren auf den Objekten oder den Morphismen nicht injektiv sind, wir führ jedes Ausgangsobjekt und -morphismus eigene Objekte und Morphismen bekommen** . Also falls $e \neq e'$ aber $T(e) = T(e')$ ist dennoch (e, d, f) und (e', d, f) zwei verschiedene Objekte.

Es werden also eigentlich die Objekte von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{D}$ mit Pfeilen aus $\mathcal{C}$ verbunden. Dies geschieht über „Stellvertreter“ dieser Objekte in $\mathcal{C}$.

1.2. **Notationen.** Wir unterscheiden in der Notation zwischen Zahlen aus $\mathbb{N}$, die wir „normal“ schreiben: $0, 1, 2, 3, \cdots$, und bestimmten Kategorien, die wir **fett** oder mit einem Pfeil drüber schreiben. Die Idee mit dem Pfeil kommt daher, dass fett auf der Kreidetafel schlecht zu realisieren ist, und weil Vektoren auch oft fett geschrieben werden. Da Kategorien Pfeile enthalten, passt es auch emotional.

$\vec{2}$ ist die Kategorie mit zwei Objekten und außer den beiden Identitäten einem weiteren Morphismus $\bullet \to \bullet$.

1.3. **Beispiele von Kommakategorien.** Sind T, S die Identitätsfunktoren, ist $(T \downarrow S) = \mathcal{C}^{\vec{2}}$.

Ist $T = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ und $S = (d \colon \vec{1} \to \mathcal{D})$ das Herauspicken eines einzelnen Objektes aus $\mathcal{D}$ erhalten wir eine Überkategorie (Overcategory, slice category, Scheibenkategorie?).

Andersherum die Unterkategorie (undercategory, coslice category, Koscheibenkategorie?).

Eine natürliche Transformation $\alpha \colon T \to S$ zwischen Funktoren $T, S \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kann als ein bestimmter Funktor $\tau_\alpha \colon \mathcal{C} \to (T \downarrow S)$ gesehen werden.

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α