(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.7 Graphen und freie Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Eine Kategorie ist auch ein Graph. Genauer ein Multidigraph, also ein gerichteter Graph mit parallelen Pfeilen und Schleifen.

Die Kategorie Multidigraphen ist eine Prägarbe der Kategorie mit zwei Objekten und zwei parallelen Homomorphismen.

Wenn wir Kategorien malen, zeichnen wir Graphen.

Diesen letzten Schritt wollen wir nun präzisieren: so wie ein freies Monoid (und fast genauso auch eine freie Gruppe) über einer Mengen X die Menge der Wörter über X mit der Aneinander-Hängung als Verknüpfung ist, so ist die **freie Kategorie** über einem Graphen G die Menge aller Pfade it der Aneinander-Hängung als Verknüpfung.

Die beiden Fälle freie Monoide und freie Kategorien sehen syntaktisch sehr ähnlich aus: Wörter deren Buchstaben Elemente oder Pfeile sind. Bei freien Kategorien können wir zwei Wörter (hier besser Pfade genannt) nur dann verknüpfen, wenn das Ende des linke mit dem Beginn des Zweiten Pfads übereinstimmen. Bei freien Monoiden können wir beliebige Wörter verknüpfen.

Da die entstehenden Morphismen genau die Pfade durch den Graphen sind, können wir die Kategorie auch **Pfad-Kategorie** nennen.

Der Weg von den kleinen Kategorien zu den kleinen Graphen, bei dem wir die kategorische Struktur vergessen und nur die des Graphen behalten, ist ein Funktor U. Wir nennen ihn Vergess-Funktor oder underlying Funktor.

Der Weg vom kleinen Graph zu dessen freien Kategorie ist ebenfalls ein Funktor F.

Diese beiden Funktoren bilden ein Paar **adjungierter** Funktoren, was wir hier noch nicht einführen, was aber ein extrem wichtiger Begriff ist. Es ist sinnvoll, sich dieses Beispiel schon mal zu merken.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Freie Monoide, freie Gruppen, gerichtete Graphen, Kategorien, kleine Kategorien, Funktoren

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.7%20Graphen%20und%20freie%20Kategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.1.4.5.1 (Höher) Kategorien - Graphen sind Prägarben
`https://youtu.be/89SnwNkSyjk`

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`Freecategory`
`https://ncatlab.org/nlab/show/free+category`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Monoid#Freies_Monoid`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Free_monoid`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Freie_Gruppe`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Adjunktion_(Kategorientheorie)`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:
„Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Ausführlich:
„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“
Francis Borceux 2008 Cambridge University Press
978-0521061193 (ISBN)

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.7 Graphen und freie Kategorien

1.1. **Kategorie vs Multidigraph.** Eine Kategorie ist auch ein Graph. Genauer ein Multidigraph, also ein gerichteter Graph mit parallelen Pfeilen und Schleifen.

1.2. **Graphen als Prägarben.** Die Kategorie Multidigraphen ist eine Prägarbe der Kategorie mit zwei Objekten und zwei parallelen Homomorphismen.

1.3. **Freies Monoid / freie Gruppe.** Sei X eine Menge. Dann ist das freie Monoid über X, die Menge aller Wörter über X (also aller endlichen Folgen mit Werten in X) mit der Verknüpfung des Aneinander-Hängens und dem leeren Wort als neutralem Element. Elemente sind also $(), (x_1x_2\cdots x_n)$ und so. Manchmal und, wenn es nicht das leere Wort ist, lassen wir die Klammern auch weg.

Bei freien Gruppen müssen wir noch die Inversen als Buchstaben zulassen, also zu jedem $x \in X$ das x^{-1} und beim Aneinander-Hängen müssen wir xx^{-1} und $x^{-1}x$ kürzen.

1.4. **Kategorien aus Graphen.** Wenn wir Kategorien malen, zeichnen wir Graphen.

Diesen letzten Schritt wollen wir nun präzisieren: Die **freie Kategorie** über einem Graphen G ist die Menge der Knoten als Objekte und die Menge aller Pfade mit dem Aneinander-Hängen als Verknüpfung. Pfade sind endliche Folgen von Pfeilen, wo immer das Ende des einen gleich dem Anfang seines Nachfolgers ist. Wir sagen, dass die Pfeile **zusammenpassen**. Pfade können nur dann verknüpft werden, wenn das Ende des linken gleich dem Anfang des rechten Nachfolgers ist. Wir sagen, dass die Pfade **zusammenpassen**. Zu jedem Knoten gibt es einen leeren Pfad $()$. Diese wirken offensichtlich neutral.

Die Kategorie-Axiome sind leicht nachzuprüfen.

Morphismen sind also $()_A, ()_B, (x_1x_2\cdots x_n)$ und so, wobei A, B Objekte der Kategorie, also Knoten des Graphen, sind.

1.5. **Fehlende Homomorphismen ergänzen.** Intuitiv ergänzen wir zu einem Graphen alle Kompositionen, die für eine Kategorie benötigt werden.

1.6. **Zuordnung Graph → freie Kategorie ist funktoriell.** Ein Morphismus in der Kategorie der kleinen Graphen besteht aus zwei Abbildungen, die wir beide F nennen, von Knoten A zu Knoten $F(A)$ und von Pfeil p zu Pfeil $F(p)$, so dass

$$B(F(p)) = F(B(p)) \text{ und } E(F(p)) = F(B(p)), \tag{1}$$

wobei B, E Beginn- und End-Knoten eines Pfeiles sind. Anders hingeschrieben:

$$f(p\colon A_1 \to A_2) = F(p)\colon F(A_1) \to f(A_2), \tag{2}$$

was schon so aussieht wie Funktor-Axiom.

Sei $\mathcal{F}(G)$ die freie Kategorie über dem Graphen G. Damit $\mathcal{F}$ Funktor sein kann, müssen wir ihn neben den Objekten (Graphen) auch auf Graph-Homomorphismen definieren.

Sei dazu $F\colon G \to H$ ein Graph-Homomorphismus. Wir müssen nun einen Kategorie-Homomorphismus, sprich einen Funktor, $\mathcal{F}(F)\colon \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(H)$ definieren. Funktoren werden auf Objekten und auf Morphismen definiert.

Ein Objekt von $\mathcal{F}(G)$ ist ein Koten k von G. Wir definieren

$$\mathcal{F}(F)(A) := F(A), \tag{3}$$

welches ein Knoten von H und damit ein Objekt von $\mathcal{F}(H)$ ist.

Ein Homomorphismus von $\mathcal{F}(G)$ ist von der Form $()_A$ oder $(p_1\cdots p_n)$, wo die p_i Pfeile von G sind. Wir definieren

$$\mathcal{F}(()_A) := ()_{\mathcal{F}(A)} = ()_A \tag{4}$$

und

$$\mathcal{F}((p_1\cdots p_n)) := (F(p_1)\cdots F(p_n)). \tag{5}$$

Die rechte Seite ist nach der Definition von Homomorphismen in der freien Kategorie in Homomorphismus.

Jetzt müssen wir noch die Funktor-Axiome nachweise, was sehr einfach ist, nachdem wir hingeschrieben haben, was nachgewiesen werden muss. Das lassen wir hier weg.

1.7. **Riesen Funktor.** Das kategorische Netzwerk der graphischen Netzwerke wird in das kategorische Netzwerk der kategorischen Netzwerke eingebettet. –> kompliziertes Bild.

1.8. **Pfad-Kategorie.** Da die entstehenden Morphismen genau die Pfade durch den Graphen sind, können wir die Kategorie auch **Pfad-Kategorie** nennen.

1.9. **Adjungierte Funktoren.** Der Weg von den kleinen Kategorien zu den kleinen Graphen, bei dem wir die kategorische Struktur vergessen und nur die des Graphen behalten, ist ein Funktor U. Wir nennen ihn Vergess-Funktor oder underlying Funktor.

Der Weg vom kleinen Graph zu dessen freien Kategorie ist ebenfalls ein Funktor F.

Diese beiden Funktoren bilden ein Paar **adjungierter** Funktoren, was wir hier noch nicht einführen, was aber ein extrem wichtiger Begriff ist. Es ist sinnvoll, sich dieses Beispiel schon mal zu merken.

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α