(Bachelor) Anfang

v3.0.1.3.1 Mengen - Leere Wahrheit

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Eine leere Wahrheit (englisch: vacuous truth, is vacuously true), ist eine wahre Aussage, die aus oberflächlichen logischen Gründen wahr. Sie liefert weder Erkenntnisse noch muss bei deren Beweis Arbeit aufgebracht werden. Sie ist also leer von Erkenntnis und leer an Beweis-Aufwand.

Das erste Phänomen dieser Art ist die Implikation mit falschem Antezedens. So gilt für jede reelle Zahl, wenn ihr Quadrat kleiner Null ist, ist sie eine Primzahl. Hierfür müssen wir nicht aufwendig den den Sukzedens herleiten (leerer Beweis-Aufwand). Der Satz hat auch keinen Informationsgehalt (leerer Inhalt). Er ist einfach nur wahr, weil die Voraussetzung falsch ist.

Wir finden diese Art der Definition der Implikation (materielle Implikation) gut, weil wir einen Satz wie „wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n durch 2 teilbar“ auch dann wahr haben wollen, wenn wir für n die Zahl 5 einsetzen.

Der Satz „Wenn es regnet, wird die Erde nass“ muss eigentlich als „Für alle Zeitpunkte t gilt, dass, wenn es zum Zeitpunkte t regnet, wird die Erde zum Zeitpunkte t nass“ gelesen werden.

Sachdienliche Hinweise gegen eine Implikation liegen immer nur dann vor, wenn der Antezedens wahr ist. Wenn es zum Zeitpunkte t nicht regnet, kann ich Sätze, die mit „wenn es zum Zeitpunkte t regnet, dann“ beginnen nicht beurteilen. Sie können an solchen Tagen nicht als falsch erwiesen werden.

Genauso verhält es sich mit der leeren Menge. Für alle x aus der leeren Menge gilt jede beliebige Aussage. Das wird leere Wahrheit im engeren Sinne genannt. Denn das ist ja äquivalent zu, wenn x in 0, dann ..., und hier ist der Antezedens immer falsch.

Auch finden wir gut, dass ein Satz „alle durch 4 teilbaren Elemente einer Menge M sind durch 2 teilbar“ für jede Menge M wahr ist, auch wenn diese in manchen Fällen keine durch 4 teilbaren Elemente hat.

Ein Vorteil der Einführung der 0 und der negativen Zahl ist die Vermeidung von Fallunterscheidungen. Wir müssen nicht formulieren „Wenn die Reisegruppe Kinder enthält, erhalten alle Kinder der Reisegruppe eine Ermäßigung von 10 EUR“.

Es ist auch ein Erkenntnisgewinn, zu sehen, dass sich die leere Menge völlig natürlich in die Familie aller Mengen einreiht.

„Für alle x aus 0 gilt ...“ ist immer wahr, aber „Es gibt ein x aus 0, so dass ...“ ist immer falsch.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Boolesche Logik, Quantoren, materielle Implikation, Mengen, leere Menge

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v3%20Bachelor/v3.0%20Anfang/v3.0.1.3.1%20Mengen%20-%20Leere%20Wahrheit`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v3.0.1.1.3.2 (Bachelor) Die Axiome - Boolesche Logik - Implikation
`https://youtu.be/JLY7O1kq6mk`
v3.0.1.1.4 (Bachelor) Die Axiome - Quantoren
`https://youtu.be/tjLDq6uYEsc`
v3.0.1.2.2 (Bachelor) Die Axiome - Klassen
`https://youtu.be/DTEyQhlYDaE`
v3.0.1.2.3 (Bachelor) Die Axiome - Klassen Lehre
`https://youtu.be/2heuG7w-rnQ`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Leere_Wahrheit`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuous_truth`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Subjunktion`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Grundwissen Mathematikstudium“
Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel
2022
Springer-Verlag
978-3-662-63312-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/56427740-9783662633120-grundwissen-mathematikstudium

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter https://youtu.be/MImsrTFa2DA

1. Leere Wahrheiten

1.1. **Implikation.** Wenn wir wissen, dass P falsch ist folgt aus P alles, also jede beliebige Aussage T:

$$\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow T) \tag{1}$$

Hier ist wichtig, dass **die Implikation wahr ist, wir aber über die Gültigkeit von T keine Aussage machen**. Wenn wir wissen das P falsch ist und dennoch die Gültigkeit von P annehmen, können wir dies als $\neg P \wedge P$ schreiben, also

$$\neg P \wedge P \Rightarrow T \tag{2}$$

Mit anderen Worten: aus einem Widerspruch folgt alles.

Genauso: Wenn wir wissen, dass Q wahr ist folgt aus $\neg Q$ alles, also jede beliebige Aussage T:

$$Q \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow T) \tag{3}$$

Wenn wir wissen das Q wahr ist und dennoch die Falschheit von Q annehmen, können wir dies als $Q \wedge \neg Q$ schreiben, also

$$Q \wedge \neg Q \Rightarrow T \tag{4}$$

Mit anderen Worten: aus einem Widerspruch folgt alles.

Diesen Umstand können wir plakativ als

$$\text{falsch} \Rightarrow \text{alles} \tag{5}$$

schreiben. Er ist auch eine Motivation für eine mögliche Definition von „falsch“:

$$\text{falsch} := \neg P \wedge P \tag{6}$$

Wir haben z.B. für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $x^2 < 0 \Rightarrow x$ ist gleichzeitig prim und nicht prim.

Bei den folgenden leeren Wahrheiten handelt es sich eigentlich immer wieder um dieses Thema in einem neuen Gewandt.

Die Wahrheit von $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow T)$ liefert keine neue Erkenntnis (leere Erkenntnis), sie benötigt keine Beweisarbeit (leerer Beweis) und es besteht kein Zusammenhang zwischen P und T (leerer Zusammenhang). Deswegen können wir die eine **leere Wahrheit** nennen.

Dies macht Sinn, weil wir möchten

$$\forall n\mathbb{Z}\colon 4|n \Rightarrow 2|n \tag{7}$$

Damit haben wir dann z.B. folgende Konstellationen:

$$n = 12\colon 4 \mid 12 \wedge 2 \mid 12 \tag{8}$$
$$n = 6\ \ \colon 4 \nmid 6\ \ \ \wedge 2 \mid 6 \tag{9}$$
$$n = 5\ \ \colon 4 \nmid 5\ \ \ \wedge 2 \nmid 5 \tag{10}$$

Nur die Konstellation

$$n = x\colon 4 \mid x \wedge 2 \nmid x \tag{11}$$

haben wir nicht. Das erklärt die Äquivalenz

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q). \tag{12}$$

Nochmal anderes: $P \Rightarrow Q$ heißt ja, „Wenn P, ...“, womit wir bereits andeuten, dass es auch anderes sein kann.

1.2. **Quantoren.** Falls $Q(x)$ für alle x falsch ist, gilt

$$\forall x\colon Q(x) \Rightarrow T(x). \tag{13}$$

So haben wir z.B.

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 0 \Rightarrow x \text{ ist Primzahl.} \tag{14}$$

Vernünftiger klingt folgendes Beispiel:

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon 4|n \Rightarrow 2|n. \tag{15}$$

Dies ist einer der Gründe, warum wir die materielle Implikation als die richtige wählen. Da es für alle n gilt, gilt es auch für $n = 5$:

$$4|5 \Rightarrow 2|5. \tag{16}$$

Kritik: wir haben den Eindruck, dass aus der Teilbarkeit durch 4 die durch 2 „kausal“ folgt. Bei dem ebenfalls richten Satz

$$4|5 \Rightarrow 5 < 0 \tag{17}$$

haben wir eher das Gefühl, dass dort kein Zusammenhang besteht. Die Intuition, die Implikation als wahr anzusehen, wenn der Antezedens falsch ist, weil wir die Implikation in dem Fall nicht als falsch zu sein bewiesen haben, könnte wir auch durch einen dritten Wahrheitswert „weiß nicht“ begegnen. Nennen wir ihn „unbekannt“. Dann könnten wir aus $4|5$ nicht schließen, dass $5 < 0$. Aber das können wir jetzt auch nicht, da eine Implikation nur dann „angewendet“ werden kann, wenn der Antezedenz wahr ist:

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \tag{18}$$

Wir hätten also außer Komplexität und eine Fülle neuer Fragen nichts gewonnen.

1.3. **Mengen.** Wenn folgender Satz wahr ist

$$\forall x \in M\colon P(x), \tag{19}$$

dann gilt insbesondere auch für die x, die gar nicht in M sind:

$$x \notin M \Rightarrow (x \in M \Rightarrow P(x)). \tag{20}$$

1.4. **Leere Menge.** Falls M leer ist, ist $x \in M$ immer falsch, und damit $x \in M \Rightarrow P(x)$ immer wahr. Also gilt **für beliebige** P

$$\forall x \in \varnothing\colon P(x). \tag{21}$$

Zum Beispiel gilt folgender Satz:

Sei $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine beliebige Menge ganzer Zahlen. Sei M_4 die Teilmenge der Zahlen aus M, die durch 4 teilbar sind.

$$M_4 := \{n \in M \mid 4|n\}. \tag{22}$$

Dann gilt

$$\forall x \in M_4\colon 2|n. \tag{23}$$

Dieser Satz ist insbesondere auch dann wahr, wenn M zufällig gar keine durch 4 teilbaren Zahlen enthält (wie $M := \{1, 3, -61\}$).

So wie eine Regelung „Eine Reisegruppe bekommt für alle Teilnehmer unter 23 Jahren einen Rabat von 10 Mark“ auch für die Reisegruppen richtig ist, die keine Teilnehmer unter 23 Jahren haben.

Beachte aber folgenden Satz:

$$\neg\left(\exists x \in \varnothing\colon P(x)\right). \tag{24}$$

1.5. **Fallunterscheidungen.** Dass all unsere (Booleschen) Formeln auch für falsche Aussagen, leere Mengen und leere Wahrheiten gelten hat, ähnlich wie die Nutzung der Null oder der negativen Zahlen, auch den Vorteil, dass viele sonst notwendigen Fallunterscheidungen wegfallen. So müssen wir sonst immer formulieren: „falls die Menge durch 4 teilbare Zahlen enthält, sind diese alle auch druch 2 teilbar.“

Es ist aber auch eine Erkenntnis über die leere Menge oder die Wahrheit.

Auf der anderen Seite können wir die leere Wahrheit manchmal für Fallunterscheidungen bei Beweisen nutzen: Satz: Sei M eine Menge ..., mit ..., dann gilt $\forall x \in M\colon$ .... Beweis: 1. Fall: M ist leer. Fertig. 2. Fall: M ist nicht leer. Jetzt wissen wir es gibt ein $X \in M$. Sei x ein Element von M, dann ...

1.6. **Wer ist stärker.** Vorsicht: wenn wir einen Satz haben $\forall x \in M\colon P(x)$, wissen wir nicht, ob es ein x gibt, welches $P(x)$ erfüllt. Denn M könnte ja auch leer sein.

Wenn wir aber den Satz haben $\exists x \in M\colon P(x)$, dann wissen wir, dass M nicht leer ist und dass es mindestens ein solches x gibt.

Literatur

[ArensBusamHettlichKarpfingerStachel2022] Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel, *Grundwissen Mathematikstudium*, Springer, 978-3-662-63312-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

P, Q, T	Aussagen
$P(x), Q(x), T(x)$	Aussagen, die von x abhängen
M, M_i	Mengen
$x, y, \cdots$	Elemente
n	eine ganze Zahl
$n\|m$	m teilt n