(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.1.5 Die Kategorie der Kategorien

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Die Kategorie der kleinen Kategorien **Cat** besteht, wie wir schon wissen aus kleinen Kategorien als Objekte und Funktoren als Morphismen.

Diese Morphismen als Objekte mit den natürliche Transformationen als Morphismen ist selber wieder eine Kategorie. Hier haben wir Identitäten und Verknüpfungen von natürliche Transformationen.

Es gibt eine weitere Struktur in **Cat**: wir definieren eine andere Art der Verknüpfung von natürliche Transformationen, die eine Kategorie mit den kleinen Kategorien als Objekte und den natürliche Transformationen als Morphismen erzeugt.

Das heißt natürliche Transformationen wirken sowohl auf die Objekte von **Cat** als auch auf die Morphismen von **Cat**.

Darüber hinaus sind diese beiden Strukturen in der Hinsicht verträglich, dass sie über die selben Identitäten verfügen und dass die beiden in einer bestimmten Weise vertauschbar sind.

Die natürlichen Transformationen sind damit die Morphismen von zwei Kategorien: einmal mit den Funktoren und ein anderes Mal mit den Kategorien als Objekte.

Dies macht **Cat** zu einer 2-Kategorie mit natürliche Transformationen als 2-Morphismen.

Dies erlaubt uns einen ersten flüchtigen Blick auf 2-Kategorien.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Natürliche Transformation, kleine Kategorien, Produkt von Kategorien, Funktorkategorien, kommutative Quadrate

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.1.5%20Die%20Kategorie%20der%20Kategorien`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.4 (Höher) Kategorien - Natürliche Transformationen
`https://youtu.be/IN7Qa-SwlD0`

v5.0.1.0.7 (Höher) Kategorien - Große Kategorien
`https://youtu.be/Dcz6at6EXqM`

v5.0.1.1.3 (Höher) Kategorien - Produkte von Kategorien
`https://youtu.be/9K4qY5ZEoq8`

v5.0.1.1.4 (Höher) Kategorien - Funktorkategorien
`https://youtu.be/byvbGxRz1hs`

v5.0.1.1.4.1 (Höher) Kategorien - Kommutative Quadrate
`https://youtu.be/ptnE4UzfZ68`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories`
`https://ncatlab.org/nlab/show/Cat`
`https://ncatlab.org/nlab/show/horizontal+composition`
`https://ncatlab.org/nlab/show/exchange+law`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Category_of_small_categories`
`https://ncatlab.org/nlab/show/Cat`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-98403-2 (ISBN)
https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press
978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist: „Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Mit noch weniger Mathematik und die Konzepte motivierend ist: „Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories“
F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel
2009 Cambridge University Press
978-0-521-71916-2 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/8643555-9780521719162-conceptual-mathematics

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.1.5 Die Kategorie der Kategorien

1.1. Die Kategorie der Kategorien. Material is still on paper only :-(

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)
[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)
[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)
[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α