(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.2.1 Funktor-Bilder

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Funktor-Bilder eines Funktors sind die Bilder von Objekten aus der Quelle unter dem Funktor im Ziel. Funktor-Bilder leben also in der Ziel-Kategorie.

Ist ein bestimmter Funktor gegeben, sind in der Ziel Kategorie einige Objekte Funktor-Bilder andere nicht. Ist die Quell-Kategorie $\mathcal{C}$ und ist klar, welcher Funktor gemeint ist, nennen wir diese Objekte im Ziel $\mathcal{C}$-Objekte. In Wirklichkeit hängt dies allerdings noch vom Funktor ab.

Die Funktor-Bilder bilden zusammen mit den Bildern der Morphismen eine Unter-Kategorie in der Ziel-Kategorie. Einige Objekte im Ziel werden also dadurch ausgezeichnet, dass sie Funktor-Bilder (dieses speziellen Funktors) sind.

Die Objekte aus der Quelle führen im Ziel ein Schattendasein und bilden dort eine Teilgesellschaft.

Es gibt Morphismen zwischen Funktor-Bildern, zwischen Nicht-Bildern aber auch zwischen Bildern und Nicht-Bildern. „Normale“ Objekte und Funktor-Bilder können also in Beziehung zueinander stehen.

Oft haben die Bilder nicht mehr alle Eigenschaften der Quelle-Objekte. Der Funktor ist nicht zwingend injektiv, so dass das Bild der Quelle mehr oder weniger entstellt sein kann.

Im starken Gegenteil bilden, wenn der Funktor die Inklusion einer Unter-Kategorie ist, die Funktor-Bilder eben genau diese Unter-Kategorie. Die Funktor-Bilder sind dann die ausgezeichneten Objekte, die zur Unterkategorie gehören.

Erstes Beispiel ist die Kategorie der Paare von abelschen Gruppen ($\mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab}$) und der Funktor, der einem Paar von Gruppen deren cartesisches Produkt zuordnet. Die Bilder dieses Funktors nennen wir in diesem Video Paar-Gruppen.

Zweites Beispiel ist die Kategorie der kompakten topologischen Räume. Hier ist unser Funktor die Inklusion in die Kategorie der topologischen Räume. Die Bilder nennen wir kompakte Räume.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien, Funktoren

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.2.1%20Funktor-Bilder`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`

v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

Gut für die kategorische Sichtweise ist:
„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Etwas weniger umfangreich und weniger tiefgehend aber gut motivierend ist:
„Category Theory“
Steve Awodey
2010 Oxford University Press
978-0-19-923718-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/9478288-9780199237180-category-theory

Ausführlich:
„Handbook of Categorical Algebra Vol. 1“
Francis Borceux 2008 Cambridge University Press
978-0521061193 (ISBN)

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter xxx

1. v5.0.1.2.1 Funktor-Bilder

Funktor-Bilder eines Funktors sind die Bilder von Objekten aus der Quelle unter dem Funktor im Ziel. Funktor-Bilder leben also in der Ziel-Kategorie.

Ist ein bestimmter Funktor gegeben, sind in der Ziel Kategorie einige Objekte Funktor-Bilder andere nicht. Ist die Quell-Kategorie $\mathcal{C}$ und ist klar, welcher Funktor gemeint ist, nennen wir diese Objekte im Ziel $\mathcal{C}$-Objekte. In Wirklichkeit hängt dies allerdings noch vom Funktor ab.

Die Funktor-Bilder bilden zusammen mit den Bildern der Morphismen eine Unter-Kategorie in der Ziel-Kategorie. Einige Objekte im Ziel werden also dadurch ausgezeichnet, dass sie Funktor-Bilder (dieses speziellen Funktors) sind.

Die Objekte aus der Quelle führen im Ziel ein Schattendasein und bilden dort eine Teilgesellschaft.

Es gibt Morphismen zwischen Funktor-Bildern, zwischen Nicht-Bildern aber auch zwischen Bildern und Nicht-Bildern. „Normale“ Objekte und Funktor-Bilder können also in Beziehung zueinander stehen.

Oft haben die Bilder nicht mehr alle Eigenschaften der Quelle-Objekte. Der Funktor ist nicht zwingend injektiv, so dass das Bild der Quelle mehr oder weniger entstellt sein kann.

Im starken Gegenteil bilden, wenn der Funktor die Inklusion einer Unter-Kategorie ist, die Funktor-Bilder eben genau diese Unter-Kategorie. Die Funktor-Bilder sind dann die ausgezeichneten Objekte, die zur Unterkategorie gehören.

Erstes Beispiel ist die Kategorie der Paare von abelschen Gruppen ($\mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab}$) und der Funktor, der einem Paar von Gruppen deren cartesisches Produkt zuordnet. Die Bilder dieses Funktors nennen wir in diesem Video Paar-Gruppen.

Zweites Beispiel ist die Kategorie der kompakten topologischen Räume. Hier ist unser Funktor die Inklusion in die Kategorie der topologischen Räume. Die Bilder nennen wir kompakte Räume.

1.1. **Ideen.**

-

Literatur

[Awodey2010] Steve Awode, *Category Theory*, 2010 Oxford University Press, 978-0-19-923718-0 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[LawvereSchanuel2009] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: a First Introduction to Categories*, 2009 Cambridge University Press, 978-0-521-71916-2 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Borceux2008] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1* 2008 Cambridge University Press, 978-0-521-06119-3 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$\bullet$	Kategorie mit genau einem Objekt und einem Morphismus
$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
$\mathcal{P}$	Potenzmengen-Funktor
Set	Die Kategorie der kleinen Mengen
Ab	Kategorie der kleinen abelschen Gruppen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Klasse der Homomorphismen von X nach Y
$\alpha, \beta, \cdots$	natürliche Transformationen oder Ordinalzahlen
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ oder $\mathcal{C}^*$	Duale Kategorie
$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$	Funktorkategorie
U, U', U''	Universen
V_α	eine Menge der Von-Neumann-Hierarchie zur Ordinalzahl α