(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.3 Additiver Funktor Hom

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Die Hom-Funktoren in der der Kategorie der R-Moduln sind additiv.

Damit dieser Satz Sinn macht, muss vorher erwiesen werden, dass die Hom-Mengen in der Kategorie der R-Moduln abelsche Gruppen sind und dass die Komposition von Morphismen ist biadditiv ist, mit anderen Worten dass das Distributivgesetz zwischen Addition und Verknüpfung von Morphismen gilt.

Damit erweisen sich die Kategorien der R-Moduln als **Ab**-Kategorien. Dies ist ein erster Schritt zu zeigen, dass sie sogar abelsche Kategorien sind.

Die Hom-Mengen sind aber nicht wieder R-Moduln. Das ist anders als in der Kategorie der abelschen Gruppen, wo die Hom-Mengen selber in der Kategorie liegen. In der Kategorie der R-Modulen liegen die Hom-Mengen in einer anderen Kategorie.

Wenn wir uns das Hindernis ansehen, welches bei den Hom-Mengen dem R-Modul im Wege seht, so ist es die fehlende Kommutativität im Ring R.

Da die Elemente des Zentrums von R, also $Z(R)$ mit allen Elementen von R vertauschen, können diese unter diesem Hindernis hindurch schlüpfen: die Hom-Mengen sind $Z(R)$-Moduln.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Funktoren, additive Funktoren, **Ab**-Kategorien

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.3%20Additiver%20Funktor%20Hom`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln
`https://youtu.be/JY43_07kNmA`
v5.0.1.0.2 (Höher) Kategorien - Kategorien
`https://youtu.be/sIaKt-Wxlog`
v5.0.1.0.3 (Höher) Kategorien - Funktoren
`https://youtu.be/Ojf5LQGeyOU`
v5.0.1.6.1.4 (Höher) Kategorien - Abelsche - Additiver Funktor
`https://youtu.be/zSP_a2RvoYE`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Preadditive_category`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Module_homomorphism#Module_structures_on_Hom`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra`

Oft zitiert:
„An Introduction to Homological Algebra“
Charles A. Weibel
1995
Cambridge University Press
978-0-521-55987-4 (ISBN)
`https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra`

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algébre 10. Algèbre homologique“
Nicolas Bourbaki
1980
Springer-Verlag
978-3-540-34492-6 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter uups

1. v5.1.1.1.3 Additiver Funktor Hom

1.1. Gruppen-Struktur auf Hom-Mengen. Die Hom-Mengen bestehen aus Funktionen mit Zielmenge eine Gruppe. Damit können wir auf der Menge dieser Funktionen eine Addition „komponentenweise“ definieren:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x). \tag{1}$$

Da die 0-Funktion ein R-Modul-Homomorphismus ist, und da mit f, g auch $f+g$ und das wie folgt definierte $-f$ selbst R-Modul-Homomorphismen sind, können wir prüfen, ob es sich um eine Gruppe handelt.

$$(-f)(x) := -(f(x)). \tag{2}$$

Und in der Tat:

$\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ ist eine abelsche Gruppe.

Der Beweis ist sehr einfach.

1.2. R-Mod ist Ab-Kategorie.

$$((f+g)\circ h)(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f\circ h)(x) + (g\circ h)(x), \tag{3}$$

und so

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h. \tag{4}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die Verknüpfung von der anderen Seite gehen entsprechend.

1.3. Hom-Funktoren sind additiv. Damit sind die Funktoren $\mathrm{Hom}_R(X,\_)$ und $\mathrm{Hom}_R(\_,Y)$ Funktoren von R-Mod nach **Ab**, das heißt, sie sind Funktoren zwischen **Ab**-Kategorien. Zum Glück sind sie additiv.

Wir müssen zeigen, dass

$$F(f+g) = F(f) + F(g) \tag{5}$$

ist. Dazu schauen wir uns zunächst an, wie ein Hom-Funktor auf Morphismen wirkt. Sei dazu ein Morphismus $h\colon X \to Y$ gegeben. Dann

$$\mathrm{Hom}(W,h) := \mathrm{Hom}(W,\_)(h) : \mathrm{Hom}(W,X) \to \mathrm{Hom}(W,Y) \tag{6}$$

$$f \mapsto h\circ f \tag{7}$$

Die Forderung (5) wird damit zu

$$h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g, \tag{8}$$

was nichts anderes als (4) ist.

Die Bilinearität der Addition bezüglich der Verknüpfung ist das selbe wie die Additivität der Hom-Funktoren.

Dieser Beweis gilt offenbar ganz allgemein in **Ab**-Kategorien.

1.4. **Modul-Struktur auf Hom-Mengen.** Damit $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein R-Modul ist muss zusätzlich für alle $r \in R$ eine Skalar-Multiplikation definiert werden. Dies wieder punktweise:

$$(rf)(x) := r(f(x)). \tag{9}$$

Dies muss wieder ein R-Modul-Homomorphismus sein. Die Regeln für die Addition bilden kein Problem. Bei der Multiplikation haben wir jedoch:

$$(rf)(sx) \text{ müsste gleich sein zu } s(rf)(x). \tag{10}$$

Dies geht im allgemeinen nur, wenn

$$sr = rs. \tag{11}$$

Bei nicht-kommutativen Ringen ist dies nicht der Fall:

$\mathrm{Hom}(X, Y)$ ist in der Regel kein R-Modul.

Da die Elemente von R aber mit Elementen aus $\mathbb{Z}$ vertauschen ist $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul, was nicht anderes als eine abelsche Gruppe ist, und das wissen wir schon.

$\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul

Da die Elemente von R mit allen Elementen aus seinem Zentrum $Z(R)$ kommutieren (dies ist ja gerade die Definition des Zentrums) gilt darüber hinaus:

$\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein $Z(R)$-Modul

Und damit auch:

Ist R kommutativ, so ist $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ein R-Modul

Literatur

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algébre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)

[Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algébre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

Symbolverzeichnis

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Eine Gruppe, nicht notwendig abelsch
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$\vec{x}, \vec{y}$	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren
$\vec{r}$	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R-Homomorphismen von X nach Y