

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.2 Ring-Darstellung = Modul

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Eine Ring-Darstellung eines Ringes R ist ein Ring-Homomorphismus von R in den Endomorphismus-Ring einer abelschen Gruppe. Wir finden auf diese Weise den Ring R realisiert durch Gruppen-Endomorphismen. Ähnlich wie wir Gruppen als Matrixgruppen z. B. über Körpern finden können.

Ring-Darstellung helfen uns Ringe besser zu verstehen.

Umgekehrt dienen Unter-Ringe von Endomorphismus-Ringen abelscher Gruppen als Quelle für Ringe.

Ring-Darstellungen sind auch Quellen für R -Moduln, denn sie stellen die zugrunde liegende abelsche Gruppe automatisch mit der Struktur eines R -Moduls aus.

Umgekehrt liefert jedes R -Modul eine Darstellung von R .

Also: Ring-Darstellung = R -Modul

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Kategorien-Theorie, Ringe, Gruppen, lineare Algebra

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.2%20Ring-Darstellung%203D%20Modul>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln

https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.0.1 (Höher) Kategorien - Playlist

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLqVqq9xKS5R-baIvTr9GnW0Pb8rlPig7S>

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_\(Mathematik\)#Alternative_Definitionen](https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik)#Alternative_Definitionen)

<https://math.stackexchange.com/questions/1980543/representations-of-rings>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Ganzheitsring>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Darstellungsring>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:

„An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter https://youtu.be/JY43_07kNmA

1. v5.1.1.1.2 RING-DARSTELLUNG = MODUL

1.1. Gegenstand der homologischen Algebra. Zum einen behandelt die homologische Algebra abelsche Kategorien. Dies ist ihr abstraktes Auftreten, von Alexander Grothendieck geschaffen und Grundlage ihres weiteren Siegeszugs.

Abelsche Kategorien extrahieren die Axiome, welche bei der Theorie der Moduln für einen Großteil des Verhalten verantwortlich sind. Damit sind Moduln automatisch eine Quelle von Beispielen und von Fragestellungen, die mit Hilfe der homologischen Algebra untersucht werden können.

Um Moduln bilden zu können benötigen wir Ringe.

1.2. Quelle für Ringe. Eine übliche Quelle für Ringe sind Zahlen. Ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ ein Unter-Körper von \mathbb{C} , so ist dessen Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ ein Ring. Z. B.

$$(1) \quad \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i].$$

Eine weitere Quelle sind die Endomorphismen-Ringe von abelschen Gruppen. Zunächst ist die Menge der Endomorphismen einer abelschen Gruppe M (geschrieben $\text{End}(M)$) ein Monoid mit Eins mit der Verknüpfung als Multiplikation. Auf dieser Struktur kann eine Addition definiert werden. Seien $\phi, \psi \in \text{End}(M)$. Wir setzen

$$(2) \quad \forall m \in M: (\phi + \psi)(m) := \phi(m) + \psi(m).$$

Diese Definitionsgleichung ist gleichzeitig der Nachweis dafür, dass es sich tatsächlich um einen Endo handelt. Durch einfaches Ausrechnen können wir zeigen, dass $\text{End}(M)$ mit dieser Addition die Ring-Axiome erfüllt. Damit haben wir $\text{End}(M)$ und deren Unter-Ringe als weitere Ringe zur Verfügung.

1.3. Ring-Darstellung. Ein Unter-Ring von $\text{End}(M)$ ist anders gesehen ein injektiver Ring-Homo

$$(3) \quad i: R \hookrightarrow \text{End}(M).$$

Wir definieren nun allgemeiner:

Definition 1.3.1. (Ring-Darstellung): Sei R ein Ring und M eine abelsche Gruppe. Eine **Ring-Darstellung** von R ist ein Ring-Homo

$$(4) \quad p: R \rightarrow \text{End}(M).$$

Jetzt nutzen wir nicht $\text{End}(M)$ als Quelle für Ringe, sondern wir haben schon einen Ring R und versuchen ihn in $\text{End}(M)$'s zu finden, um ihn besser zu verstehen. Ähnlich wie wir Gruppen in linearen Gruppen von Räumen finden und so zu Gruppen-Darstellungen kommen.

1.4. Ring-Darstellung = Modul. „ \Rightarrow “: Sei $p: R \rightarrow \text{End}(M)$ eine Ring-Darstellung. Wir definieren dann ein Skalar-Produkt von Ring-Elementen r mit Gruppen-Elementen m über

$$(5) \quad rm := p(r)(m).$$

Dieses Produkt erfüllt die Modul-Axiome. Die Beweise sind recht einfach. Hier z. B. :

$$(6) \quad r(m + n) = p(r)(m + n) = p(r)(m) + p(r)(n) = rm + rn$$

„ \Leftarrow “: Sei M ein R -Modul. Wir definieren

$$(7) \quad p: R \rightarrow \text{End}(M)$$

$$(8) \quad r \mapsto \begin{pmatrix} p(r): & M \rightarrow & M \\ & m \mapsto & rm \end{pmatrix}$$

Das heißt, ein Element r wird auf den Endo „Multiplikation mit r von links“ abgebildet. Der Beweis, dass p eine Ring-Darstellung ist, ist wieder sehr einfach.

Der Beweis in beiden Richtungen ist deshalb so einfach, weil die Modul-Axiome nichts anderes sind als die Aussage „Multiplikation mit r von links ist Endo“.

Also gilt **Ring-Darstellung = Modul**

Eine alternative Definition von R -Modul ist somit Ring-Darstellung von R über M .

1.5. Endlich erzeugte abelsche Gruppen. Im Falle einer endlich erzeugten Gruppe können alle Elemente von M als Linearkombination einer endlichen Erzeugermenge $\{b_1, \dots, b_r\}$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} geschrieben werden.

$$(9) \quad m = \sum_{i=1}^r m_i b_i.$$

Sei $r \in R$. Dann gilt auch für die Elemente rb_i :

$$(10) \quad rb_i = \sum_{j=1}^r r_{ij} b_j.$$

Aufgrund der Linearität von Endomorphismen gilt damit.

$$(11) \quad rm = \sum_{i,j=1}^r m_i r_{ij} b_j.$$

Für die Koeffizienten von rm gilt:

$$(12) \quad (rm)_j = \sum_{i=1}^r m_i r_{ij}.$$

Im Falle von endlich erzeugten Gruppen ist eine Darstellung also ein Matrix-Ring mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Nicht alle abelsche Gruppen sind endlich erzeugt. Bekanntes Beispiel ist \mathbb{Q} .

1.6.

1.7.

1.8.

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
- [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
- [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
- [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	ein kommutativer Ring mit Eins
$n\mathbb{Z}$	das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
\vec{x}, \vec{y}	Elemente des Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen. Entspricht in etwa Vektoren