(Höhere Grundlagen) Kategorien

v5.0.1.0.3.6 Dualraum ist Funktor

Kategory GmbH & Co. KG
Präsentiert von Jörg Kunze

Beschreibung

Inhalt. Jeder Vektorraum hat einen Dual-Raum. Das ist die Menge aller linearen Abbildungen in den Grundkörper. Diese Menge ist selbst ausgestattet mit der Struktur eines Vektorraums über demselben Körper.

In Wirklichkeit ist aber diese Zuordnung von Raum zu Dual ein Funktor, d.h. hier steckt weitaus mehr dahinter als der lapidare Satz oben vermuten lässt:

- Der Dualraum zu V ist $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Da $\mathbb{K}$ selbst ein eindimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, ist dies eine normale Hom-Menge.
- $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{K})$ ist kontravarianter Funktor
- Offensichtlich können wir $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ selber mit der Struktur eines Vektorraums versehen. (Es ist überhaupt nicht immer so oder normal, dass das der Fall ist)
- Damit ist auch das Dual ein kontravarianter Funktor
- Somit ist diese Abbildung auch auf Vektorraum-Homomorphismen (lineare Abbildungen) definiert
- D.h. es gibt zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ ein Dual
- Das ist die duale oder transponierte Abbildung (die als Matrix die transponierte Matrix hat)
- Und da wir einen Funktor haben, sind Dual-Bildung und Struktur der Abbildungen miteinander verträglich im folgenden Sinne
  - Das Dual von id_V ist id_{V*}
  - Das Dual von $f \circ g$ ist $g^* \circ f^*$

Da bei dem Dualraum-Funktor Quell- und Ziel-Kategorie die selbe ist, sprechen wir auch von einem Endofunktor, ähnlich wie von einem Endomorphismus.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Axiome der Kategorien, Hom-Funktor, Funktor, kontravarianter Funktor, Dual-Raum, transponierte Abbildung.

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter `https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.3.6%20Dualraum%20ist%20Funktor`

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:
v5.0.1.2.5 (Höher) Kategorien - Kartesisch monoidale Kategorien
`https://youtu.be/uH-xVxwL5xY`

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Transponierte_Matrix#Duale_Abbildungen`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Dualraum`
`https://de.wikipedia.org/wiki/Funktor_(Mathematik)`
`https://ncatlab.org/nlab/show/dual+vector+space`
`https://ncatlab.org/nlab/show/endofunctor`

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
„Categories for the Working Mathematician“
Saunders Mac Lane
1998 | 2nd ed. 1978
Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-98403-2 (ISBN)
`https://www.amazon.de/Categories-Working-Mathematician-Graduate-Mathematics/dp/0387984038`

„Topology, A Categorical Approach“
Tai-Danae Bradley
2020 MIT Press

978-0-262-53935-7 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/52489766-9780262539357-topology

Einige gut Erklärungen finden sich auch in den Einführenden Kapitel von
„An Introduction to Homological Algebra“
Joseph J. Rotman
2009 Springer-Verlag New York Inc.
978-0-387-24527-0 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra

Grundlagen der lineare Algebra und insbesondere der Dualräume finden sich hier:
„Lineare Algebra“
Gerd Fischer, Boris Springborn
2020 Springer Berlin
978-3-662-61644-4 (ISBN)
https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/53880242-9783662616444-lineare-algebra

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.0.1%20Kategorien/v5.0.1.0.3.6%20Dualraum%20ist%20Funktor

1. Dualraum ist kontravarianter Funktor

Im ganzen folgenden Text ist $\mathbb{K}$ ein Körper, $V, W, \cdots$ sind $\mathbb{K}$-Vektorräume und $V^*, W^*, \cdots$ sind die zugehörigen dualen Räume.

1.1. **Dualraum.** Erinnerung: Der Dualraum zu V ist als Menge die Menge der linearen Abbildungen von V in den Grundkörper $\mathbb{K}$ (die sogenannten Linearformen). Also

$$V^* := \{f\colon V \to \mathbb{K} | \text{f ist linear}\}. \tag{1}$$

Da $\mathbb{K}$ selber (ein eindimensionaler) Vektorraum ist, und da die linearen Abbildungen genau die Homomorphismen der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume sind, können wir auch sagen:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}). \tag{2}$$

Diese Menge statten wir nun mit der Struktur eines Vektorraums aus vermöge folgender Definitionen mit $f, g \in V^*, x \in V, \alpha \in \mathbb{K}$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \tag{3}$$

$$(0)(x) := 0 \tag{4}$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha(f(x)). \tag{5}$$

Die so definierten Funktionen sind wieder lineare Abbildungen und V^* erfüllt die Axiome eines $\mathbb{K}$-Vektorraums.

1.2. **Transponierte Abbildung.** Erinnerung: Die zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ transponierte, auch dual genannte, Abbildung f^* ist wie folgt definiert:

$$f^*\colon W^* \to V^* \tag{6}$$

$$h \mapsto h \circ f \tag{7}$$

Oder kürzer $f^* = \_ \circ f$. Als Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"] & \\ W \arrow[r, "h"] & \mathbb{K} \end{tikzcd} \tag{8}$$

Hier werden Pfeile aufeinander abgebildet: der untere Pfeil h auf den diagonalen Pfeil $h \circ f$.

1.3. **Funktor.** Erinnerung: Ein kontravarianter Funktor zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ist ein Kategorien-Anti-Homomorphismus. Das heißt er erhält die Strukturen einer Kategorie, die da wären:

- Objekte
- Morphismen
- Identitäten
- Verknüpfung von Morphismen

Ein Funktor F bildet Objekte, Morphismen und Identitäten jeweils wieder in Objekte, Morphismen (in umgekehrter Richtung) und Identitäten ab und ist anti-verträglich zu Verknüpfungen in folgendem Sinne:

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f). \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"] & F(V) \\ W \arrow[r, "F"] & F(W) \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd} \tag{10}$$

Der kontravarianter Hom-Funktor Hom$(,A)$ ist für jedes $A \in \mathcal{C}$ ein Funktor nach **Set**:

$$\mathrm{Hom}(,A)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set} \tag{11}$$

$$X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A) \tag{12}$$

$$(f\colon X \to Y) \mapsto (\_ \circ f\colon\ \mathrm{Hom}(Y, A) \to \mathrm{Hom}(X, A)) \tag{13}$$

1.4. **Beweis Dualraum ist kontravarianter Funktor.** Male Diagramm mit V -> W und F(W') -> F(V') und eine Variante mit Hom(V,K)

Theorem 1.4.1. (Dualraum ist kontravarianter Funktor): Der Dualraum ist zusammen mit der transponierten Abbildung ein kontravarianter Endofunktor auf der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Beweis. Der Dualraum ist zusammen mit der transponierten Abbildung ist der kontravariante Hom-Funktor Hom$(_, \mathbb{K})$.

Ein paar Details: Der Dualraum ist wieder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die transponierte Abbildung ist wieder eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung und sie geht in die entgegengesetzte Richtung. Die Verträglichkeit mit der Verknüpfung liegt an der Assoziativiät der Verknüpfung:

$$F(f \circ g)(h) = F(g)(F(f)(h)) \tag{14}$$

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g. \tag{15}$$

Die Identitätsabbildungen sind lineare Abbildungen und die transponierte einer Identität ist die Identität auf dem Dualraum, da $h \circ \mathrm{id} = h$. $\square$

2. Schluss

Auf der einen Seite klingt das Wort kontravarianter Funktor vielleicht schlimmer als es ist: wird begegnen ihnen schon im Grundstudium im Bereich normaler handelsüblicher mathematischer Strukturen.

Auf der anderen Seite erkennen wir nun, dass hinter dem Dualraum ein allgemeines Prinzip sich verbirgt, und es mehr ist als eine bloße Zuordnung von Vektorräumen.

Oft erweisen sich die kategorischen Definitionen als die „richtigen" im Sinne der nützlicheren. Darüber hinaus erlauben sie die Anwendung des kategorischen Apparates. Dualraum ist zusammen mit der transponierten Abbildung erhalten hiermit das Abzeichen „kategorisch".

Literatur

[MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

[Bradley2020] Tai-Danae Bradley, *Topology, A Categorical Approach*, 2020 MIT Press, 978-0-262-53935-7 (ISBN)

[Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)

[FischerSpringborn2020] Gerd Fischer, Boris Springborn, *Lineare Algebra*, 2020 Springer Berlin, 978-3-662-61644-4 (ISBN)

Symbolverzeichnis

$A, B, C, \cdots, X, Y, Z$	Objekte
F, G, L, R	Funktoren
$f, g, h, r, s, \cdots$	Homomorphismen
$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$	Kategorien
Set	Die Kategorie der Mengen
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	Die Menge der Homomorphismen von X nach Y
$\mathbb{K}$	Ein Körper
$V, W, \cdots$	$\mathbb{K}$-Vektorräume
$\alpha, \beta, \cdots$	Skalare des Vektorraums also Elemente aus $\mathbb{K}$
$V^*, W^*, \cdots$	Dualräume