

(Höhere Grundlagen) Homologische Algebra

v5.1.1.1.4.5 Quotienten-Moduln

Kategory GmbH & Co. KG

Präsentiert von Jörg Kunze

Copyright (C) 2024 Kategory GmbH & Co. KG

BESCHREIBUNG

Inhalt. Ist eine Äquivalenz-Relation kompatibel zu den Operationen eines Moduls, so bilden deren Äquivalenz-Klassen selber einen Modul. Diesen nennen wir den Quotienten-Modul. Die Äquivalenz-Klasse der 0 ist ein Untermodul.

Umgekehrt definiert jeder Unter-Modul eine kompatible Äquivalenz-Relation.

Die Projektion auf den Quotienten-Modul ist surjektiv. Umgekehrt bilden die Fasern jedes surjektiven Modul-Homomorphismus eine kompatible Äquivalenz-Relation. Der zugehörige Quotienten-Modul ist isomorph zu dem Ziel-Modul.

Damit haben wir eine (bis auf Isomorphie) 1:1 Zuordnung von kompatiblen Äquivalenz-Relationen, Unter-Modulen und surjektiven Modul-Homomorphismen.

Da nicht jeder Epimorphismus surjektiv ist (siehe: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$) ist dieses Konzept stärker als Epi.

Bei der Quotienten-Bildung kann es zu Aufwickelungen kommen. Da sowohl der Ausgangs-Modul und sogar der Ring selber über Wickelungen verfügen kann, ist die Situation im Allgemeinen unübersichtlich. Die Untersuchung dieser Phänomene ist ein Ziel der homologischen Algebra.

Präsentiert. Von Jörg Kunze

Voraussetzungen. Ringe, Gruppen, Moduln, Kategorien, Vektorräume, Unter-Gruppen, Äquivalenz-Relationen, Quotienten in Gruppen und Vektorräumen

Text. Der Begleittext als PDF und als LaTeX findet sich unter <https://github.com/kategory/kategoryMathematik/tree/main/v5%20H%C3%B6here%20Grundlagen/v5.1%20Homologische%20Algebra/v5.1.1.1.4.5%20Quotienten-Moduln>

Meine Videos. Siehe auch in den folgenden Videos:

v5.1.1.1 (Höher) Homologische Algebra - Moduln
https://youtu.be/JY43_07kNmA

v5.1.1.1.4 (Höher) Homologische Algebra - Unter-Moduln
<https://youtu.be/4g2TgQx7JkI>

v5.0.1.0.5 (Höher) Kategorien - Mono Epi Null
https://youtu.be/n4-qZJK_sH0

Quellen. Siehe auch in den folgenden Seiten:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Quotientenmodul>
<https://ncatlab.org/nlab/show/quotient+module>

Buch. Grundlage ist folgendes Buch:
 „An Introduction to Homological Algebra“

Joseph J. Rotman

2009

Springer-Verlag New York Inc.

978-0-387-24527-0 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/6439666-9780387245270-an-introduction-to-homological-algebra>

Oft zitiert:

„An Introduction to Homological Algebra“

Charles A. Weibel

1995

Cambridge University Press

978-0-521-55987-4 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/510327-9780521559874-an-introduction-to-homological-algebra>

Ohne Kategorien-Theorie:

„Algèbre 10. Algèbre homologique“

Nicolas Bourbaki

1980

Springer-Verlag

978-3-540-34492-6 (ISBN)

<https://www.lehmanns.de/shop/mathematik-informatik/7416782-9783540344926-algebre>

Lizenz. Dieser Text und das Video sind freie Software. Sie können es unter den Bedingungen der GNU General Public License, wie von der Free Software Foundation veröffentlicht, weitergeben und/oder modifizieren, entweder gemäß Version 3 der Lizenz oder (nach Ihrer Option) jeder späteren Version.

Die Veröffentlichung von Text und Video erfolgt in der Hoffnung, dass es Ihnen von Nutzen sein wird, aber OHNE IRGENDNEINE GARANTIE, sogar ohne die implizite Garantie der MARKTREIFE oder der VERWENDBARKEIT FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK. Details finden Sie in der GNU General Public License.

Sie sollten ein Exemplar der GNU General Public License zusammen mit diesem Text erhalten haben (zu finden im selben Git-Projekt). Falls nicht, siehe <http://www.gnu.org/licenses/>.

Das Video. Das Video hierzu ist zu finden unter [uups](#)

1. v5.1.1.1.4.5 QUOTIENTEN-MODULN

1.1. Modul-kompatible Äquivalenz-Relationen. Sei R ein Ring mit 1 und M ein R -Modul. Sei \sim eine Äquivalenz-Relation auf M .

Definition 1.1.1. (Modul-kompatibel): Die Äquivalenz-Relation \sim auf dem R -Modul M ist **Modul-kompatibel**, falls sie mit der Modulstruktur in folgendem Sinne verträglich ist. Für alle $x_1, x_2, y \in M$ und $r \in R$

$$(1) \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow y + x_1 \sim y + x_2$$

$$(2) \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow -x_1 \sim -x_2$$

$$(3) \quad x_1 \sim x_2 \Rightarrow r \cdot x_1 \sim r \cdot x_2$$

Beachte: die Null-ären Operatoren 0 und 1 müssen hier nicht berücksichtigt werden, weil in ihnen keine variablen Elemente vorkommen, die zu irgendetwas äquivalent sein müssten.

1.2. Äquivalenz-Relationen vs Unter-Moduln.

Satz 1.2.1. (Modul-kompatible Äquivalenz-Relation ist Unter-Modul): Sei \sim eine modul-kompatible Äquivalenz-Relation. Dann ist

$$(4) \quad N := \{x \mid x \sim 0\}$$

Unter-Modul.

Beweis. Wir müssen die Abgeschlossenheit von N gegenüber den Operatoren zeigen. Seien dazu $x, y \in N$ also $x \sim 0$ und $y \sim 0$. Damit haben wir

$$(5) \quad x + y \sim x + 0 = x \sim 0.$$

Und damit $x + y \in N$. $0 \in N$ da $0 \sim 0$, da \sim als Äquivalenz-Relation reflexiv ist.

$$(6) \quad -x \sim -0 = 0.$$

Und schließlich

$$(7) \quad r \cdot x \sim r \cdot 0 = 0.$$

□

Satz 1.2.2. (Unter-Modul ist modul-kompatible Äquivalenz-Relation): Sei N ein Unter-Modul. Dann ist

$$(8) \quad x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in N$$

eine modul-kompatible Äquivalenz-Relation.

Beweis. Für die Eigenschaften einer Äquivalenz-Relation benötigen wir nur die Unter-Gruppen-Eigenschaften. Die Modul-Eigenschaften brauchen wir für die Kompatibilität mit der Skalar-Multiplikation.

Reflexiv: $x - x = 0 \in N$.

Symmetrisch: $x - y = -(y - x) \in N$.

Transitiv: $x - z = (x - y) + (y - z) \in N$.

$+$: $(y + x_1) - (y + x_2) = x_1 - x_2 \in N$.

$-$: $(-x_1) - (-x_2) = -(x_1 - x_2) \in N$.

\cdot : $rx_1 - rx_2 = r(x_1 - x_2) \in N$. □

VORSICHT: Nicht alle Unter-Gruppen von M sind auch Unter-Moduln. Die Multiplikation mit Elementen aus R können die Gruppen-Elemente auch drehen. In den Beweisen oben sehen wir, dass die Kompatibilität der Skalarmultiplikation dem Distributiv-Gesetz und der Abgeschlossenheit entspricht.

Damit haben wir eine 1:1-Beziehung zwischen Unter-Moduln und modul-kompatiblen Äquivalenz-Relationen.

1.3. Ausschließlich Unter-Moduln produzieren Quotienten-Moduln.

Satz 1.3.1. (Ausschließlich Unter-Moduln produzieren Quotienten-Moduln): Sei M ein R -Modul und N eine Unter-Gruppe. Sei M/N ein R -Modul. Dann ist N sogar Unter- R -Modul.

Beweis. Wir müssen die Abgeschlossenheit gegenüber der Skalar-Multiplikation mit Elementen aus R zeigen. Seien dazu $n \in N$ und $r \in R$ beliebig. Da M/N ein R -Modul ist, ist (in M/N)

$$(9) \quad 0 = r \cdot 0 = r \cdot \llbracket 0 \rrbracket = r \cdot \llbracket n \rrbracket = \llbracket r \cdot n \rrbracket.$$

Daraus folgt $r \cdot n \in N$. □

1.4. Projektion. Die Projektion

$$(10) \quad p: M \rightarrow M/N$$

$$(11) \quad m \mapsto \llbracket m \rrbracket$$

ist ein R -Modul-Homomorphismus, was gezeigt werden muss. Dieser ist surjektiv, da jedes Element von M/N von der Form $\llbracket m \rrbracket$ und damit Bild von m ist.

1.5. Surjektiv. Sei $f: M \rightarrow L$ ein surjektiver R -Modul-Homomorphismus. Die Fasern von f , also die Urbilder der $\{l\}$ für $l \in L$ sind Äquivalenz-Klassen. Zwei Elemente in M sind äquivalent, wenn sie das selbe Bild in L haben.

Satz 1.5.1. (Fasern einer Surjektion ergeben modul-verträgliche Äquivalenz-Relation): Mit den Bezeichnungen von oben erzeugen die Fasern eines surjektiven R -Modul-Homomorphismus eine modul-verträgliche Äquivalenz-Relation.

Beweis. Sei $x_1 \sim x_2$ also $f(x_1) = f(x_2)$ und $y \in M$ beliebig.

$$(12) \quad f(y + x_1) = f(y) + f(x_1) = f(y) + f(x_2) = f(y + x_2)$$

$$(13) \quad f(-x_1) = -f(x_1) = -f(x_2) = f(-x_2)$$

$$(14) \quad f(rx_1) = rf(x_1) = rf(x_2) = f(rx_2)$$

□

Ähnlich wie bei Gruppen können wir zeigen

Satz 1.5.2. (Ziel eines surjektiven Morphismus ist isomorph zu Quotient): Der Quotient der durch die Fasern eines surjektiven R -Modul-Homomorphismus f erzeugten Äquivalenz-Relation ist isomorph zum Ziel (Codomain) von f .

Damit haben wir (bis auf Isomorphie) eine 1:1-Beziehung zwischen Unter-Moduln, modul-kompatiblen Äquivalenz-Relationen und surjektiven R -Modul-Homomorphismen.

1.6. Quotienten-Projektion ist stärker als epi. Da nicht alle R -Modul-Epimorphismen surjektiv sind (siehe den \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$), aber alle Surjektionen epi sind, ist die Eigenschaft, Quotienten-Projektion zu sein, stärker als epi.

1.7. Aufwickeln von Moduln. Sei I ein echtes Ideal von R , also $0 \subsetneq I \subsetneq R$. Sei M ein R -Modul. Wir betrachten den Unter-Modul $IM = \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$. Damit bilden wir den Quotienten M/IM .

...

Wenn I Elemente aus \mathbb{Z} enthält (genauer Elemente der Form $n \cdot 1$, wo $n \in \mathbb{Z}$ und $1 \in R$), sagen wir z , haben wir sogar $l + l + \dots + l = 0$, mit z mal das l in der Summe. Und das auch dann, wenn dies in M nicht der Fall war. Das empfinde ich als Aufwickeln eines Moduls.

LITERATUR

- [Rotman2009] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2009 Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-24527-0 (ISBN)
 [Bourbaki1970] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 1-3*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-33849-9 (ISBN)
 [Bourbaki1980] Nicolas Bourbaki, *Algèbre 10. Algèbre homologique*, 2006 Springer-Verlag, 978-3-540-34492-6 (ISBN)
 [MacLane1978] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag New York Inc., 978-0-387-98403-2 (ISBN)

SYMBOLVERZEICHNIS

R	Ein kommutativer Ring mit Eins
G	Ein Generierendensystem
$*$	Verknüpfung der Gruppe G
$n\mathbb{Z}$	Das Ideal aller Vielfachen von n in \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Der Restklassenring modulo n
\mathbb{K}	Ein Körper
x, y	Elemente eines Moduls, wenn wir sie von den Skalaren abheben wollen.
	Entspricht in etwa Vektoren
r	Element von R^n
ϕ	Gruppen-Homomorphismus
$Z(R)$	Zentrum des Rings R
$\text{Hom}(X, Y)$	Menge/Gruppe der R -Homomorphismen von X nach Y
IM	$= \{im \mid i \in I \wedge m \in M\}$
$\langle G \rangle$	Der von den Elementen aus G generierte Modul