Функциональный анализ

Полные метрические пространства

Опр: (X, ρ) — *метрическое пространство*, если X — множество, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — *метрика*, и выполняются следующие условия:

- $\rho(x, y) \geq 0, \qquad \forall x, y \in X$
- $\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y, \qquad \forall x, y \in X$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x), \qquad \forall x, y \in X$
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \qquad \forall x, y, z \in X$

Опр: $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — *база топологии* (т.е. семейство открытых подмножеств, через которые любой элемент представим в виде их объединения), где $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — *открытый шар* , $r > 0$, $x \in X$

Опр: U — *открытое* множество, если $\forall x \in U \;\; \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$

Опр: $\{B_{r_n}(x)\}_{r_n \in \mathbb{Q}}$ — *счётная* база в X

Опр: $A \subset X$, A — *замкнутое* $\;\Leftrightarrow\;$ $X \setminus A$ — открытое (или $\forall \; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :$ $x_n \in A \;\; \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in A$)

Опр: $D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$ — *замкнутый круг*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$$

Опр: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *фундаментальная последовательность* в X, если $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon$

Свойство: (x, ρ) — метрическое пр-во, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$
$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \;\;\Rightarrow\;\; \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность

Опр: (X, ρ) — метр. пр-во, X — *полное*, если $\forall \;\{x_n\}$ — фунд. $\;\Rightarrow\;$ $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$

Опр: $A \in X, (X, \rho), A$ — *ограниченное*, если $\exists x_0 \in X, R > 0 : A \subset B_R(x_0)$

Теорема (св-ва фунд. посл-ти):
(X, ρ) — метрическое пр-во, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фунд. пос-ть $\Rightarrow$

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, т. е. $\exists a \in X, R > 0 : x_n \in B_R(a) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подп-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} x_n = a$
3. $\{\epsilon_k\}_{k=0}^{\infty}, \epsilon > 0 \ \ \Rightarrow \ \ \exists$ подпос-ть $\{x_{n_k}\} : \forall j > k \in \mathbb{N} \ \ \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \epsilon$