Функциональный анализ

Полные метрические пространства

Опр: (X, ρ) — *метрическое пространство*, если X — множество,
$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — *метрика*, и выполняются следующие условия:

- $\rho(x,y) \geq 0, \qquad \forall x,y \in X$
- $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y, \qquad \forall x,y \in X$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x), \qquad \forall x,y \in X$
- $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y), \qquad \forall x,y,z \in X$

Опр: $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — *база топологии* (т.е. семейство открытых подмножеств, через которые любой элемент представим в виде их объединения), где $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ — *открытый шар* , $r > 0$, $x \in X$

Опр: U — *открытое* множество, если $\forall x \in U \;\; \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$

Опр: $\{B_{r_n}(x)\}_{r_n \in \mathbb{Q}}$ — *счётная* база в X

Опр: $A \subset X$, A — *замкнутое* $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ — открытое (или $\forall \; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :$ $x_n \in A \;\; \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in A$)

Опр: $D_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$ — *замкнутый круг*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$$

Опр: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *фундаментальная последовательность* в X, если $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon$

Свойство: (x, ρ) — метрическое пр-во, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$
$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \;\;\Rightarrow\;\; \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность

Опр: (X, ρ) — метр. пр-во, X — *полное*, если $\forall \; \{x_n\}$ — фунд. $\;\Rightarrow\;$ $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$

Опр: $A \in X, (X, \rho), A$ — *ограниченное*, если $\exists x_0 \in X, R > 0 : A \subset B_R(x_0)$

Теорема (св-ва фунд. посл-ти):
(X, ρ) — метрическое пр-во, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фунд. пос-ть $\Rightarrow$

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, т. е. $\exists a \in X, R > 0 : x_n \in B_R(a) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подп-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} x_n = a$
3. $\{\epsilon_k\}_{k=0}^{\infty}, \epsilon > 0 \ \Rightarrow \ \exists$ подпос-ть $\{x_{n_k}\} : \forall j > k \in \mathbb{N} \ \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \epsilon$

Ба́наховы пространства

Опр: X — линейное пр-во над полем k ($k = \mathbb{R} \mid\mid k = \mathbb{C}$); $p : X \to \mathbb{R}$, p — *полунорма*, если:

1. $p(x + y) \le p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \qquad \forall x \in X, \lambda \in k$

Свойство (полунормы):
X — лин. пр-во, p — полунорма $\Rightarrow$ $p(\mathbb{O}) = 0$, $p(x) = p(-x)$, $p(x) \ge 0 \ \forall x \in X$

Опр: X — лин. пр-во над k, p — *норма*, если $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O} \in X$

Опр: $(X, ||\cdot||)$ — *нормированное* пр-во; $\rho(x, y) := ||x - y||$; (аксиомы нормы $\Rightarrow$ аксиомы метрики)

Опр: $(X, ||\cdot||)$ — *банахово* пр-во, если (X, ρ) — полное

Опр:

1. X — лин. пр-во над k ($k = \mathbb{R} \mid\mid k = \mathbb{C}$); $L \subset X$, L — подпространство *в алгебраическом смысле*, если L — лин. подпр-во над k, т.е. $\forall \ \alpha, \beta \in k, \ x, y \in L \ \Rightarrow \ \alpha x + \beta y \in L$
2. $(X, ||\cdot||)$ — лин. нормир. пр-во, $L \subset X, L$ — *подпространство*, если L — подпр-во в алгебр. смысле и замкнуто

Опр: $(X, ||\cdot||)$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in X$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$

1. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — *сходится*, если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in X, S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — *сходится абсолютно*, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ — сходится

Теорема (Критерий полноты нормированного пространства):
$(X, ||\cdot||)$, X — полное $\Leftrightarrow$ из абсолютной сходимости $\Rightarrow$ сходимость

Пространство ограниченных функций

Опр: A — мн-во, $m(A) = \{f : A \to \mathbb{R}(|| \, \mathbb{C}) \mid f$ — огр. (т.е. $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq +\infty)\}$ — мн-во всех ограниченных ф-ий на A; $||f||_\infty = sup_{x \in A}|f(x)|$

Теорема: $m(A)$ — банахово пр-во