**Задание.**

Пусть - последовательность независимых случайных величин c .

1. Докажите, что последовательность ,

является мартингалом относительно потока .

Найдите квадратическую характеристику .

1. Для заданных , смоделируйте нормально распределенных последовательностей , вычислите соответствующие последовательности , используя заданные и . Несколько последовательностей выведите на печать.
2. Изучите на основе смоделированных траекторий закон распределения СВ (Постройте гистограмму, определите вид распределения, оцените параметры, проверьте по критерию Пирсона). Экспериментально проверьте, зависит ли этот закон от закона распределения последовательности .

*Данные:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1600 | 1200 | 1 | -3 | 0,6 |

**Решение:**

1. Докажем, что последовательность является мартингалом относительно потока .

*⇒* является мартингалом относительно потока .

Найдем квадратическую характеристику :

1. Для заданных , смоделируем нормально распределенных последовательностей .

eps = np.random.normal(0, sigma, (M, N+1))

ksi = np.zeros((M, N+1))

Вычислим соответствующие последовательности , используя заданные и .

for i in range(M):

  ksi[i][0] = eps[i][0]

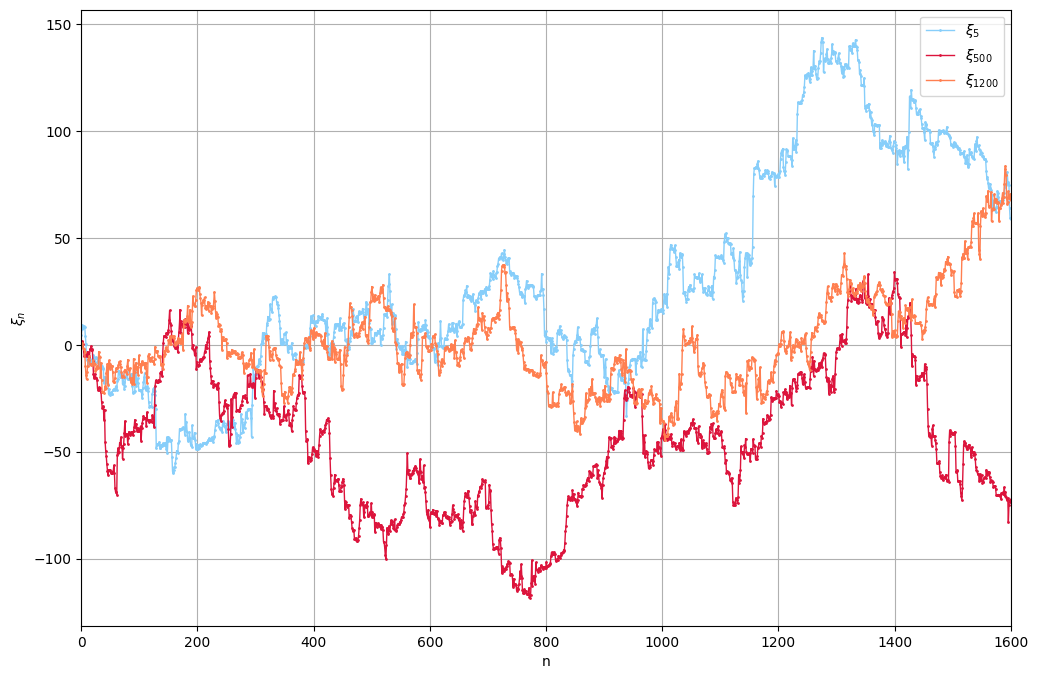
  ksi[i][1] = eps[i][0] + eps[i][1] \* (1 + alpha \* eps[i][0])

for i in range(2, M):

  for j in range(N+1):

    ksi[i][j] = ksi[i][j-1] + eps[i][j] \* (1 + alpha \* eps[i][j-1] + beta \* eps[i][j-2])

Выведем на печать последовательности , , .



1. Изучим на основе смоделированных траекторий закон распределения СВ .

Построим случайную величину

ksi\_sq = np.zeros((M, N))

for i in range(M):

  ksi\_sq[i][0] = (1 + alpha \* eps[i][0])\*\*2 \* (sigma\*\*2)

for i in range(M):

  for j in range(1, N):

    ksi\_sq[i][j] = ksi\_sq[i][j-1] + (sigma\*\*2) \* (1 + alpha \* eps[i][j] + beta \* eps[i][j-1])\*\*2

zeta = np.zeros((M, N))

for i in range(M):

  for j in range(N):

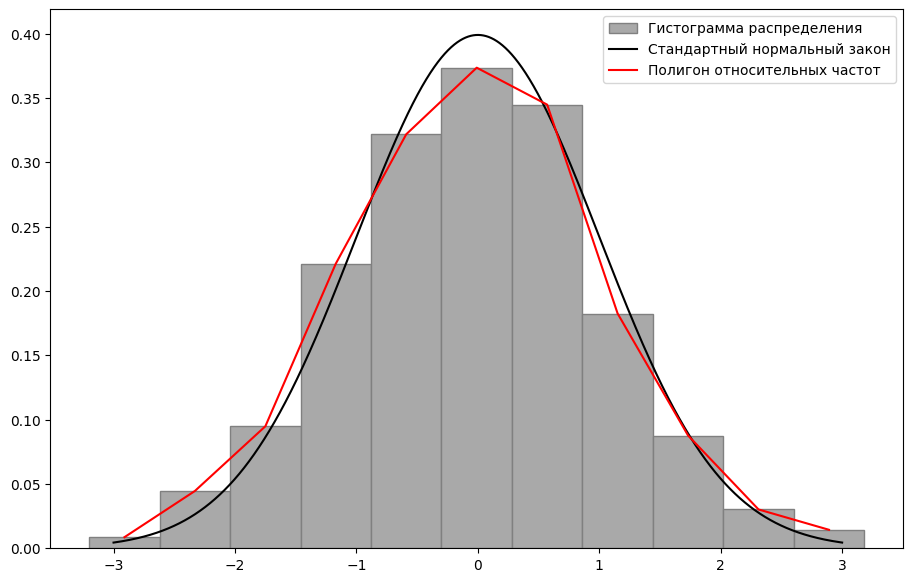
    zeta[i][j] = ksi[i][j] / ((ksi\_sq[i][j])\*\*(1/2))

Построим гистограмму распределения .

Группировка данных по правилу Стёрджеса:

l = math.floor(1 + 3.32 \* math.log10(M))

Гистограмма распредения , N=1600:



Из построенной гистограммы видно, что случайная величина распределена по стандартному нормальному закону.

Оценим неизвестные параметры при N=1600:

Проверим по критерию Пирсона гипотезу : выборка из стандартного нормального распределения.

Для этого построим интервальный вариационный ряд.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Интервал | 𝜈𝑖 | 𝑝𝑖 | 𝑀 ∙ 𝑝𝑖 |
|  | 6 | 0.0066045 | 7.9254 |
|  | 31 | 0.0207702 | 24.9242 |
|  | 66 | 0.0589662 | 70.7595 |
|  | 154 | 0.1236611 | 148.3933 |
|  | 224 | 0.1916043 | 229.9252 |
|  | 260 | 0.2193644 | 263.2373 |
|  | 240 | 0.1855796 | 222.6955 |
|  | 127 | 0.1160057 | 139.2069 |
|  | 61 | 0.0535753 | 64.2903 |
|  | 21 | 0.0182771 | 21.9325 |
|  | 10 | 0.0055916 | 6.7099 |

Здесь 𝜈𝑖 – эмпирические частоты попадания в интервал;

𝑝𝑖 – теоретическая вероятность попадания в интервал, вычисляется по формулам:

𝑝𝑖 = 𝐹(𝑏) − 𝐹(𝑎), 𝑖 = 2 … 10,

𝑝1 = 𝐹(𝑏) − 𝐹(−∞),

𝑝11 = 𝐹(+∞) − 𝐹(𝑎),

где 𝐹(𝑏), 𝐹(𝑎) – значения функции распределения на правой и левой границе интервала, соответственно;

𝑀 ∙ 𝑝𝑖 – теоретические частоты попадания в интервал при гипотезе 𝐻0.

Проверим гипотезу на уровне *.* Вычислим статистику:

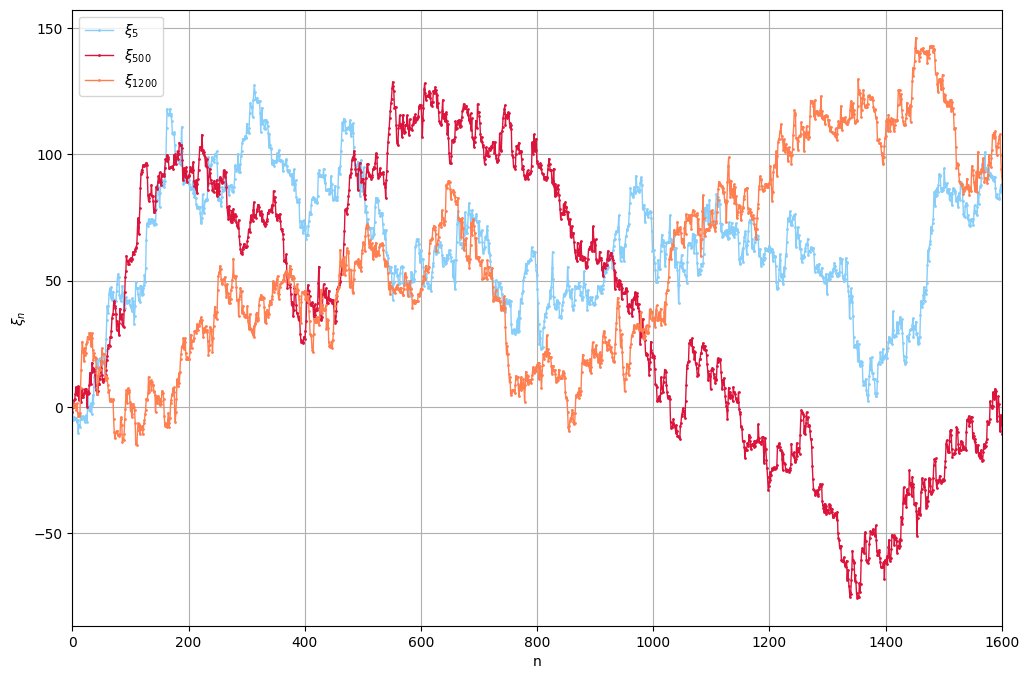
Число интервалов *m = 11.* Тогда *m – 1 – 2 = 8.*

Получаем, что , следовательно, гипотеза принимается на уровне доверия *0,95*: распределена по стандартному нормальному закону.

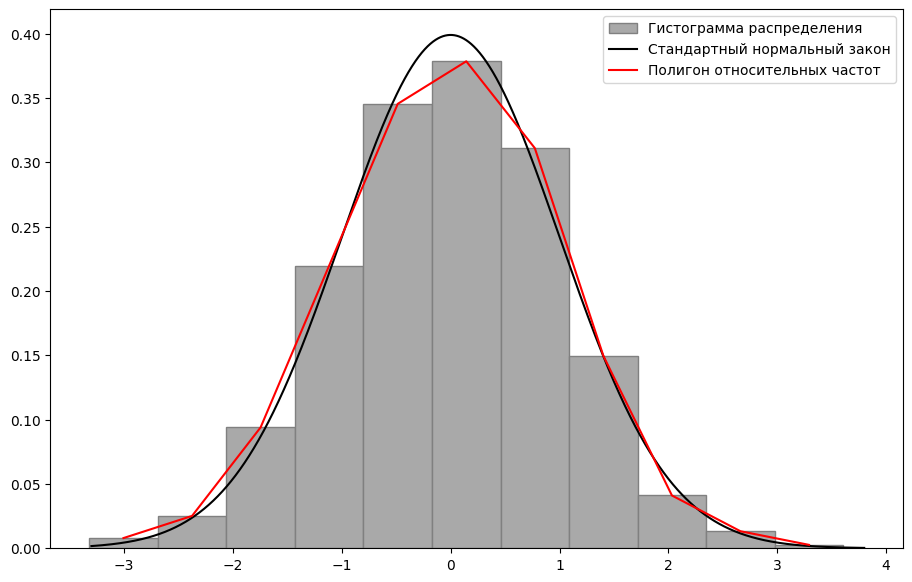
* Экспериментально проверим, зависит ли закон от закона распределения последовательности .

Пусть .

Тогда получим следующие траектории:



Построим гистограмму распределения для новой случайной   
величины , N=1600:



Оценим параметры методом моментов:

Проверим по критерию Пирсона гипотезу : выборка из стандартного нормального распределения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Интервал | 𝜈𝑖 | 𝑝𝑖 | 𝑀 ∙ 𝑝𝑖 |
|  | 6 | 0.003691 | 4.4289 |
|  | 19 | 0.016616 | 19.9398 |
|  | 71 | 0.058115 | 69.7379 |
|  | 166 | 0.138073 | 165.6873 |
|  | 261 | 0.222938 | 267.5259 |
|  | 286 | 0.244695 | 293.6334 |
|  | 235 | 0.182578 | 219.0934 |
|  | 113 | 0.092596 | 111.1146 |
|  | 31 | 0.031908 | 38.2898 |
|  | 10 | 0.007467 | 8.9608 |
|  | 2 | 0.001324 | 1.5883 |

Проверим гипотезу на уровне *.* Вычислим статистику:

Число интервалов *m = 11.* Тогда *m – 1 – 2 = 8.*

Получаем, что , следовательно, гипотеза принимается на уровне доверия *0,95*: при условии, что , также распределена по стандартному нормальному закону. Следовательно, закон распределения не зависит от закона распределения .

**Выводы:**

В ходе выполнения домашней работы был построен мартингал относительно потока . Была вычислена его квадратичная характеристика. Также было показано, что случайная величина имеет стандартное нормальное распределение, не зависящее от закона распределения с учётом того, что для рассматриваемых   
законов .