TIN - Úkol 1

Kateřina Fořtová
xforto00

1. $q = ar + bs$

$r = br + bs + cq$

$s = \varepsilon + bq$

---

dosazení s do r

$r = br + b(\varepsilon + bq) + cq$

$r = br + b + bbq + cq$

$r = b^*(b + bbq + cq)$

$r = b^*b + b^*bbq + b^*cq$

$X = qX + p$

$X = q^*p$

dosazení r do q, dosazení s do q

$q = a(b^*b + b^*bbq + b^*cq) + b \cdot (\varepsilon + bq)$

$q = ab^*b + ab^*bbq + ab^*cq + b + bbq$

$q = (ab^*bb + ab^*c + bb)q + ab^*b + b$

$q = (ab^*bb + ab^*c + bb)^*(ab^*b + b)$

2. Dokažte, že $L_1 = \{a^i b^j a^k b^k \mid k = i+j\} \notin \mathcal{L}_2$

Důkaz sporem: Předpokládejme, že $L_1 \in \mathcal{L}_2$

Pak dle věty pro Pumping lemmu pro BKJ platí:

$\exists p > 0 : \forall z \in L_1 : |z| \geq p \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* :$

$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : uv^i w x^i y \in L_1$.

Pro libovolné $p > 0$ zvolíme slovo $z = a^p b^p a^{2p} b^{2p}$ ($z \in L_1 \wedge |z| = p + p + 2p + 2p = 6p \geq p$

Dále uvažme všechny rozdělení $z = uvwxy$, kde $vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq p$

1. $vwx = a^m$: Při volbě $i \neq 1$ ve slově $uv^i w x^i y$ porušíme pravidlo, že počet a a b v druhé části slova má být roven součtu počtu a a b v první části slova
2. $vwx = b^m$: stejně jako v 1.
3. $vwx = a^m b^n$: Při volbě $i \neq 1$ ve slově $uv^i w x^i y$ porušíme pravidlo, že součet počtu a a b v první části slova je roven počtu a a taky počtu b v druhé části slova
4. $vwx = a^n b^m$: stejně jako v 3.

$\square$

SPOR, tedy $L_1 \notin \mathcal{L}_2$

3. $L_2(G_2) = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, \#\}, P, S)$

$P: S \to aXa \mid aSb \mid bYa \mid bZb \mid \#$

$X \to aXa \mid bYa \mid \#$

$Y \to bYa \mid \#$

$Z \to bZb \mid bYa \mid \#$

• RZA s. analýza zdola nahoru

$P_2 = (\{q, r\}, \{a, b, \#\}, \{a, b, S, X, Y, Z, \perp\}, \delta, q, \perp, \{r\})$

pravidla pro neterminály:

$\delta(q, \varepsilon, aXa) = \{(q, S), (q, X)\}$

$\delta(q, \varepsilon, aSb) = \{(q, S)\}$

$\delta(q, \varepsilon, bYa) = \{(q, S), (q, X), (q, Y), (q, Z)\}$

$\delta(q, \varepsilon, bZb) = \{(q, S), (q, Z)\}$

$\delta(q, \varepsilon, \#) = \{(q, S), (q, X), (q, Y), (q, Z)\}$

pravidla pro terminály:

$\delta(q, a, \varepsilon) = \{(q, a)\}$

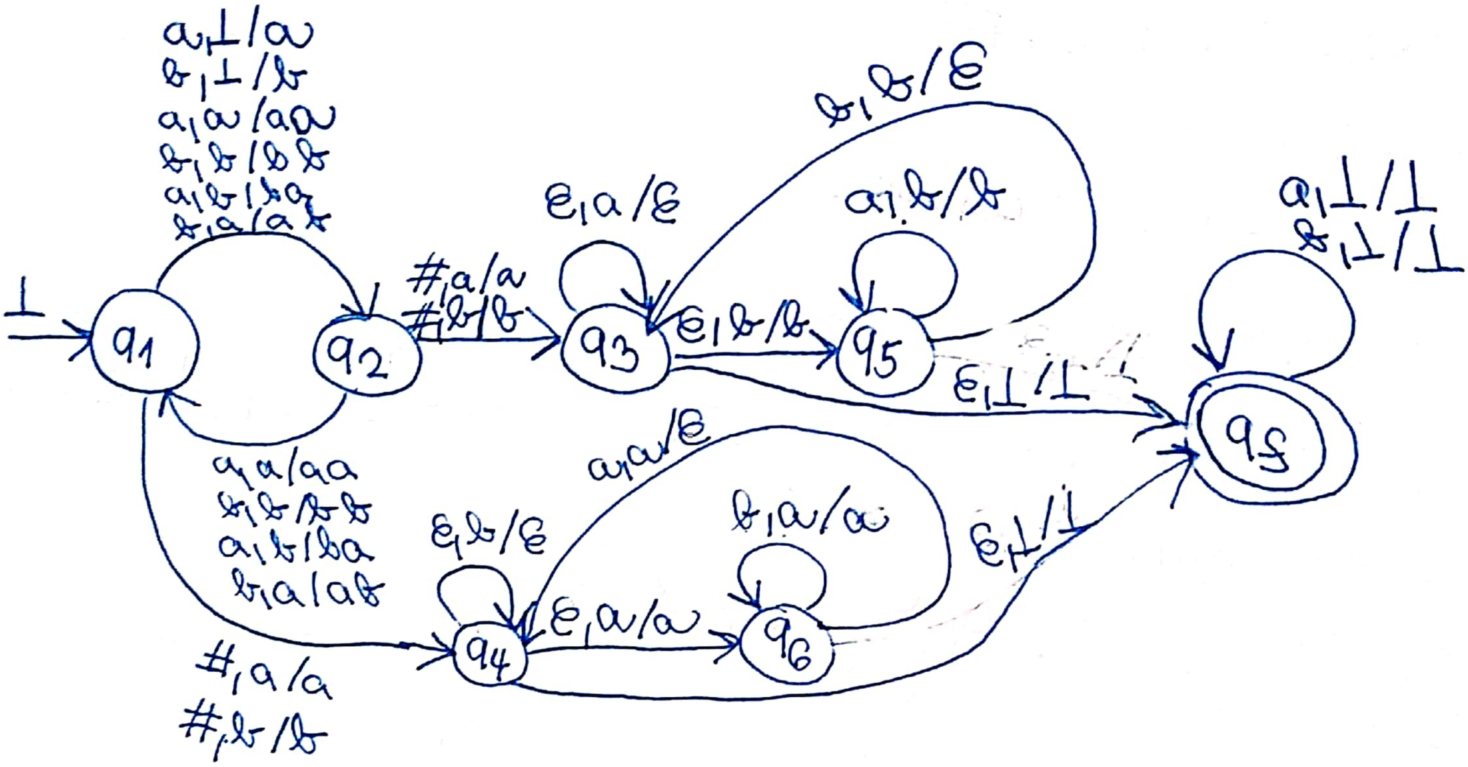
$\delta(q, b, \varepsilon) = \{(q, b)\}$

$\delta(q, \#, \varepsilon) = \{(q, \#)\}$

speciální pravidlo sloužící k akceptování:

$\delta(q, \varepsilon, S\perp) = \{(r, \varepsilon)\}$

4.


⊥
a,⊥/a
b,⊥/b
a,a/aa
b,b/bb
a,b/ba
b,a/ab
q1
q2
a,a/aa
b,b/bb
a,b/ba
b,a/ab
#,a/a
#,b/b
#,a/a
#,b/b
ε,a/ε
q3
ε,b/b
b,b/ε
a,b/b
q5
ε,⊥/⊥
a,⊥/⊥
b,⊥/⊥
qf
ε,b/ε
q4
ε,a/a
a,a/ε
b,a/a
q6
ε,⊥/⊥

5.a) $\mathcal{L}_2$ nejsou uzavřené vůči doplňku, jsou uzavřené vůči sjednocení

$\mathcal{L}_3$ jsou uzavřené vůči doplňku, sjednocení

stačí ověřit pro levou stranu implikace 1=>?, protože 0=>cokoliv je 1

ověření 1=>?

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$

díky uzávěrovým vlastnostem nad $\mathcal{L}_3$ $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3, \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ a

$\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$

$\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ tedy náleží i do $\mathcal{L}_2$, protože všechny jazyky z $\mathcal{L}_3$ náleží taky do $\mathcal{L}_2$ - tedy pokud jazyk L spadá do $\mathcal{L}_3$, tak spadá taky do $\mathcal{L}_2$

1 => 1 platí

pro nulovou levou stranu implikace již nemusíme ověřovat, protože vždy dostaneme platné tvrzení

Tvrzení platí a bylo výše dokázáno.

c) Důkaz neplatného tvrzení 1=>0

Předpokládejme, že $L_1 = L_2$ a $L_1 \in \mathcal{L}_2$ (tedy i $L_2 \in \mathcal{L}_2$). Jelikož nejsou $\mathcal{L}_2$ uzavřené vůči doplňku, tak musí existovat takový L_1 že: $\overline{L_1} \notin \mathcal{L}_2$, tedy také $\overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$. Dále provedeme sjednocení $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, ale je zřejmé, že protože $\overline{L_1} \notin \mathcal{L}_2$ a $\overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$, tak také $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$. 1=>0 neplatí

Tvrzení neplatí a bylo to výše dokázáno.

d) Důkaz platného tvrzení 1=>1, 0=>cokoliv netřeba dokazovat

Předpokládejme, že $L_1 = L_2$, tedy $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2^D$. DCFL, kam patří L_1 a L2 jsou uzavřené vůči doplňku, ale neuzavřené vůči sjednocení. Tedy $\overline{L_1}, \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$, ale musí existovat takový jazyk L_1, že $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2^D$. Obecně $\mathcal{L}_2$ jsou však ale uzavřeny vůči sjednocení a $\mathcal{L}_2^D$ je podmnožinou $\mathcal{L}_2$. Tedy $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$.

Tvrzení platí a bylo to výše dokázáno