WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Katarzyna Sułtanowa

Projekt

PRACA INŻYNIERSKA

Opiekun pracy:
dr inż. Mariusz Borkowski prof. PRz

Rzeszów, 2025

Spis treści

Treść zadania

Dla zadanego ciągu liczb wypisz wszystkie elementy powtarzające się, pod warunkiem że elementy te występują w ciągu w odległości nie większej niż M.

Przykład:

Wejście: [1, 0, 9, 3, 4, 5, 1, 8, 1, 9, 6, 6, 7, 6] M=3

Wyjście: 1, 6

Wejście: [2, 4, 8, 4, 5, 5, 9] M=1

Wyjście: 5

Wejście: [3, 4, 9, 5, 3, 9] M=1

Wyjście: Brak elementów spełniających zadane kryteria.

1. Rozwiązanie - podejście pierwsze(Brute force)

1.1. Analiza problemu

Pierwsze podejście siłowe do rozwiązania tego zadania polegało na brute force, czyli sprawdzeniu każdej pary liczb w tablicy i porównaniu ich, bez optymalizacji. Zdodnie z warunkami zadania ciąg dany na wejściu składa się z liczb naturalnych. Najpierw musimy wczytać dane do tablicy. Tablica vector<int> Tab jest zaalokowana dynamicznie, więc nie musimy podawać jej rozmiaru na samym początku. Podejdźmy do napisania algorytmu sposobem Brute Force, czyli sprawdzamy każdą możliwą pare, a potem sprawdzamy czy znajdują się te elementy na potrzebnej nam długości.

1. Dane wejściowe:

- Liczby do tablicy: Program prosi użytkownika o wprowadzanie liczb do tablicy. Wprowadzenie liczby większej lub równej 10 kończy proces wprowadzania liczb. Wprowadzone liczby (mniejsze niż 10) są zapisywane do tablicy Tab.

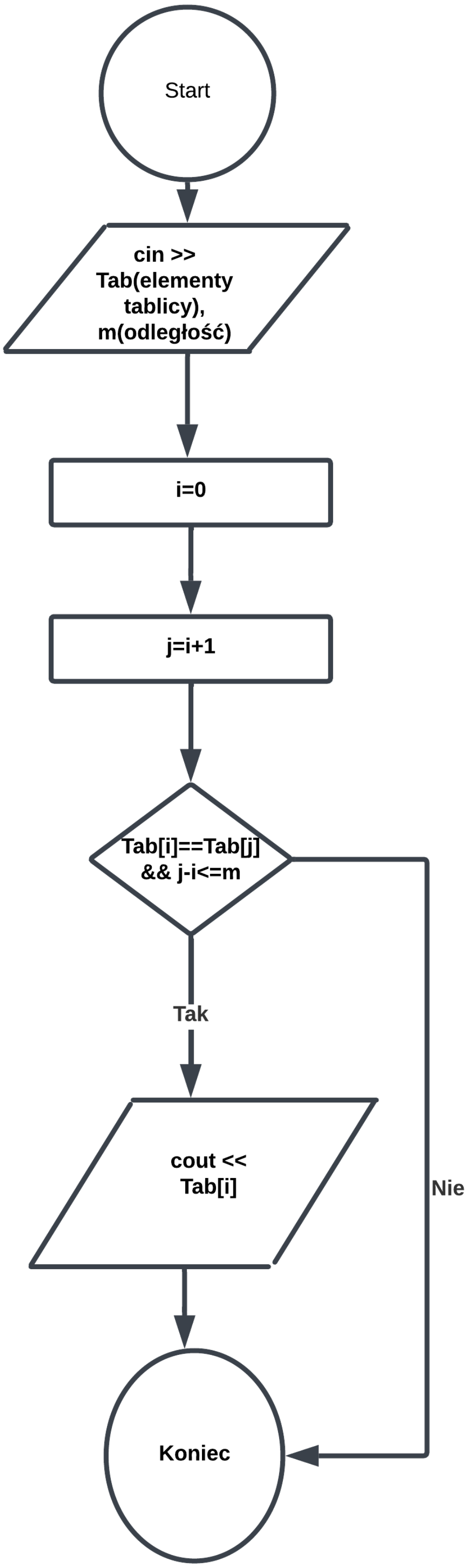
- Wartość odległości m: Program następnie prosi o wprowadzenie liczby m, która jest określoną odległością. Wartość ta musi być większa niż 0, inaczej program kończy działanie z komunikatem o błędzie.

2. Dane wyjściowe:

- Jeśli program znajdzie odpowiednie pary: program wypisuje te liczby na ekranie, po jednym dla każdej liczby, która występuje więcej niż raz.

- Jeśli program nie znalazł par, spełniających podane kryteria lub odległość podana niewłaściwe: program wypisze komunikat, że brak jest elementów spełniających kryteria.

1.2. Schemat blokowy algorytmu



1.3. Algorytm zapisany w pseudokodzie

1 Input:

Tab[i] // elementy tablicy

m // odległość

3 Output:

Tab[i] // element powtarzający się na zadanej odległości

4 if m>0

5 bool znalazlem = false; // Zmienna do śledzenia, czy znaleziono jakąkolwiek liczbę

6 int i=0

7 int j=i+1

8 if (Tab[i] == Tab[j] j-i <= m)

9 znalazlem=true 10 cout « Tab[i]

11 Zakończ program.

1.4. Sprawdzenie poprawności algorytmu poprzez „ołówkowe” rozwiązanie problemu

Wejście: [2, 4, 8, 4, 5, 5, 9] M=1

i	j	Tab[i]	Tab[j]	Tab[i]==Tab[j]	j-i <= m	znalazlem
0	1	2	4	0	0	false
0	2	2	8	0	0	false
0	3	2	4	0	0	false
0	4	2	5	0	0	false
0	5	2	5	0	0	false
0	6	2	9	0	0	false
1	2	4	8	0	0	false
1	3	4	4	1	0	false
1	4	4	5	0	0	false
1	5	4	5	0	0	false
1	6	4	9	0	0	false
2	3	8	4	0	0	false
2	4	8	5	0	0	false
2	5	8	5	0	0	false
2	6	8	9	0	0	false
3	4	4	5	0	0	false
3	5	4	5	0	0	false
3	6	4	9	0	0	false
4	5	5	5	1	1	true
4	6	5	9	0	0	false
5	6	5	9	0	0	false

Po "Ołówkowym"sprawdzeniu poprawności algorytmu otrzymamy następujące wyniki: [5]

1.5. Teoretyczne oszacowanie złożoności obliczeniowej

Analizując algorytm można zauważyć, że podstawową jego operacją będzie porównanie i-tej i j-tej wartości ciągu/tabeli. Łatwo policzyć ile operacji tego rodzaju zostanie wykonanych:

dla i=0 : ilość porównań jest równa k-1;

dla i=1: ilość porównań jest równa k-2;

itd.

Zewnętrzna pętla (pierwsza pętla for) iteruje przez wszystkie liczby w tablicy, czyli od 0 do k-1. Czas działania tej pętli to O(k). Wewnętrzna pętla (druga pętla for) porównuje liczbę w tablicy z wszystkimi kolejnymi liczbami w tablicy. Czas działania tej pętli to O(k) w najgorszym przypadku. W związku z tym, złożoność tych dwóch zagnieżdżonych pętli to O(k^2).

2. Rozwiązanie- próba druga

2.1. Ponowne przemyślenie problemu i próba wymyślenia algorytmu wydajniejszego

Chociaż wyniki ołówkowego sprawdzania programu zgadzają się z przykładowymi wynikami, można jeszcze zmodyfikować ten kod tak, aby wyeliminować następne wady danego kodu:

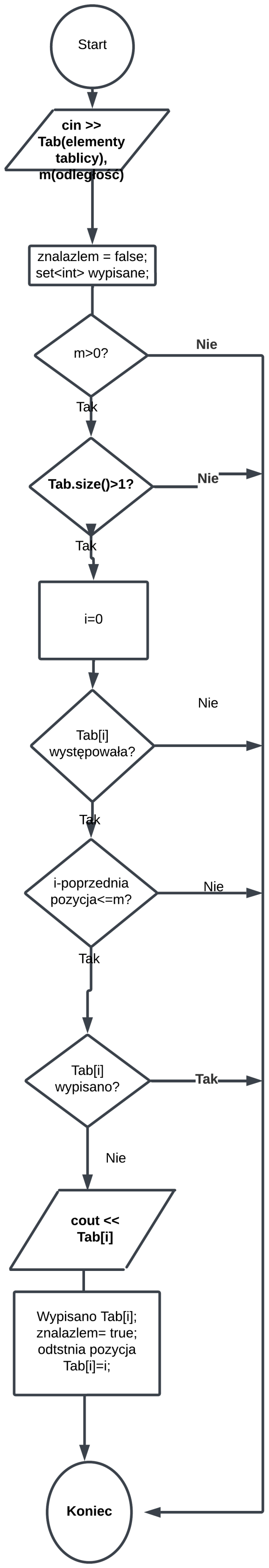
Niska efektywność, złożoność obliczeniowa tego kodu jest $O(k^2)$,

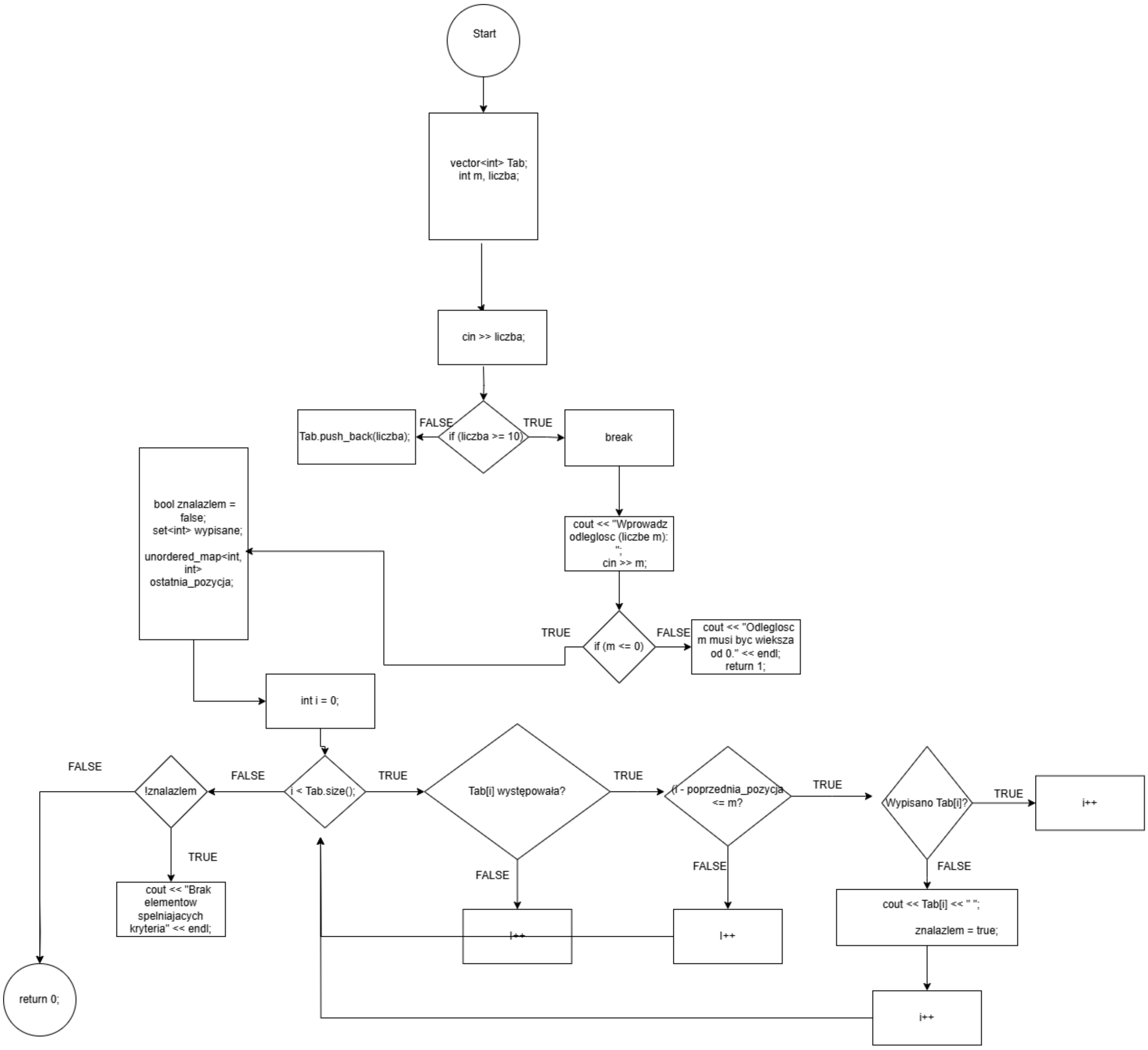
związane to jest z tym, że program przechodzi przez całą pętlę, sprawdza każdy element.

Algorytm niepotrzebnie sprawdza powtarzające się więcej niż 2 razy elementy, bo wynik będzie identyczny.

Brak wcześniejszego przerywania pętli, jeśli liczba już została znaleziona. Wiele z następujących obliczeń jest niepotrzebne.
Musimy zmodyfikować ten algorytm tak, aby porównywał tylko te elementy, które są w odległości m od siebie, co ograniczało by liczbę sprawdzanych par. Zaimplementować nową tablicę, która by pomagała zapobiegać wielokrotnemu wypisywaniu tego samego elementu.

2.2. Schemat Blokowy (wersja wydajniejsza)




Start
vector<int> Tab;
int m, liczba;
cin >> liczba;
FALSE
TRUE
Tab.push_back(liczba);
if (liczba >= 10)
break
cout << "Wprowadz odleglosc (liczbe m): ";
cin >> m;
bool znalazlem = false;
set<int> wypisane;
unordered_map<int, int> ostatnia_pozycja;
TRUE
if (m <= 0)
FALSE
cout << "Odleglosc m musi byc wieksza od 0." << endl;
return 1;
int i = 0;
FALSE
!znalazlem
FALSE
i < Tab.size();
TRUE
Tab[i] występowała?
TRUE
(i - poprzednia_pozycja <= m?
TRUE
Wypisano Tab[i]?
TRUE
i++
TRUE
cout << "Brak elementow spelniajacych kryteria" << endl;
FALSE
i++
FALSE
i++
FALSE
cout << Tab[i] << " ";
znalazlem = true;
return 0;
i++

2.3. Algorytm zapisany pseudokodzie(wersja wydajniejsza)

```
Input:
Tab[i] // elementy tablicy
m // odległość
Output:
Tab[i] // element powtarzający się na zadanej odległości
if m>0
bool znalazlem = false; // Zmienna do śledzenia, czy znaleziono jakąkolwiek liczbę
wypisane := pusty zbiór
ostatnia pozycja := pusta mapa
for i := 0 ; i <= długość(tab) - 1
liczba := tab[i]
if liczba jest w mapie ostatnia pozycja
poprzednia pozycja := ostatnia pozycja[liczba]
if i - poprzednia pozycja <= m
if liczba nie jest w zbiorze wypisane
wypisz liczba // wypisanie elementu
dodaj liczba do zbioru wypisane
ustaw znalazlem na prawda
endif
endif
endif
zaktualizuj mapę ostatnia pozycja[liczba] = i
endfor
if znalazlem == fałsz
wypisz "Brak elementów spełniających kryteria"
endif
```

2.4. Sprawdzenie poprawności algorytmu poprzez „ołówkowe” rozwiązanie problemu (wersja wydajniejsza)

wejście = [2, 4, 8, 4, 5, 5, 9] M=1 obliczenia będą się przedstawiały następująco

i	Tab[i]	ostatnia_pozycja	odl. pom. el.	znalazlem
0	2	0	Ø	false
1	4	1	Ø	false
2	8	2	Ø	false
3	4	3	2	false
4	5	4	Ø	false
5	5	5	1	true
6	9	6	Ø	false

Możemy zauważyć, że ten kod potrzebuje znacznie mniej porównań dla znalezienia pary. Przy ołówkowym sprawdzaniu poprawności używano mapę ostatnia pozycja po aktualizowaniu, żeby można było sprawdzić czy odległość pomiędzy dublikatami jest mniejsza lub w tym przypadku równa 1.

2.5. Oszacowanie złożoności obliczeniowej dla algotytmu wydajniejszego

Pętla (for int i=0; i< Tab.size(); i++) przechodzi przez całą tablicę (O(k)), gdzie k to ilość elementów tablicy.

Algorytm wykonuje poszczególne operacje związane z mapami: sprawdzanie i dodawanie elementów do map. Są to między innymi takie operacje jak na przykład sprawdzenie, czy liczba już występuje w mapie ostatnia pozycja (if (ostatnia pozycja.find(Tab[i]) != ostatnia pozycja.end()), porównanie pozycji liczby w mapie, obliczenie odległości i porównanie z m, sprawdzenie, czy liczba została już wypisana i tak dalej.

Te operacje mają O(1) złożoność obliczeniową. Dlatego w wyniku otrzymujemy, że złożoność obliczeniowa tego algorytmu jest równa O(k).

3. Implementacja wymyślonych algortymów w wybranym środowisku i języku oraz eksperymentalne potwierdzenie wydajności (złożoności obliczeniowej) algorytmów.

3.1. Prosta implementacja

Przykład programu pierwszego (uproszczonego)

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <unordered_map>
using namespace std;

int main() {

    vector<int> Tab;
    int m, liczba;

    // Wprowadzanie liczb do tablicy
    cout << "Wprowadz liczby: " << endl;
    cout << "Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9" << endl;
    while (true) {
        cin >> liczba;
        if (liczba >= 10) {
            break; // Petla kończy sie, gdy liczba jest >= 10
        }
        Tab.push_back(liczba); // Dodajemy liczbe do wektora
    }

    // Wprowadzamy wartość m
    cout << "Wprowadz odleglosc (liczbe m): ";
    cin >> m;

    // Sprawdzamy, czy m jest wieksze niż 0
    if (m <= 0) {
        cout << "Odleglosc m musi byc wieksza od 0." << endl;
        return 1; // Kończymy, jeśli m nie jest poprawne
    }
  bool znalazlem = false;
    set<int> wypisane; // Zbiór do przechowywania już wypisanych liczb
```

```cpp
    // Zagnieżdżona petla do porównania każdej liczby z pozostałymi
    for (int i = 0; i < Tab.size(); i++) {
        for (int j = i + 1; j < Tab.size(); j++) {
            if (Tab[i] == Tab[j] && j - i <= m) {
                // Sprawdzamy, czy ta liczba już była wypisana
                if (wypisane.find(Tab[i]) == wypisane.end()) {
                    cout << Tab[i] << " ";
                    wypisane.insert(Tab[i]); // Dodajemy liczbę do zbioru
                    znalazlem = true;
                    break;  // Nie musimy szukać dalej, bo wystarczy pierwszy wynik
                }
            }
        }
    }

    if (!znalazlem) {
        cout << "Brak elementow spelniajacych kryteria" << endl;
    }
    // Wywołanie funkcji
    //funkcja1(Tab, m);
    //cout << endl; // Dla lepszej czytelności wyjścia
   // funkcja2(Tab, m);

    return 0;
}
```

Rys. 3.1. Kod programu

Przykład programu wydajniejszego

```
#include <unordered_map>
using namespace std;

int main() {

    vector<int> Tab;
    int m, liczba;

    // Wprowadzanie liczb do tablicy
    cout << "Wprowadz liczby: " << endl;
    cout << "Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9" << endl;
    while (true) {
        cin >> liczba;
        if (liczba >= 10) {
            break; // Petla kończy się, gdy liczba jest >= 10
        }
        Tab.push_back(liczba); // Dodajemy liczbe do wektora
    }

    // Wprowadzamy wartość m
    cout << "Wprowadz odleglosc (liczbe m): ";
    cin >> m;

    // Sprawdzamy, czy m jest większe niż 0
    if (m <= 0) {
        cout << "Odleglosc m musi byc wieksza od 0." << endl;
        return 1; // Kończymy, jeśli m nie jest poprawne
    }
  bool znalazlem = false;
    set<int> wypisane; // Zbiór do przechowywania już wypisanych liczb
    unordered_map<int, int> ostatnia_pozycja; // Mapa przechowujaca ostatnia pozycje liczby




    // Przechodzimy przez tablice
    for (int i = 0; i < Tab.size(); i++) {
        // Sprawdzamy, czy ta liczba już wystapiła w odległości m
        if (ostatnia_pozycja.find(Tab[i]) != ostatnia_pozycja.end()) {
            int poprzednia_pozycja = ostatnia_pozycja[Tab[i]];

            // Jeśli odległość miedzy poprzednia a obecna pozycja jest mniejsza lub równa m, wypisujemy liczbe
            if (i - poprzednia_pozycja <= m) {
                // Sprawdzamy, czy ta liczba już była wypisana
                if (wypisane.find(Tab[i]) == wypisane.end()) {
                    cout << Tab[i] << " ";
                    wypisane.insert(Tab[i]); // Dodajemy liczbe do zbioru
                    znalazlem = true;
                }
            }
        }

        // Zapisujemy bieżaca pozycje liczby w mapie
        ostatnia_pozycja[Tab[i]] = i;
    }

    if (!znalazlem) {
        cout << "Brak elementow spelniajacych kryteria" << endl;
    }


    return 0;
}
```

Rys. 3.2. Kod programu

3.2. Testy „niewygodnych” zestawów danych

Sprawdzimy działanie kodu wersji pierwotnego oraz bardzej wydajniejszego dla następnego wejścia.

Przykład programu pierwszego (uproszczonego) i wydajniejszego

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <unordered_map>
using namespace std;

void funkcja1(const vector<int>& Tab, int m) {
    bool znalazlem = false;
    set<int> wypisane; // Zbiór do przechowywania już wypisanych liczb

    // Zagnieżdżona pętla do porównania każdej liczby z pozostałymi
    for (int i = 0; i < Tab.size(); i++) {
        for (int j = i + 1; j < Tab.size(); j++) {
            if (Tab[i] == Tab[j] && j - i <= m) {
                // Sprawdzamy, czy ta liczba już była wypisana
                if (wypisane.find(Tab[i]) == wypisane.end()) {
                    cout << Tab[i] << " ";
                    wypisane.insert(Tab[i]); // Dodajemy liczbę do zbioru
                    znalazlem = true;
                    break;  // Nie musimy szukać dalej, bo wystarczy pierwszy wynik
                }
            }
        }
    }

    if (!znalazlem) {
        cout << "Brak elementow spelniajacych kryteria" << endl;
    }
}
```

```cpp
void funkcja2(const vector<int>& Tab, int m) {
    bool znalazlem = false;
    set<int> wypisane; // Zbiór do przechowywania już wypisanych liczb
    unordered_map<int, int> ostatnia_pozycja; // Mapa przechowujaca ostatnia pozycje liczby

    // Przechodzimy przez tablice
    for (int i = 0; i < Tab.size(); i++) {
        // Sprawdzamy, czy ta liczba już wystąpiła w odległości m
        if (ostatnia_pozycja.find(Tab[i]) != ostatnia_pozycja.end()) {
            int poprzednia_pozycja = ostatnia_pozycja[Tab[i]];

            // Jeśli odległość miedzy poprzednia a obecna pozycja jest mniejsza lub równa m, wypisujemy liczbe
            if (i - poprzednia_pozycja <= m) {
                // Sprawdzamy, czy ta liczba już była wypisana
                if (wypisane.find(Tab[i]) == wypisane.end()) {
                    cout << Tab[i] << " ";
                    wypisane.insert(Tab[i]); // Dodajemy liczbe do zbioru
                    znalazlem = true;
                }
            }
        }

        // Zapisujemy bieżaca pozycje liczby w mapie
        ostatnia_pozycja[Tab[i]] = i;
    }

    if (!znalazlem) {
        cout << "Brak elementow spelniajacych kryteria" << endl;
    }
}
```

```cpp
int main() {
    vector<int> Tab;
    int m, liczba;

    // Wprowadzanie liczb do tablicy
    cout << "Wprowadz liczby: " << endl;
    cout << "Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9" << endl;
    while (true) {
        cin >> liczba;
        if (liczba >= 10) {
            break; // Petla kończy sie, gdy liczba jest >= 10
        }
        Tab.push_back(liczba); // Dodajemy liczbe do wektora
    }

    // Wprowadzamy wartość m
    cout << "Wprowadz odleglosc (liczbe m): ";
    cin >> m;

    // Sprawdzamy, czy m jest wieksze niż 0
    if (m <= 0) {
        cout << "Odleglosc m musi byc wieksza od 0." << endl;
        return 1; // Kończymy, jeśli m nie jest poprawne
    }

    // Wywołanie funkcji
    cout << "wynik programu naiwnego:" << endl;
    funkcja1(Tab, m);
    cout << endl << "wynik programu wydajniejszego:" << endl; // Dla lepszej czytelności wyjścia
    funkcja2(Tab, m);

    return 0;
}
```

Rys. 3.3. Kod programu

```
Wprowadz liczby:
Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9
2
4
8
4
5
5
9
10
Wprowadz odleglosc (liczbe m): 1
wynik programu naiwnego:
5
wynik programu wydajniejszego:
5
```

Rys. 3.4. Wynik dzialania kodu dla [2, 4, 8, 4, 5, 5, 9] M=1

Wejście: [1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 3] M=2

```
Wprowadz liczby:
Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9
1
1
1
1
2
3
2
3
10
Wprowadz odleglosc (liczbe m): 2
wynik programu naiwnego:
1 2 3
wynik programu wydajniejszego:
1 2 3
```

Rys. 3.5. Wynik dzialania kodu dla [1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 3] M=2

3.3. Testy wydajności algorytmów - eksperymentalne sprawdzenie złożoności czasowej

```
Wprowadz odleglosc (liczbe m): 2

 L.p. n t1 [s] t2 [s]
1 2500 0.024 0.001
2 5000 0.05 0
3 10000 0.188 0.001
4 20000 0.725 0.003
5 30000 1.605 0.003
6 40000 2.85 0.005
7 50000 4.51 0.005
8 60000 6.492 0.008
9 70000 9.257 0.011
10 80000 12.32 0.009
```

Rys. 3.6. Wyniki testu czasowego dla kodu prostszego

```
 1       2500 0.002000
 2       5000 0.023000
 3      10000 0.018000
 4      20000 0.016000
 5      30000 0.022000
 6      40000 0.023000
 7      50000 0.034000
 8      60000 0.042000
 9      70000 0.047000
10      80000 0.047000
```

Rys. 3.7. Wynik testu czasowego dla kodu wydajniejszego

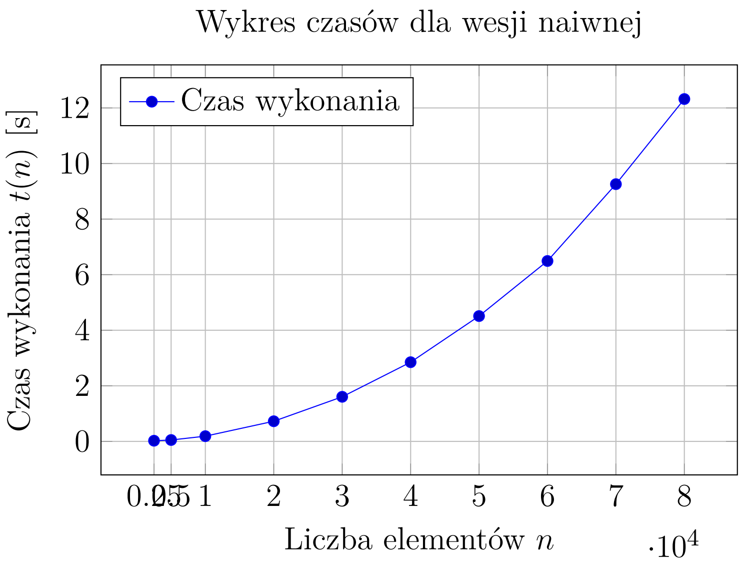
Jak widać z tabeli wygenerowanej przy pomocy powyższego kodu dla tych samych zestawów danych wejściowych obliczenia wykonywane przy pomocy algorytmu w wersji naiwnej trwają o wiele dłużej niż w przypadku wersji ulepszonej.Wyniki obliczeń można również przedstawić w postaci graficznej. Na podstawie kształtu krzywych jakie tworzą wykresy punktów funkcji t(n) można się przekonać, że obliczona teoretycznie złożoność obliczeniowa ma bezpośrednie odzwierciedlenie w czasach obliczeń wykonanych przy pomocy obu algorytmów

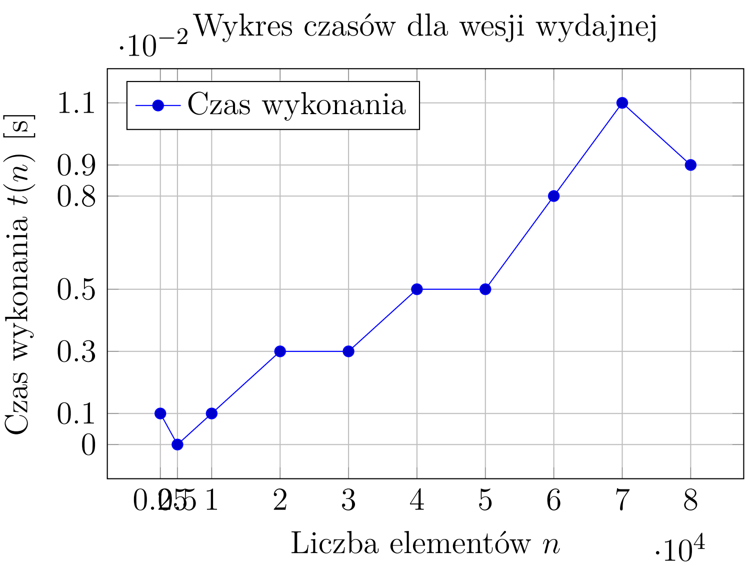
3.4. Wykresy

Z podanego niżej wykresu możemy zauważyć, że czasy obliczeń dla kodu prostszego oraz wydajniejszego różnią się. Kod wydajniejszy potrzebuje znacznie mniej czasu.

Natomiast kod prostszy potrzebuje bardzo dużo czasu, żeby przejść przez każdy element.

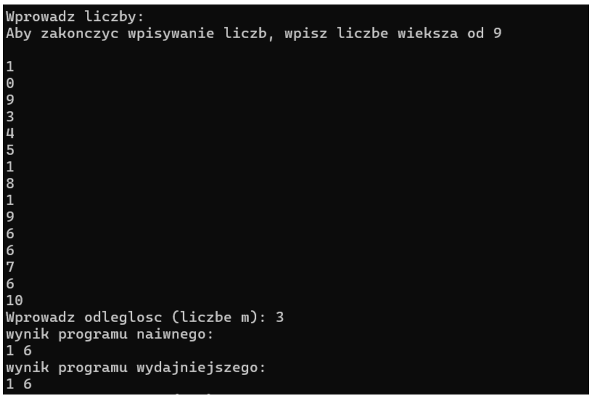
article pgfplots





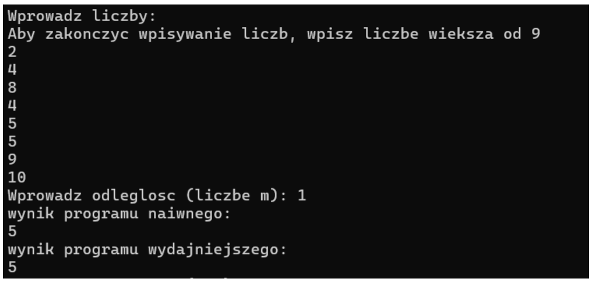
3.5. Testy

3.5.1. 1. Wejście: [1, 0, 9, 3, 4, 5, 1, 8, 1, 9, 6, 6, 7, 6] M=3



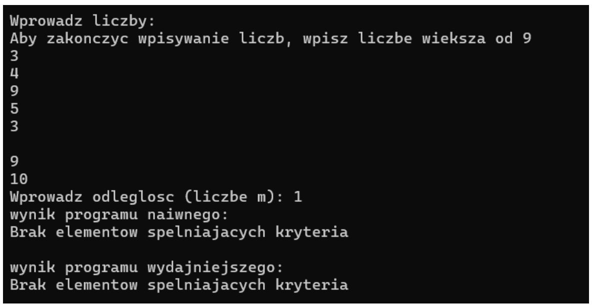
Rys. 3.8. Wyniki testu pierwszego dla kodu

3.5.2. 2. Wejście [2, 4, 8, 4, 5, 5, 9] M=1

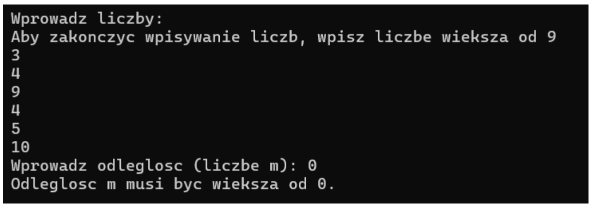


Rys. 3.9. Wyniki testu drugiego dla kodu

3.5.3. 3. Wejście [3, 4, 9, 5, 3, 9] M=1



Rys. 3.10. Wyniki testu trzeciego dla kodu



```
Wprowadz liczby:
Aby zakonczyc wpisywanie liczb, wpisz liczbe wieksza od 9
3
4
9
4
5
10
Wprowadz odleglosc (liczbe m): 0
Odleglosc m musi byc wieksza od 0.
```

Rys. 3.11. Wyniki testu dla m<1