Υπολογιστικές Μέθοδοι
Υπολογισμός του αριθμού π

27/2/2024

Ο προσδιορισμός όλο και περισσότερων δεκαδικών ψηφίων του αριθμού π απασχόλησε τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα. Ο Αρχιμήδης έδωσε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αριθμός χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα

$$3\frac{10}{71} \;<\; \pi \;<\; 3\frac{1}{7}$$

δηλαδή ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 3.141 και μικρότερος του 3.143. Από το δεύτερο μισό του 17ου αιώνα επιχειρήθηκε η προσέγγιστη του π με άπειρες σειρές. Το 1671 Gregory ανακάλυψε την σειρά που συγλίνει στο τόξο εφαπτομένης ($\arctan(x)$)

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Το 1674 ο Leibniz εφάρμοσε τη σειρά για $x = 1$ για να υπολογίσει τον αριθμό π αφού $\tan(\pi/4) = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \tag{1}$$

Αυτή η σειρά συγκλίνει πολύ αργά, χρειάζονται 300 όροι για τον υπολογισμό 2 δεκαδικών ψηφίων όσων και η εκτίμηση του Αρχιμήδη.
Το 1666 ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε μια γεωμετρική κατασκευή και βρήκε την ακόλουθη έκφραση

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \;+\; 24\int_0^{1/4}\sqrt{x(1-x)}\,dx$$

στη συνέχεια εκτίμησε το $\sqrt{x(1-x)}$ από τη σειρά

$$\begin{aligned}\sqrt{x(1-x)} \;&=\; x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{5}{128}x^{9/2} - \frac{7}{256}x^{11/2}\\ &\quad - \frac{21}{1024}x^{13/2} - \frac{33}{2048}x^{15/2} - \frac{429}{32768}x^{17/2} - \cdots\end{aligned}$$

και ολοκληρώνοντας κάθε όρο βρήκε

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4}\sqrt{x(1-x)}\,dx &= \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{5}x^{5/2}-\frac{1}{8}\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{1}{16}\frac{2}{9}x^{9/2}-\frac{5}{128}\frac{11}{2}x^{9/2}-\frac{7}{256}\frac{2}{13}x^{13/2}\\ &\quad -\frac{21}{1024}\frac{2}{15}x^{15/2}-\frac{33}{2048}\frac{2}{17}x^{17/2}-\frac{429}{32768}\frac{2}{19}x^{19/2}-\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

και εφάρμοσαι για $x = 1/2^2$.
Χρησιμοποιώντας 22 όρους της σειράς υπολόγισε 16 δεκαδικά ψηφία του π.
Δύο σειρές από τις οποίες μπορούμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό π προτάθηκαν από τον Euler (1735)

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \tag{3}$$

Η ακόλουθη σειρά είναι μια από τις δεκάδες σειρές που δημοσιεύτηκαν το 1914 από τον Ινδό μαθηματικό Σρινιβάσα Ραμανουτζάν

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}} \tag{4}$$

Τέλος δίνονται ακόμα δύο σειρές

$$\pi = 3+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{4}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} \tag{5}$$

και

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \tag{6}$$

Γράψτε συναρτήσεις MATLAB που να υπολογίζουν τον αριθμό π χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σειρές.
Υπολογίστε το πλήθος των ψηφίων του π σε σχέση με το πόσοι όροι της σειράς χρησιμοποιούνται.
Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία επιλέξτε κάποια άλλη σειρά ή ακολουθία για τον υπολογισμό του π.
Στην εργασία σας θα πρέπει να συμπεριλάβετε τις συναρτήσεις που κατασκευάσατε και μια συγκριτή παρουσιάση της σύγκλισης.