Angewandte Kryptographie

FH Campus Wien

SoSe 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Effiziente Implementierungen

1.1 Langzahlen

In (asymmetrischer) Kryptographie benötigen wir ülicherweise Werte, die weit größer sind, als die native Wortlänge der zugrundeliegenden Hardware. Die meisten Register haben eine Wortlänge von 64 bit. Typische Schlüssellängen, beispielsweise für RSA Verschlüsselung, sind heutzutage 1024 bis 4096 bits.

Wie können solche Zahlen dargestellt werden? Eine Auswahl an Möglichkeiten ist:

1. Residuen-Repräsentation
2. Verwendung von Arrays in nativer Wortgröße
3. Verwendung von Arrays kleiner als die native Wortgröße

Wie kann eine effiziente Modulo Reduktion implementiert werden? Die Division großer Zahlen ist sehr teuer, deswegen wurden Methoden für eine Restbestimmung ohne direkte Division entwickelt:

1. Barrett Reduktion
2. Montgomery Arithmetik

Wie kann effizient Exponentiation implementiert werden Bei Square & Multiply ist die Berechnung schneller, je weniger Bits des Exponenten den Wert `1` haben, siehe NAF (Non-adjacent Form) .

1.1.1 Residuen-Repräsentation

Wir wählen r verschiedene koprime (paarweise teilerfremde) Moduli $m_1, \ldots, m_r$ und eine beliebige Zahl x. Wir können eine Darstellung

$$x = (x_1, \ldots, x_r) \tag{1.1}$$

wählen, wobei $x_i = x \mod m_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Der chinesische Restsatz garantiert uns hierbei, die Rekonstruierbarkeit von x.

Vorteile Welche Vorteile hat diese Darstellung?

- Die Moduli m_i können in nativer Wortgröße des Systems gewählt werden, die repräsentierten Zahlen haben eine Größe bis zu $\prod_i m_i = m_1 \cdot ldotsm_r$.
- Die Rechnung ist parallelisierbat, es braucht keine carry-propagation
- Die meisten Grundrechenarten sind sehr einfach, weil sie mit der Modulo-Operation verträglich sind. Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation haben wir

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_r) + (y_1, \ldots, y_r) \\ &= (x_1 + y_1 \mod m_1, \ldots, x_r + y_r \mod m_r) \\ x - y &= (x_1, \ldots, x_r) - (y_1, \ldots, y_r) \\ &= (x_1 - y_1 \mod m_1, \ldots, x_r - y_r \mod m_r) \\ x \cdot y &= (x_1, \ldots, x_r) \cdot (y_1, \ldots, y_r) \\ &= (x_1 \cdot y_1 \mod m_1, \ldots, x_r \cdot y_r \mod m_r) \end{aligned}$$

Nachteile Welche Nachteile hat die Darstellung?

- Der Vergleich zweier Zahlen ist aufwendig
- Die Division zweier Zahlen ist aufwendig
- Rückrechnung in die gewöhnliche Zahlendarstellung aufwändig (Lösen simultaner Kongruenzen)
- Überlauf bei arithmetischen Operationen nicht detektierbar

Beispiel Wir berechnen die Residuen-Repräsentation von $x = 1820$ bezüglich der $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 5, 7, 11, 13)$. Wir haben $m = \prod_i m_i = 15015$.

$$\begin{aligned} x \mod m_1 &= 2 \\ x \mod m_2 &= 0 \\ x \mod m_3 &= 0 \\ x \mod m_4 &= 5 \\ x \mod m_5 &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt die Darstellung von x bezüglich m ist $(2, 0, 0, 5, 0)$.
Für die Rückrechnung von $(2, 0, 0, 5, 0)$ auf 1820 lösen wir:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 0 \mod 5 \\ x &\equiv 0 \mod 7 \\ x &\equiv 5 \mod 11 \\ x &\equiv 0 \mod 13 \end{aligned}$$

Wir berechnen für m_1 und m_4, wo der Modulus ungleich 0 ist

$$\begin{aligned} M_1 &= m/m_1 = 15015/3 = 5005 \\ M_4 &= m/m_4 = 15015/11 = 1365. \end{aligned}$$

Dann berechnen wir die Inversen bzgl. der Moduln m_i, z.B. mittels erweitertem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} y_1 = M_1^{-1} \mod m_1 = 5005^{-1} \mod 3 = 1 \\ y_4 = M_4^{-1} \mod m_4 = 1364^{-1} \mod 11 = 1 \end{aligned}$$

Somit können wir mittels Residuen $a_i = x \mod m_i$ berechnen

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_i a_i \cdot y_i \cdot M_i \right) \mod m \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 5005 + 5 \cdot 1 \cdot 1365 \mod 15015 \\ &= 1820. \end{aligned}$$

1.1.2 Arrays in nativer Größe

Sei W die native Wortgröße eines Prozessors und x eine Zahl, deren Binärdarstellung n bit benötigt. Dafür verwenden wir das Array A, das $t = \lceil n/W \rceil$ Integers enthält.

Vorteile

- Die Langzahloperationen können auf Operationen auf nativer Wordgröße heruntergebrochen werden.
- Der zusätzliche Speicherbedarf ist maximal so groß wie ein natives Wort.
- Zugriff ist einfach und schnell.
- Vergleich von Langzahlen ist schnell und einfach.
- Verwendung von Langzahlen ist schnell und einfach.

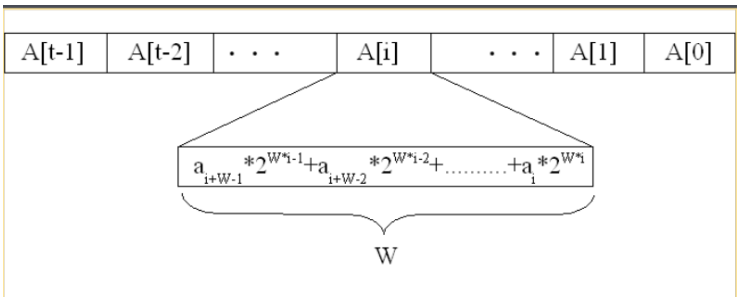


Abbildung 1.1: Manuel Koschuch, Efficient Security for Mobile Communications Utilizing Elliptic Curves

Nachteile Operationen für diese Repräsentation sind nur bedingt parallelisierbar, es braucht hier eine carry-propagation.

1.1.3 Arrays kleiner als die native Größe

Sei wieder W die native Wortgröße eines Prozessors und x eine Zahl, deren Binärdarstellung n bit benötigt. Jetzt verwenden wir das Array A, das $u = \lceil n/(W-k) \rceil$ Integers enthält, wobei k ein für das entstehende Carry veranschlagter Speicher im Buffer ist.

Vorteile Hier haben wir ähnliche Vorteile wie bei Arrays in nativer Größe, zusätzlich haben wir Parallelisierbarkeit, weil zwei Worte addiert werden können, ohne dass carry-propagation notwendig wird.

Nachteile

- Potentiell höherer Speicherbedarf, da pro Wort k Bit für carry frei bleiben
- Am Ende einer Rechnung muss carry sehr wohl propagiert werden (vgl. carry-save adders)
- Komplexere Behandlung der Elemente bei Rechnungen nötig, Konversion zu Beginn und am Ende einer Berechnung

1.1.4 Exkurs: Basisoperationen

Seien $b, k \in \mathbb{N}$. Für jedes Stellensystem zur Basis b gilt:

Multiplikation Eine Multiplikation mit dem Faktor b^k entspricht einem Linksshift um k Stellen. Beispiel:

$$145 \cdot 10^2 = 14500$$
$$1101 \cdot 2^3 = 1101000$$

Integer-Division Eine Integer-Division durch den Divisor b^k entspricht einem Rechtshift um k Stellen. Beispiel:

$$7654/10^3 = 7$$
$$1110011101/2^5 = 11100$$

Niederwertigste Stellen extrahieren Eine Modulo Operation mit Modul b^k entspricht dem extrahieren der k niederwertigsten Stellen. Beispiel:

$$65432 \mod 10^3 = 432$$
$$111000101 \mod 2^4 = 0101$$

Casting out nines Eine Modulo Operation mit Modul $b^k - 1$ entspricht dem teiler einer Zahl in k-stellige Blöcke, die dann aufsummiert werden. Beispiel:

$$34215 \mod (10^2 - 1) = 34215 \mod 99 = 3 + 42 + 15 = 60$$

1.1.5 Modulo Reduktion

Eine Moduloreduktion ist die Berechnung des kleinsten Repräsentanten einer Restklasse. Beispiel: die Zahl 17 mod 5 wird zu 2 reduziert.

Kriterien für den Einsatz Wie können wir feststellen, wann eine Moduloreduktion überhaupt notwendig ist? Grundsätzlich kann immer mit nichtreduzierten Zwischenergebnissen gerechnet werden. In der Praxis ist es aber sinnvoll, eine Reduktion anzuwenden, wenn das Zwischenergebnis mehr als 1 bit länger als der Modulus ist. Diese Bedingung ist über ein logisches Und vom MSW (most significant word) des Zwischenergebnisses und einer Bitmaske abhängig vom Modul einfach feststellbar.

Kosten von Langzahldivisionen Divisionen von Wörtern sind teure Operationen auf Computern. Langzahldivisionen sind sogar noch teurer, wie können wir den Aufwand verringern?

Hierfür gibt es Berechnungen von Divisionsresten ohne (tatsächliche) Divisionen, nämlich

- Barrett Reduktion
- Montgomery Multiplikation

Barrett Reduktion Die Rechnung $(a \cdot b)/n$ wird berechnet als

$$\frac{a \cdot b}{b^{2k-t}} \cdot \frac{b^{2k}}{n} \cdot \frac{1}{b^t},$$

wobei b die Basis der Zahlendarstellung (in Digitalsystemen also 2) ist.

Montgomery Multiplikation Wenn R eine Zweierpotenz ist und es ein n' gibt, sodass $R \cdot R^{-1} - n \cdot n' = 1$, dann wird $a \cdot b \cdot R^{-1} \mod n$ berechnet mittels

$$\frac{a \cdot b + (a \cdot b \cdot n' \mod R \cdot n)}{R}.$$

Hierfür benötigt es eine Hin- und Rücktransformation.

Diese Ansätze sind nur bei mehreren modularen Multiplikationen hintereinander sinnvoll, ansonsten ist der Transformationsoverhead zu groß.

Grundidee an Montgomery (todo) Ein k-faches von n zum Produkt addieren, so dass die letzten i Stellen 0 werden, und sich damit die Division auf ein reines Shift beschränkt.

Wie bestimmt sich k?
Für die letzte Stelle c muss (im Dezimalsystem) gelten:

$$\begin{aligned} c + k \cdot n &= 0 \mod 10 \\ \Rightarrow c &= -k \cdot n \mod 10 \\ \Rightarrow c \cdot -n^{-1} &= k \mod 10 \end{aligned}$$

Für die folgenden Stellen gilt analoges, nur mit entsprechendem Offset um 10^i.

De facto also: Das Produkt mit dem negativen Inversen des Moduls multiplizieren (was ja gerade n' ist), das ganze modulo R rechnen (was ja die neue Basis darstellt und sich auf ein Bitmaskieren der letzten Bits beschränkt, wenn R eine Zweierpotenz ist), mit dem Modulus multiplizieren und zum Produkt addieren. Damit sind garantiert die letzten Bits 0 und können durch die Division einfach rausgeshiftet werden.

Montgomery Beispiel (todo) Ein Beispiel im Dezimalsystem: Seien $a = 29, b = 48, n = 97$ und $R = 100$.

Hintransformation:

$$\begin{aligned} a' = a \cdot R \mod n = 29 \cdot 100 \mod 97 = 2900 \mod 97 = 87 \\ b' = b \cdot R \mod n = 48 \cdot 100 \mod 97 = 4800 \mod 97 = 47 \end{aligned}$$

Multiplikation

Es gilt $a' \cdot b' = 87 \cdot 47 = 4089$. Jetzt versuchen wir die letzte und vorletzte Stelle zu 0 zu machen:

$$\begin{aligned} 4089 + 3 \cdot n = 408\mathbf{9} + 3 \cdot 97 = 408\mathbf{9} \cdot 29\mathbf{1} = 4380 \\ 43\mathbf{8}0 + 60 \cdot n = 43\mathbf{8}0 + 60 \cdot 97 = 43\mathbf{8}0 + 85\mathbf{2}0 = 10200 \end{aligned}$$

Jetzt dividieren wir durch $R = 100$: $10200/100 = 102$.

Rücktransformation
Wir berechnen

$$102 \cdot R^{-1} \mod n = 102 \cdot 100^{-1} \mod 97 = 102 \cdot 65 \mod 97 = 34.$$

In der Gegenprobe haben wir $a \cdot b \mod n = 29 \cdot 48 \mod 97 = 34$.
Für die Abschätzung von Montgomery haben wir das

Lemma 1.1.1. *Seien $a, b, n \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$\frac{a \cdot b + (a \cdot b \cdot n' \mod R) \cdot n}{R} < 2n. \tag{1.2}$$

Beweis. (Skizze): Wir wissen $a, b < n$ und $R > n$. Daher gilt $a \cdot b < n^2$. Weiters gilt immer $a \cdot b \cdot n' \mod R < R$. Deswegen gilt

$$\frac{a \cdot b + (a \cdot b \cdot n' \mod R) \cdot n}{R} < \frac{n^2 + R \cdot n}{R} = \frac{n^2}{R} + \frac{R \cdot n}{R} < n \cdot 1 + n = 2n.$$

□

Mongomery Pseudocode (todo) Eine komplette Montgomery Multiplikation ist daher:

```
Input: a, b
Output: c = a*b mod n

t = a * b
c = t + (t*n' mod R)*n //mit R*R' - n*n' = 1
c = c/R
if (c > n)
    c = c - n
return c
```

Monty(a,b) = a*b*R-1 mod n
Monty(a',b) = a*b mod n
Monty(a',b') = a'*b' mod n
Monty(a',1) = a mod n
Monty(a,R*R) = a' mod n

1.2 Exponentiation

Exponentiation ist eine häufige Operation, gerade bei RSA. Dabei hat der private Exponent häufig auch mindestens 1024 bits.

1.2.1 Square-and-Multiply

Square-and-Multiply is die formalisierte Variante der "Methode der wiederholten Quadrate". Für jedes bit im Exponenten wird quadriert, wenn die bits 1 sind, dann auch multipliziert.

```
Berechne m = c^d

m = 1
for jedes Bit i in d, beginnend bei MSB, do
    m = m*m
    if (i = 1) then
        m = m \cdot c
end
return m
```

Beispiel Berechnen von x^12 mittels Square-and-Multiply, dafür betrachten wir die Binärdarstellung $12 = b1100$:

```
m = 1

# i = 1, erstes bit, beginnend beim größten
m = m * m = 1
m = m * x = x

# i = 1, zweites bit
m = m * m = x^2
m = m * x = x^3

# i = 0, drittes bit
m = m * m = x^6

# i = 0, viertes bit
m = m * m = x^12
```

Hier fällt auf: je mehr 1er in der Binärdarstellung der Exponenten, desto größer ist unser Rechenaufwand.

Beispiel Wir berechnen eine RSA Verschlüsselung mit $m = 7, p = 5$ und $q = 11$.

Wir haben $\varphi = 40$ und wählen $e = 3$, dann gilt $d = 27$ und $c = m^e \mod (p \cdot q) = 7^3 \mod 55 = 13$. Mittels Square-and-Multiply berechnen wir $m = c^d = 7$:

```
27 = b11011

m = 1
```

```
# i = 1
m = m * m = 1
m = m * c = 13

# i = 1
m = m * m = 13 * 13 mod 55 = 4
m = m * c = 4 * 13 mod 55 = 52

# i = 0
m = m * m = 52 * 52 mod 55 = 9

# i = 1
m = m * m = 9 * 9 mod 55 = 26
m = m * c = 26 * 13 mod 55 = 8

# i = 1
m = m * m = 8 * 8 mod 55 = 9
m = m * c = 9 * 13 mod 55 = 7
```

1.2.2 NAF - Non-adjacent Form

Im Durchschnitt braucht es für die Berechnung einer Exponentiation mit einem n-bit Exponenten:

- $n/2$ Multiplikationen und
- n Quadrierungen.

Unter Verwendung einer vorzeichenbehafteten Darstellung des Exponenten (mit $-1, 0$ und 1) kann die Anzahl der Multiplikationen auf $n/3$ reduziert werden. In diesem Fall wird die NAF de Exponenten berechnet.

Eigenschaften

- Sie ist eindeutig
- Sie hat die wenigsten Elemente ungleich 0 aller vorzeichenbehafteten Darstellungen
- Sie ist maximal $n + 1$ bit lang
- Es folgen niemals zwei Elemente ungleich 0 aufeinander
- Sie hat durchschnittlich n/3 Elemente ungleich 0

Die Exponentiation ist ähnlich zu Square-and-Multiply, es wird nur vor der Berechnung die Inverse der Basis berechnet und in den Fällen, wo das Bit -1 ist, mit diesem Inversen statt mit der Basis multipliziert.

Beispiel Wir berechnen die NAF von 12. Wir wissen $12 = b1100$, ihre NAF ist $10 - 100$, weil $12 = 2^4 - 2^2 = 16 - 4$.

Beispiel Wir berechnen die NAF von 7. Wir wissen $7 = 111$, die NAF ist $100 - 1$, weil $7 = 2^3 - 2^0 = 8 - 1$. Die Rechnung x^7 mittels NAF:

```
7 = 100-1 (NAF)

m = 1

# i = 1
m = m * m = 1
m = m * x = x

# i = 0
m = m * m = x^2

# i = 0
m = m * m = x^4

# i = -1
m = m * m = x^8
m = m * x^{-1} = x^7
```

Private Key bei RSA Privater Schlüssel d bei RSA üblicherweise signifikant länger als öffentlicher (1.024 Bits vs. 16 Bits). Problem: Entschlüsselung und Signaturgenerierung teuer.

Lösung: mittels CRT (Chinesicher Restsatz). Statt nur d zu speichern, werden p, q, dP, dQ und $qInv$ einmalig berechnet und gespeichert. Hierbei ist:

$$\begin{aligned} dP &= d \mod (p-1) \\ dQ &= d \mod (q-1) \\ qInv &= q^{-1} \mod p \end{aligned}$$

Die Entschlüsselung wird nicht als $m = c^d \mod n$ berechnet, sondern

$$\begin{aligned} m_1 &= c^{dP} \mod p \\ m_2 &= c^{dQ} \mod q \\ h &= qInv \cdot (m_1 - m_2) \mod p \\ m &= m_2 + h \cdot q \end{aligned}$$

Dadurch sind die Exponenten statt 1024 nur noch ca 512 Bit lang.

```
Private-Key: (4096 bit, 2 primes)
```

```
modulus: //n (4.096 Bit)
00:[...]:5a:ac:58:ff:66:e7

publicExponent: //e (17 Bit)
65537 (0x10001)

privateExponent: //d (4.096 Bit)
00:a0:4d:a3:d7:f5:[...]:36:96:67:e5:c1

prime1: //p (2.048 Bit)
00:ed:22:[...]64:2c:07

prime2: //q (2.048 Bit)
00:d9:3f:[...]41:f6:21

exponent1: //dP (2.048 Bit)
00:cf:f1:[...]7f:be:ef

exponent2: //dQ (2.048 Bit)
58:f6:5d:[...]3d:c8:a1

coefficient: //qInv (2.048 Bit)
00:e4:01:[...]76:dd:61:b8
```

Kapitel 2

Symmetrische Kryptographie

Bei symmetrischer Kryptographie verwenden Sender und Empfänger denselben Schlüssel, das heißt die Ver- und Entschlüsselung passieren symmetrisch. Bei Verschlüsselung gibt es zwei Arten:

Blockcipher Die Daten werden in Blöcke fixer Größe aufgeteilt und verschlüsselt. Das ist sinnvoll, wenn es keine zeitliche Komponente bei den Daten gibt, und sie zum Zeitpunkt der Verschlüsselung bereits vollständig vorhanden sind.

Streamcipher Die Daten werden verschlüsselt, sobald sie zu Verfügung stehen, und werden dann laufend mit dem Schlüsselstrom verknüpt. Das erfordert Synchronisation zwischen Sender und Empfänger. Dieser Verschlüsselungsmodus ist für zeitkritische Anwendungen geeignet, bei denen man nicht warten kann, bis ein kompletter Block an Daten vorhanden ist.

Bei beiden Varianten ist die wichtigste Voraussetzung, den verwendeten Schlüssel sicher zu übertragen.

2.1 Blockcipher

Definition 2.1.1 (Blockcipher)**.** *Ein Blockcipher mit einer Blocklänge von n Bit ist eine invertierbare, üblicherweise deterministische Abbildung.*

Sei $V_n = \{0,1\}^n$ die Menge aller n Bit Vektoren und $\mathcal{K} = \{0,1\}^k$ die Menge aller k Bit Vektoren, dann sind

$$E : V_n \times \mathcal{K} \to V_n \text{ und } D : V_n \times \mathcal{K} \to V_n$$

mit $E(m, \kappa) = c$ *für ein beliebiges* $m \in V_n, \kappa \in \mathcal{K}$ *und* $D(c, \kappa) = m$ *ein Blockcipher.*

Wir verwenden die Notation $E_K(p) = E(p, K)$ für die Verschlüsselung mit dem fixen Schlüssel $K \in \mathcal{K}$ und analog $D_K(C)$ für die Entschlüsselung. Dann gilt für alle $P \in V_n$, dass $D_K(E_K(P)) = P$.

Die Sicherheit, aber auch die Komplexität wird durch die Blocklänge beeinflusst, hier muss ein Tradeoff gemacht werden. Es gilt es die Blocklänge unter Berücksichtigung der sicherheitstechnischen und performanten Anforderungen zu wählen.

Die Auswahlkriterien für Blockcipher sind:

- Geschätztes Sicherheitslevel: Je bekannter und erforschter ein Cipher ist, als desto sicherer wird er angesehen
- Schlüsselgröße: Je höher die Entropie der Schlüsselt, desto höher ist die Sicherheit. Mit der Entropie steigt aber auch der Verarbeitungsaufwand.
- Durchsatz: Der Durchsatz eines Ciphers ist abhängig von seiner Komplexität.
- Blockgröße: Je größer die Blockgröße, desto höher die Sicherheit, aber auch die Komplexität.
- Komplexität der kryptographischen Abbildung: Sie beeinflusst die Größe sowohl einer Software- als auch einer Hardwareimplementierung.
- Datenexpansion: Gewisse Anwendungen erfordern, dass Daten vor und nach der Verschlüsselung dieselbe Größe haben.
- Fehlerfortpflanzung: Ein fehlerhafter Ciphertext hat Auswirkungen auf Klartext, die konkrete Auswirkung unterscheidet sich je nach Betriebsmodus und Cipher.

2.1.1 ECB (Electronic Codebook Mode)

Die Verschlüsselung von Plaintext Block p_i bzw. die Entschlüsselung vom Cipherblock c_i ist

$$c_i = E_K(p_i)$$
$$p_i = D_K(c_i)$$

Die Vorteile des ECB sind:

- Wahlfreier Zugriff
- Fehler in Ciphertext beeinflusst nur aktuellen Block
- Wenn nur Nachrichten von bis zu einem Block übertragen werden, sicher und effizient

Die Nachteile sind:

- Muster in Klartext im Ciphertext sichtbar

- Selber Klartext ergibt bei selbem Schlüssel immer selben Ciphertext
- Block Replay Attacken: beliebige Ciphertextblöcke können entfernt, eingefügt oder ersetzt werden

2.1.2 CBC (Cipher Block Chaining)

Die Verschlüsselung von Plaintext Block p_i bzw. die Entschlüsselung vom Cipherblock c_i ist

$$c_i = E_K(p_i \oplus c_{i-1})$$
$$p_i = c_{i-1} \oplus D_K(c_i)$$

Die Vorteile des CBC sind:

- Gleiche Klartextblöcke ergeben nur dann gleiche Ciphertextblöcke, wenn vorhergehende Klartextblöcke identisch sind
- Kein Block Replay mehr möglich
- Auf Block Ebene selbstheilend

Die Nachteile sind:

- Ent- und Verschlüsselung können nicht mehr wahlfrei erfolgen
- Vor allem am Beginn oft gleiche Klartextblöcke, Lösung: zufälliger IV, braucht nicht geheim gehalten zu werden
- Ein 1-Bit Fehler in Cipherblock c_i bewirkt einen völlig fehlerhaften Klartextblock p_i und einen 1-Bit Fehler in p_{i+1} ("Error Extension")
- Einfügen beliebiger Blöcke am Ende bzw. gezielte Manipulation von Block p_{i+1} möglich

2.1.3 PCBC (Propagating Cipher Block Chaining)

Die Verschlüsselung von Plaintext Block p_i bzw. die Entschlüsselung vom Cipherblock c_i ist

$$c_i = E_K(p_i \oplus c_{i-1} \oplus p_{i-1})$$
$$p_i = c_{i-1} \oplus p_{i-1} \oplus D_K(c_i)$$

Die Vorteile des PCBC sind:

- Grundsätzlich gleiche Eigenschaften wie CBC
- Zusätzlich: Fehler im Ciphertext bewirkt Fehler in allen folgenden Blöcken
- Verwendet in Kerberos 4 zum Error-checking: wenn der letzte Block nicht dem erwarteten Wert entspricht, ist ein Fehler aufgetreten.

Die Nachteile sind:

- Grundsätzlich gleiche Eigenschaften wie CBC
- Vertauschen zweier Ciphertext Blöcke führt zu teilweiser falscher Entschlüsselung, wegen XOR fällt Fehler aber beim nächsten Block wieder heraus

Beispiel Vertauschen zweier Blöcke:

Wir berechnen den Ciphertext von der Nachricht $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ und Initialisierungsvektor IV:

$$\begin{aligned} C_1 &= E_K(P_1 \oplus IV) \\ C_2 &= E_K(P_2 \oplus C_1 \oplus P_1) \\ C_3 &= E_K(P_3 \oplus C_2 \oplus P_2) \\ C_4 &= E_K(P_4 \oplus C_3 \oplus P_3) \\ C_5 &= E_K(P_5 \oplus C_4 \oplus P_4) \end{aligned}$$

Und erhalten $C = (IV, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$. Jetzt manipuliert ein Angreifer den Ciphertext und wir entschlüsseln statt C den Text $C' = (IV, C_1, C_{\mathbf{3}}, C_{\mathbf{2}}, C_4, C_5)$. Wir entschlüsseln:

$$\begin{aligned} P_1 &= D_K(C_1) \oplus IV = (P_1 \oplus IV) \oplus IV = P_1 \\ P_2' &= D_K(C_3) \oplus P_1 \oplus C_1 = (P_3 \oplus C_2 \oplus P_2) \oplus P_1 \oplus C_1 \\ P_3' &= D_K(C_2) \oplus P_2' \oplus C_3 = (P_2 \oplus C_1 \oplus P_1) \oplus P_2' \oplus C_3 \\ &= (P_2 \oplus C_1 \oplus P_1) \oplus (P_3 \oplus C_2 \oplus P_2 \oplus P_1 \oplus C_1) \oplus C_3 = P_3 \oplus C_2 \oplus C_3 \\ P_4 &= D_K(C_4) \oplus P_3' \oplus C_2 = (P_4 \oplus C_3 \oplus P_3) \oplus (P_3 \oplus C_2 \oplus C_3) \oplus C_2 = P_4 \\ P_5 &= D_K(C_5) \oplus P_4 \oplus C_4 = (P_5 \oplus C_4 \oplus P_4) \oplus P_4 \oplus C_4 = P_5 \end{aligned}$$

Das heißt, aus dem Cipher $C' = (IV, C_1, C_3, C_2, C_4, C_5)$ ist der Plaintext $P' = (P_1, P_3 \oplus C_2 \oplus P_2 \oplus P_1 \oplus C_1, P_3 \oplus C_2 \oplus C_3, P_4, P_5)$ entstanden und nur die vertauschten Blöcke sind fehlerhaft.

2.1.4 XTS (oder XEX-TCB-CTS)

Für das Xor-Encrypt-Xor-based Tweaked CodeBook Mode with Cipher Text Stealing brauchen wir einen geteilten Schlüssel $K = K_1||K_2$, ein Tweak i mit einem dazugehörigen j (z.B. ist i die Blocknummer auf der Harddisk unf j der entsprechende Sektor) und ein α, das ein primitives Element in $GF(2^{128})$ ist. Es gilt für die Ver- und Entschlüsselung:

$$\begin{aligned} c_j &= E_{K_1}\left(p_i \oplus (E_{K_2}(j) \oplus \alpha^i)\right) \oplus \left(E_{K_2}(j) \oplus \alpha^i\right) \\ p_j &= D_{K_1}\left(c_i \oplus (E_{K_2}(j) \oplus \alpha^i)\right) \oplus \left(E_{K_2}(j) \oplus \alpha^i\right) \end{aligned}$$

Die Vorteile sind

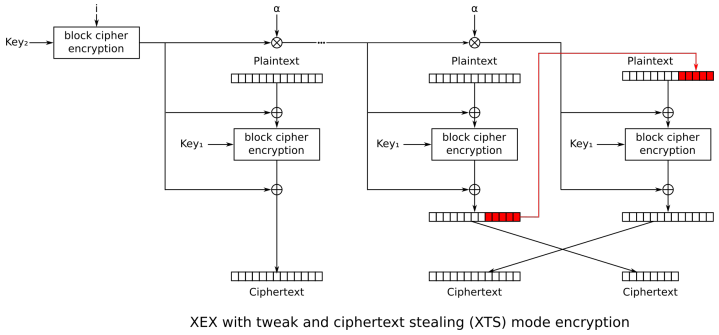


Abbildung 2.1: Aorimn, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

- deal für Datenverschlüsselung an Endpunkten (Festplattenverschlüsselung)
- Ciphertext ist gleich lang wie Klartext

Die Nachteile sind

- Schlüsselteilung (K_1 und K_2) potentiell unnötig und verkompliziert Vorgang
- Kein Authentication Tag

2.1.5 Exkurs: CTS (Cipher Text Stealing)

Grundproblem: wenn der letzte Klartextblock kleiner ist als die Blockgröße, muss dieser aufgefüllt werden. Damit wird aber der Ciphertext größer als der Klartext.

Lösung: Sei b die Blockgröße und $P = (P_1, \ldots, P_n)$ der Klartext.

1. der letzte komplette Klartextblock P_{-1} wird zu (Achtung) $C_{\mathbf{n}}$ verschlüsselt
2. der letzte Klartextblock P_n wird mit den letzten l Bits von C_n aufgefüllt
3. der neue letzter Block wird verschlüsselt, ergibt $C_{\mathbf{n-1}}$
4. Die ersten $b - l$ Bits von C_n ergeben den neuen letzten Block

2.1.6 Auswahl des Blockcipher Modus

Folgende Empfehlungen gibt es für die Auswahl der Blockcipher Modi:

Anwendungsfall	Modus
Kurze, zufällige Daten	(ECB) GCM
Daten in der Übertragung	GCM
Gespeicherte, große Daten	XTS

Andere Modi sind, wenn möglich, zu vermeiden.

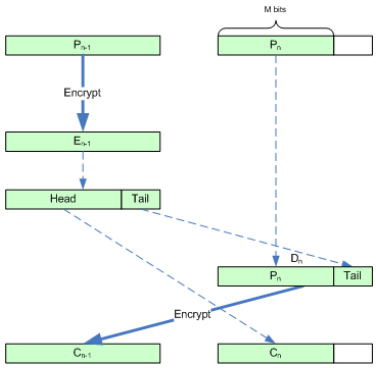


Abbildung 2.2: Yaronf, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

2.1.7 DES (Data Encryption Standard)

Das NBS, der Vorläufer des heutigen NIST, beschloss 1972 einen standardisierten Verschlüsselungsalgorithmus zu entwickeln. Die Anforderungen daran waren:

- Hohes Sicherheitslevel
- Leicht zu verstehen und lückenlos spezifiziert
- Sicherheit liegt im Schlüssel, nicht im Algorithmus
- Mit vertretbarem wirtschaftlichen Aufwand in elektronische Geräte integrierbar
- "Frei" verfügbar
- Anpassbar
- Effizient
- Validierbar
- Exportierbar

Beim ersten Aufruf gab es keine (brauchbaren) Einsendungen, beim zweiten (1974) dann eine von IBM, Lucifer. Dieser wurde mit Hilfe der NSA evaluiert, verändert und 1975 veröffentlicht, ab 1976 Standard. DES wurde weitflächig übernommen, auch von Banken, Einzelhandel, Telekommunikation, etc.

Laut heutiger Aussage war die Veröffentlichung der "größter Fehler der NSA" - sie war der Meinung, es ginge bei DES nur um Hardwareimplementierungen. Bis 1994 nur Hardware zertifiziert, keine Software. Ab 1983 wurde der Standard alle 5 Jahre reviewt:

- 1983 problemlos
- 1988 Einspruch der NSA, "likely to be broken"
  - Als Alternative COMSEC
  - Große Gegenwehr, Vorschlag abgelehnt

  - NSA stimmte dann doch Rezertifizierung zu, mit Bedingung “nie wieder”

- 1993 wieder zertifiziert
- 1999 ebenso, mit Empfehlung, 3DES zu verwenden
- 2004 Standard (FIPS 46-3) zurückgezogen

DES ist ein symmetrischer Blockcipher mit Blockgröße 64 Bit. Die Schlüsselgröße ist 64 Bit, aber effektiv nur 56, da jedes 8.Bit ein Prüfbit ist.

Die Grundprinzipien sind Konfusion und Diffusion:

Konfusion heißt, die Beziehung zwischen Klartext, Schlüssel und Ciphertext soll so komplex wie möglich sein.

Diffusion heißt, der Ciphertext hängt von so vielen Klartext Bits ab wie nur möglich.

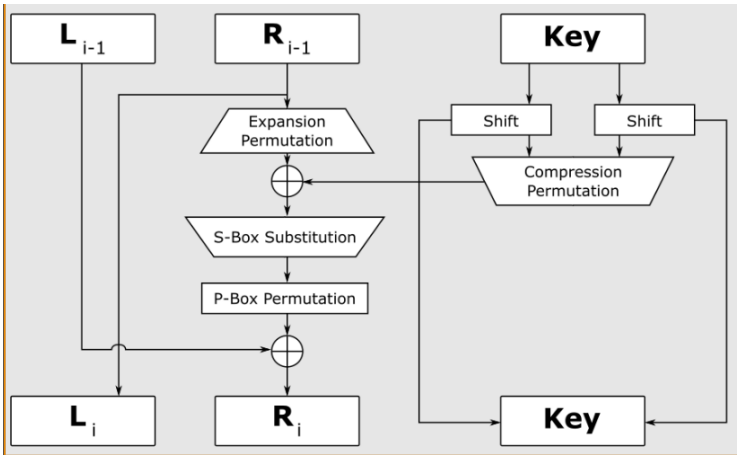


Abbildung 2.3: Eine Runde in DES, Bruce Schneier, Applied Cryptography, 2nd Edition, Fig. 12.2

DES wird mittels Permutationen und Substitutionen realisiert, die 16 Mal (als “Runden”) wiederholt werden, siehe Abb. 2.3. Diese Struktur eignet sich sehr gut für Hardwareimplementierungen.

1. Der 64-Bit Input wird initial permutiert.
2. Das Ergebnis vom letzten Schritt wird in zwei Hälften L_0 und R_0 gespalten
3. In einer Schleife wird 16 Mal ein Folgeergebnis berechnet:
   (a) $L_i = R_{i-1}$

(b) $R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i)$

4. Für das Endergebnis werden beide Hälften zusammengefügt und final permutiert, das Ergebnis hat wie der Input 64 Bit.

Die Entschlüsselung erfolgt bei DES völlig symmetrisch zur Verschlüsselung, einzig die Rundenkeys müssen in umgekehrter Reihenfolge erzeugt und verwendet werden.

Die zertifizierten Modi von DES sind ECB, CBC, OFB (Output Feedback Mode) und CFB (Cipher feedback). Implementierungen: zwischen 700 Mbit/sec (Software, OpenSSL) und 768.000.000.000 keys/sec (Hardware, crack.sh). Der DES wird heute nicht mehr weiterentwickelt.

Betrachten wir die einzelnen Schritte:

Initiale und finale Permutation Die finale Permutation ist invers zur initialen. Diese Permutation haben keinen Einfluss auf die Sicherheit, sondern wurden eingeführt um das Einlesen der Bytes in Hardware zu erleichtern. Bei Softwareimplementierungen werden sie oft ausgelassen, weil sie dort schwer und mit vielen Bitoperationen implementiert werden müssten.

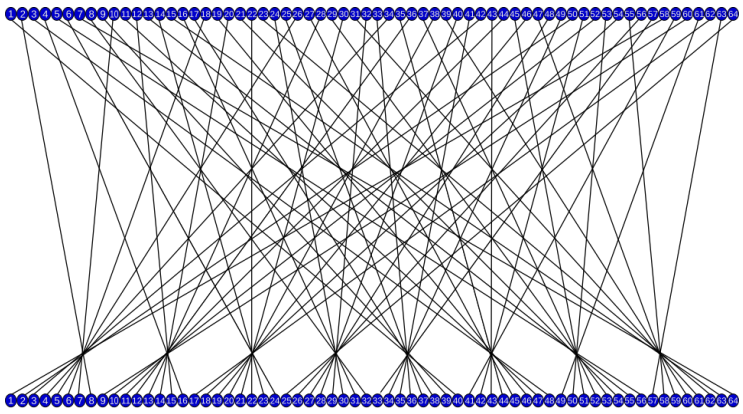


Abbildung 2.4: Initiale Permutation der 64 Bit, Quelle: Bourrichon, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

Key Transformation mit Compression Permutation Bei der Key Transformation wird vom 64-Bit Key jedes 8. Bit verworfen. Die übrigen Bits werden in zwei Hälften zu je 28 Bit geteilt und in 16 Runden zirkulär nach links geshiftet. Dabei wird fast immer um 2 Bit geshiftet, außer in Runden 1, 2, 9 und 16, wo nur um 1 Bit geshiftet wird, Tabellen 2.1 und 2.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64

Tabelle 2.1: (Key-Transformation) Input-Array für den Schlüssel mit 64 Bit

57	49	41	33	25	17	9
1	58	50	42	34	26	18
10	2	59	51	43	35	27
19	11	3	60	52	44	36

63	55	47	39	31	23	15
7	62	54	46	38	30	22
14	6	61	53	45	37	29
21	13	5	28	20	12	4

Tabelle 2.2: (Key-Transformation) Zwischen-Arrays mit Schlüsseln K_1 und K_2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56

Tabelle 2.3: (Key-Transformation) Input-Array für Compression Permutation mit 56 Bit

14	17	11	24	1	5	3	28	15	6	21	10
23	19	12	4	26	8	16	7	27	20	13	2
41	52	31	37	47	55	30	40	51	45	33	48
44	49	39	56	34	53	46	42	50	36	29	32

Tabelle 2.4: (Key-Transformation) Output-Array nach “Compression Permutation” (48 bit)

Nach dem Shiften werden aus den übrigen 56 Bits (Tabelle 2.3) 48 ausgewählt und permutiert (“Compression Permutation”) (Tabelle 2.4):

- Weil jedes 8te Bit im Key ein Parity Bit ist, ist die faktische Länge des Keys statt 64 nur 56 Bit.
- Für jede Runde muss ein anderer Schlüssel verwendet werden
- Shiften ist schnell und billig in HW implementierbar
- In keiner Runde wird der gesamte Schlüssel verwendet
- Sicher gegen Related Key Analysis

Expansion Permutation In jeder Runde wird die Hälfte R_i (32 Bit) mit dem 48 Bit Key xor-t werden. Dafür wird die Expansion Permutation benötigt. Hier gibt es einen Lawinen Effekt (Avalanche Effect), wo möglichst viele Input

Bits den Output beeinflussen (und umgekehrt). Das jeweils 1. und 4. Bit eines Blocks wird verdoppelt.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32

Tabelle 2.5: (Expansion Permutation) Input-Array R_i (32 Bit)

32	1	2	3	4	5	4	5	6	7	8	9
8	9	10	11	12	13	12	13	14	15	16	17
16	17	18	19	20	21	20	21	22	23	24	25
24	25	26	27	28	29	28	29	30	31	32	1

Tabelle 2.6: (Expansion Permutation) Zwischen-Array für Expansion Permutation

14	17	11	24	1	5	3	28	15	6	21	10
23	19	12	4	26	8	16	7	27	20	13	2
41	52	31	37	47	55	30	40	51	45	33	48
44	49	39	56	34	53	46	42	50	36	29	32

Tabelle 2.7: (Expansion Permutation) Output-Array nach Expansion Permutation (sic)

- Der Datenblock muss auf Schlüsselgröße erweitert werden
- Durch Wiederholung einzelner Bits breitet sich Einfluss des Inputs aufden Output schneller aus (ein Inputbit beeinflusst 2 S-Box Lookups)

S-Boxen Der expandierte Block R_i wird mit dem komprimierten Rundenschlüssel ver-xor-t. Der resultierende 48 Bit Block wird in 8 6er-Blöcke aufgeteilt. Jeder dieser 6 Bit Blöcke kommt in eine eigene S-Box.

Jede S-Box enthält 4 Zeilen zu je 16 Spalten und hat 4 Bit große Einträge.

- Bits (1, 6) indizieren die Zeile (00, 01, 10, 11)
- Bits (2, 3, 4, 5) indizieren die Spalte (0000, 0001, ..., 1111)
- Beispiel: Der 6 Bit Input `100111` wird auf den Eintrag in Zeile 4 (`11`), Spalte 4 (`0011`) gemapped

Aus den 48 ($= 8 \cdot 6$) Bit Input wird über eine nicht-lineare Operation so ein 32 ($= 8 \cdot 4$) Output generiert. Dieser Schritt ist besonders wichtig in DES.

Die Designkriterien für die S-Boxen (vgl. Don Coppersmith, The Data Encryption Standard (DES) and its strength against attacks) waren:

- Wegen HW und Technologie Beschränkungen (1974) waren nicht mehr als 6 Input- und 4 Output-Bits möglich
- Kein Output Bit darf nahe einer linearen Funktion der Input Bits sein
  - Für jedes Output Bit und jeder Menge der 6 Input Bits ist das XOR dieser Inputs in ca. 50% der Fälle gleich dem Output Bit
- Jeder mögliche 4-Bit Output wird angenommen
- Wenn sich 2 Inputs um 1 Bit unterschieden, unterschiedet sich der Output um mindestens 2 Bit
- Wenn sich 2 Inputs nur in den beiden mittleren Bits unterscheiden, unterscheidet sich der Output in mindestens 2 Bit
- Wenn die ersten beiden Bits zweier Inputs anders, die letzten beiden gleich sind, dann ist der Output niemals ident

P-Boxen Nach der Substitution werden die 32 Bit noch einmal permutiert. Zum Abschluss werden die 32 Bit noch mit der linken Datenhälfte ver-xor-t. Danach werden R_i und L_i vertauscht.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32

Tabelle 2.8: (P-Box) Input-Array vor Permutation (32 Bit)

16	7	20	21	29	12	28	17
1	15	23	26	5	18	31	10
2	8	24	14	32	27	3	9
19	13	3	6	22	11	4	25

Tabelle 2.9: (P-Box) Input-Array nach Permutation (32 Bit)

Die Designkriterien der P-Boxen waren:

- Die Output Bits von Runde i (4 Bit) werden so verteilt, dass
  - zwei der Bits in der Folgerunde zu den “mittleren” Bits einer S-Box werden.
  - zwei der Bits in der Folgerunde zu den “Endbits” werden.
  - sechs unterschiedliche S-Boxen dadurch beeinflusst werden.

DES Runden Nach 5 Runden ist jedes Outputbit eine Funktion jedes Input- und jedes Keybits.

Nach 8 Runden ist der Output quasi eine Zufallsfunktion – aber durch differentielle Kryptoanalyse ((wieder)entdeckt 1990) kann jede DES Implementierung innerhalb von 16 Runden gebrochen werden.

Sicherheitsbetrachtungen div. Schlüssel Es gibt Weak Keys , bei diesen besteht mindestens eine Hälfte (potentiell der gesamte Schlüssel) aus nur `0` oder `1`. Dadurch wird in jeder Runde derselbe Subkey erzeugt. Es gibt 4 verschiedene Weak Keys:

- `0x0101010101010101`
- `0xFEFEFEFEFEFEFEFE`
- `0xE0E0E0E0F1F1F1F1`
- `0x1F1F1F1F0E0E0E0E`

Bei Semiweak Keys werden statt 16 unterschiedlicher Subkeys nur 2 erzeugt. Nachrichten die mit einem der Schlüsseln aus so einem Paar verschlüsselt werden, können auch mit dem anderen entschlüsselt werden. Von diesen Paaren gibt es 6:

- `0x011F011F010E010E` und `0x1F011F010E010E01`
- `0x01E001E001F101F1` und `0xE001E001F101F101`
- `0x01FE01FE01FE01FE` und `0xFE01FE01FE01FE01`
- `0x1FE01FE00EF10EF1` und `0xE01FE01FF10EF10E`
- `0x1FFE1FFE0EFE0EFE` und `0xFE1FFE1FFE0EFE0E`
- `0xE0FEE0FEF1FEF1FE` und `0xFEE0FEE0FEF1FEF1`

Weiters gibt es auch Possibly Weak Keys, diese erzeugen nur 4 unterschiedliche Subkeys, von denen gibt es 48.

Die Eigenschaft Complement Keys beschreibt, dass das Einser-Komplement eines Schlüssels das Einser-Komplement eines Klartextes zum Einser-Komplement des Ciphertexts verschlüsselt:

$$\mathrm{DES}(p, k) = c \Rightarrow \mathrm{DES}(\neg p, \neg k) = \neg c$$

Damit muss ein Brute-Force Angreifer nur die Hälfte der Keys ausprobieren (trotzdem noch 255 Möglichkeiten).

Schlüssellänge: Der Erstvorschlag hatte 112 Bit Keys, die NSA wollte ihn auf 48 verkürzen, als Kompromiss hat man sich auf 56 Bit geeinigt. Per Brute-Force konnte man 1977 2^{56} Schlüssel schwer knacken, heute ist diese Aufgabe problemlos:

- "Deep Crack", 1998, $250.000, 56 Stunden
- COPACOBANA, 2006, $10.000, unter 24 Stunden
- `www.cloudcracker.com`, 2013, $20, 21 Stunden
- crack.sh, 2017, 26 Stunden

Variante zu Brute-Force: Klartextblock mit allen 2^{56} Schlüsseln verschlüsseln und speichern, dann in Übertragung diesen Klartextblock einschleusen und Ciphertext abfangen.

Kryptoanalyse:

- Resistent gegen differentielle Krytanalyse, wenn alle 16 Runden verwendet
- Weniger resistent gegen lineare Kryptanalyse, aber immer noch 2^{43} Klartexte nötig
- Resistent gegen Related Key Kryptanalyse

Trotzdem: DES kann in seiner Urform heute nicht mehr als sicher angesehen werden!

2.2 Strengthening

2.2.1 Mehrfache Verschlüsselung

Grundidee: Klartext mit demselben Algorithmus, aber unterschiedlichen Schlüsseln, mehrmals verschlüsseln (denselben Schlüssel zu verwenden bringt keinerlei Gewinn).

Double Encryption Die Ver- und Entschlüsselung dieses Blockalgorithmus ist:

$$c = E_{K_2}\left(E_{K_1}(p)\right)$$
$$p = D_{K_1}\left(D_{K_2}(c)\right)$$

Double Encryption ist nur sinnvoll, wenn der Blockalgorithmus keine algebraische Gruppe bildet (präziser: wenn er nicht abgeschlossen ist). Ansonsten gibt es immer ein K_3, sodass $c = E_{K_2}\left(E_{K_1}(p)\right) = E_{K_3}(p)$.

Eine naive Rechnung gibt uns die Erkenntnis, dass wir statt 2^n verschiedenen Schlüsseln nun 2^{2n} verschiedene Schlüssel haben.

Problem: Meet-in-the-Middle Attack, diese benötigt nur 2^{n+1} Versuche:

- Ist eine Known-Plaintext Attacke
- Der Angreifer kennt zwei Plaintext-Ciphertext Paare (p_1, c_1) und (p_2, c_2).
- Angreifer berechnet und speichert $E_K(p_1)$ für jeden möglichen Schlüssel K
- Danach berechnet er $D_K(c_1)$ für jedes K und sucht diesen Wert unter den gespeicherten
- Wenn gefunden: aktuelles K ist sehr wahrscheinlich K_2, und K für Wert in Speicher war K_1, nachprüfbar mit (p_2, c_2).
- Nicht praktikabel, aber weit besser als Brute-Force

  - Meet-in-the-middle: $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Verschlüsselungen, Speicheraufwand: $O(2^n)$
  - Brute Force: 2^{2n} Verschlüsselungen, Speicheraufwand: $O(1)$

Triple Encryption Die Ver- und Entschlüsselung dieses Blockalgorithmus ist ein Encryption-Decryption-Encryption Schema (EDE):

$$c = E_{K_3}\left(D_{K_2}\left(E_{K_1}(p)\right)\right)$$
$$p = D_{K_1}\left(E_{K_2}\left(D_{K_3}(c)\right)\right)$$

In DES wird das als Triple-DES verwendet.

- 3 Optionen:
  1. $K_1 \neq K_2 \neq K_3$
  2. $K_1 = K_3$ und $K_1 \neq K_2$
  3. $K_1 = K_2 = K_3$
- Option 1 ergibt einen 168(=$3 \cdot 56$)Bit Key (effektiv aber nicht stärker als 112 Bit)
- Option 2 ergibt 112-Bit Key, ist aber stärker als einfache Double Encryption (weil meet-in-the-middle jetzt einmal K_1K_2 raten muss)
- Option 3 ist effektiv wieder DES, existiert nur aus Abwärtskompatibilität (was auch der Grund für das EDE Muster ist, ansonsten wäre z.B. EEE genauso anwendbar)
- Beste Attacke ist wieder Variante von meet-in-the-middle, mit Komplexität 2^{2n} (und damit der Komplexität, die man bei Double Encryption hätte erwarten können)
- Triple-DES wird aktuell noch bis 2023 zur Verwendung erlaubt
- Auch andere Varianten möglich, z.B. Independent Subkeys, Key-dependent S-Boxes,...

2.2.2 Kaskadierung

Bei Kaskadierung werden unterschiedliche Algorithmen hintereinander angewendet. Wenn die einzelnen Schlüssel unabhängig sind, ist die Kaskade mindestens so schwer zu brechen wie der erste Algorithmus in der Kaskade.

2.2.3 Whitening

Vor und nach der Verschlüsselung wird ein Teil des Schlüssels mit dem Input/Output verxort. Das verhindert, dass ein Angreifer Klartext/Geheimtext Paare bekommen kann.

2.3 AES (Advanced Encryption Standard)

Im Jänner 1997 wurde vom NIST ein Wettbewerb für einen DES Nachfolger ausgeschrieben. AES ist seit Mai 2002 offizieller Standard. Der ursprünglicher Aufruf war "an unclassified, publicly disclosed encryption algorithm capable of protecting sensitive government information well into the next century". Im September 1997 wurden die Anforderungen spezifiziert:

- The algorithm must implement symmetric (secret) key cryptography.
- The algorithm must be a block cipher.
- The candidate algorithm shall be capable of supporting key-block combinations with sizes of 128-128, 192-128, and 256-128 bits. A submitted algorithm may support other key-block sizes and combinations, and such features will be taken into consideration during analysis and evaluation.

In der 1. Runde gab es 15 Einreichungen, von denen 5 in die nächste Runde kamen, nämlich

- MARS
- RC6
- Rijndael
- Serpent
- Twofish

Der Sieger war Rijndael von Vincent **Rij**men und Joan **Dae**men. Bruce Schneier sagte 2000 über den Algorithmus

"I believe that within the next five years someone will discover an academic attack against Rijndael. I do not believe that anyone will ever discover an attack that will allow someone to read Rijndael traffic. So while I have serious academic reservations about Rijndael, I do not have any engineering reservations about Rijndael."

2.3.1 Exkurs: Arithmetik in $GF(2^m)$

Wir betrachten die Arithmetik in binären Erweiterungskörpern. Bezeichne $GF(2^m)$ die Menge aller binären Polynomen mit Grad $< m$.

- Berechnungen modulo irreduziblem Polynom von Grad m
- m ist (z.B. bei elliptischen Kurven): (113), (131), 163, (176), 191, 193, 233, (239), (283), (409), 571
- Elemente dargestellt als Integer
  - $x^3 + x^2 + 1$ ist Element von $GF(2^4)$, dargestellt als 1101
  - für $GF(2^m)$ sind m Bit notwendig
  - Elemente aus $GF(2^8)$ passen exakt in ein Byte

Operationen Sei $a(x) = x^3 + x^2 + x = 1110, b(x) = x^2 + x + 1 = 0111$ und $f(x) = x^4 + x + 1 = 10011$. Es gilt:

- Addition/Subtraktion: Polynomaddition modulo 2, entspricht xor

$$a + b = x^3 + 1(1110 xor 0111 = 1001)$$

- Inversion bzgl. $f(x)$

$$b^{-1} = x^2 + x$$

- Multiplikation mod $f(x)$

$$a \cdot b = x^5 + x^3 + x \mod f(x) = x^3 + x^2$$

- Quadrierung mod $f(x)$ (einfache Spreizung)

$$a^2 = x^6 + x^4 + x^2 \mod f(x)(11102 = 1010100) = x^3 + x + 1$$

Übung Sei $a(x) = x^3 + x^2 + x, b(x) = x^2 + x + 1, c(x) = x^2 + x$ und $f(x) = x^4 + x + 1$. Berechnen Sie

1. $c + b$
2. $a + b + c$
3. $b - c$
4. $c^2 \mod f$
5. $b \cdot c \mod f$
6. $c^{-1} \mod f$

2.3.2 Verschlüsselung

Rijndael ist ein Blockcipher, die Block- und Schlüssellänge ist jedes Vielfache von 32 Bit zwischen inkl. 128 und inkl. 256 Bit. Es verwendet kein Feistelnetzwerk, für jede Operation muss eine inverse Operation definiert werden.

Die Unterschiede zwischen Rijndael und AES sind:

- AES Blocklänge ist immer 128 Bit
- AES Schlüssellängen
  - 128 Bit (10 Runden)
  - 192 Bit (12 Runden)
  - 256 Bit (14 Runden)

Sei b die Blocklänge des Ciphers. AES operiert auf einem State:

- 2-dimensionales Bytearray mit 4 Zeilen und $b/32$ Spalten
- Sowohl Klartext als auch Schlüssel werden zu Beginn auf je ein solches Array gemappt
- Beispiel: bei 128 Bit Blocklänge ergibt sich ein 4×4 Array

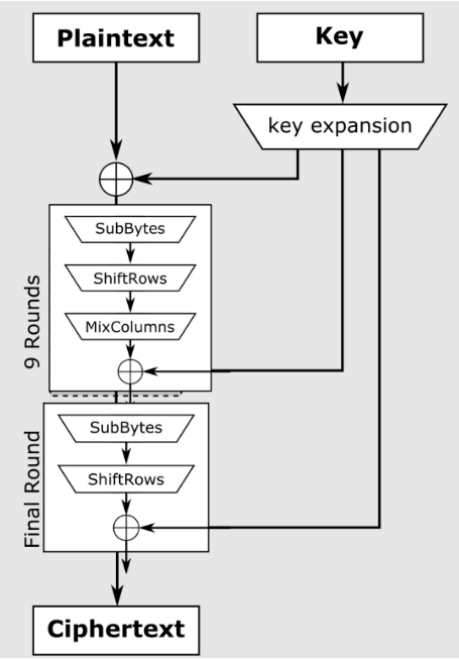


Abbildung 2.5: AES

SubBytes ist die einzige nicht-lineare Operation in AES.

- Konfusion
- S-Box
- Die einzelnen Bytes werden als Elemente von $GF(2^8)$ betrachtet
- Irreduzibles Polynom ist $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$
- Jedes Byte $a_{i,j}$ wird transformiert zu $b_{i,j} = Sbox(a_{i,j}) = f(g(a_{i,j}))$ mittels
  - $g : a \mapsto a' = a^{-1}$
  - $f : a' \mapsto b = A \cdot a' + v$
- Affine Transformation mit v um Attacken zu Vermeiden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } v = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)^\top$$

ShiftRows Diffusion

- Jede Zeile des States wird zyklisch nach links geshiftet
- Offsets: 0,1,2,3 für 128 Bit Blocklänge
- Mit diesen Offsets maximale Diffusion und größte Resistenz gegen bekannte Attacken

0	4	8	12
1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15

0	4	8	12
5	9	13	1
10	14	2	6
15	3	7	11

Tabelle 2.10: (ShifRows) Array vor und nach der Operation.

MixColumns Diffusion

- Arbeitet auf den Spalten des States (wegen 32-Bit Architektur sind 4 Zeilen, d.h. 32 Bit pro Spalte optimal)
- Bytes einer Spalte werden Koeffizienten eines Polynoms vom Grad 3 in $GF(2^8)$ betrachtet
  - Spalte wird multipliziert mit $03x^3 + 01x^2 + 01x + 02$
  - Multiplikation mit 01 ist die Identität
  - Multiplikation mit 02 ist ein Shift und ein XOR
  - Multiplikation mit 03 ist eine Multiplikation mit 02 und ein XOR
  - Reduziert mit $x^4 + 1$

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$

Tabelle 2.11: (MixColumns) Einträge des States

De facto handelt es sich also um ein Polynom in x, dessen Koeffizienten Polynome sind. Herleitung daher allgemein einfacher. Notation: statt $a_{i,j}$ steht im Folgenden a_i, zur Wahrung der Übersichtlichkeit, weil die Einträge eben spaltenweise ausgelesen werden.

Beispiel : Stelle das Polynom

$$
\begin{aligned}
&(02a_3 + a_2 + a_1 + 03a_0)x^3 + \\
&(03a_3 + 02a_2 + a_1 + a_0)x^2 + \\
&(a_3 + 03a_2 + 02a_1 + a_0)x^1 + \\
&(a_3 + a_2 + 03a_1 + 02a_0)
\end{aligned}
$$

in Matrixdarstellung dar:

$$
\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}
$$

AddRoundKey Aktueller Rundenschlüssel wird byteweise mit aktuellem State verxort

Key Schedule Aus initialem 128-bit (bzw. 192 bzw. 256-bit) Key muss für jede Runde ein Schlüssel in Blocklänge (128 Bit) generiert werden. Seo b die Blocklänge und r die Rundenanzahl. Die zwei Schritte dafür sind:

1. Key Expansion: wie wird aus initialem Schlüssel ein Schlüssel der Länge $(r + 1) \cdot b$ Bit
2. Round Key Selection: wie wird Schlüsselteil für aktuelle Runde ausgewählt

- Schlüssel wird in 2-dimensionales Array geschrieben
- Die letzte Spalte des Arrays wird einmal zirkulär nach oben geshiftet
- Danach mittels S-Box aus SubBytes behandelt
- Dann mit Rundenkonstante verxort
  - Runde 1: 0x01 (1, 01)
  - Runde 2: 0x02 (x, 10)
  - Runde 3: 0x04 (x2, 100)
  - Runde 4: 0x08 (x3, 1000)
  - Runde 5: 0x10 (x4, 1 0000)
  - Runde 6: 0x20 (x5, 10 0000)
  - Runde 7: 0x40 (x6, 100 0000)
  - Runde 8: 0x80 (x7, 1000 0000)
  - Runde 9: 0x1b (x8 mod (x8 + x4 + x3 + x + 1), 1 1011)
  - Runde 10: 0x36 (x9 mod (x8 + x4 + x3 + x + 1), 11 0110)
- Schließlich mit erster Spalte des letzten Rundenschlüssels verxort, ergibt erste Spalte des aktuellen Rundenschlüssels
- Übrige Spalten entstehen durch verxoren der vorherigen Spalte mit der entsprechenden Spalte des letzten Rundenschlüssels (Spalte 2 des neuen Schlüssels ist also Spalte 1 des neuen verxort mit Spalte 2 des alten)

2.3.3 Entschlüsselung

Für die Entschlüsselung brauchen wir für jede Funktion der Verschlüsselung ein Inverses:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
SubBytes	InvSubBytes
ShiftRows	InvShiftRows
MixColumns	InvMixColumns
AddRoundKey	AddRoundKey (selbstinvers)

Weiters, muss die Reihenfolge der Operationen umgekehrt werden. Möglichkeit einer mathematisch äquivalenten Beschreibung, um die Reihenfolge beizubehalten:

- InvSubBytes und InvShiftRows können vertauscht werden, es ist völlig egal, ob Werte zuerst ersetzt und dann verschoben werden, oder umgekehrt
- InvMixColumns und AddRoundKey können vertauscht werden, weil InvMixColumns linear ist, d.h. $F(a \oplus b) = F(a) \oplus F(b)$

Damit ist wenn EquivRoundKey := InvMixColumns(RoundKey):

InvMixColumns(State⊕Roundkey) = InvMixColumns(State)⊕EquivRoundKey.

Beispiel für 3 Runden:

Verschlüsselung	> Entschlüsselung	> Entschlüsselung optimiert
AddRoundKey	AddRoundKey	AddRoundKey
SubBytes	InvShiftRows	InvSubBytes
ShiftRows	InvSubBytes	InvShiftRows
MixColumns	AddRoundKey	InvMixColumns
AddRoundKey	InvMixColumns	EquivRoundKey
SubBytes	InvShiftRows	InvSubBytes
ShiftRows	InvSubBytes	InvShiftRows
MixColumns	AddRoundKey	InvMixColumns
AddRoundKey	InvMixColumns	EquivRoundKey
SubBytes	InvShiftRows	InvSubBytes
ShiftRows	InvSubBytes	InvShiftRows
AddRoundKey	AddRoundKey	AddRoundKey

2.3.4 Zusammenfassung

Effizienz

- Sämtliche Berechnungen können vorab als Lookup-Tables gespeichert werden

- SubBytes, ShiftRows und MixColumns können in einer Operation zusammengefasst werden
- Sowohl in Hardware als auch in Software schnell implementierbar
- Von 8-bit bis 128-bit Architekturen
- Intel mit eigenen Instruction Set Extensions für AES (z.B. `AESENC`, `AESENCLAST`, `AESDEC`, ...)

Designentscheidungen

- Anzahl der Runden
  - Volle Diffusion nach 2 Runden (mit Feistelnetzwerk nicht erreichbar)
  - Änderung in einem State Bit beeinflusst ungefähr die Hälfte aller State Bits nach 2 Runden
  - Keine Attacken für Versionen ab 6 Runden gefunden
  - 4 Runden Security Margin hinzugefügt, damit also quasi je einmal volle Diffusion am Anfang und am Ende hinzugefügt
  - Für je 32 Bit Schlüssellänge wird eine Runde hinzugefügt
  - Für je 32 Bit Blocklänge wird eine Runde hinzugefügt (betrifft nur Rijndael)
- SubBytes
  - ist nicht-linear, erreicht durch Inversion in endlichem Körper
  - Algebraisch Komplex, erreicht durch affine Transformation
- ShiftRows
  - Maximale Diffusion (4 unterschiedliche Offsets)
  - Einfachste Variante bei mehreren gleichwertigen gewählt
- MixColumns
  - 4-Byte Spalten, um 32-Bit Architektur auszunützen
  - Linear in $GF(2)$
  - Diffusion, nicht zwangsläufig optimale
  - Auch auf 8-Bit Architekturen gute Performance
- KeyAddition und Key Schedule
  - Durch Addition des Keys am Anfang und am Ende (siehe Whitening)
  - Möglichst wenig Arbeitsspeicher für KeyExpansion durch rekursive Definition
  - Symmetrien eliminiert durch Addition der Rundenkonstanten
  - Diffusion

Kritik und Angriffe Es gibt zwei große Kritikpunkte bzgl. AES:

- Einfachheit
  - Großteil ist algebraisch zu beschreiben
  - Ungewöhnlich für Blockcipher
- Key Schedule

  - Attacken für 256 Bit Keys bekannt

Die momentan besten Angriffe sind:

- Auf AES-256, 14 Runden, in $O(2^{99.5})$
- Auf AES-192, 12 Runden, in $O(2^{176})$
- Auf AES-128, 10 Runden, in $O(2^{126.1})$

2.4 Streamcipher

Im Gegensatz zu Blockciphern werden hier Daten verschlüsselt, sobald sie zur Verfügung stehen. Das wird überall dort gebraucht, wo Latenzen ein Problem bereiten.

Streamciphers sind üblicherweise sehr effizient in Hardware implementierbar.

Datenstrom wird mit einem Schlüsselstrom verknüpft (üblicherweise per xor)m dafür muss der Schlüsselstrom gleich lang sein wie die Daten. Im Idealfall ist der Schlüsselstrom eine komplette Zufallsfolge (siehe One-Time Pad).

Bei Streamciphern sind Konfusion und Diffusion nicht möglich (sic! Vgl. ChaCha20). Das heißt die Sicherheit liegt allein in der Qualität des Schlüsselstroms.

Streamcipher werden sehr oft gerade in der Telekommunikationsbranche verwendet, allerdings gibt es sehr wenige Spezifikationen die öffentlich oder standardisiert sind. Eine Initiative, die versucht eine Standardisierung zu erreichen war z.B. das eSTREAM Projekt der EU.

Durch geeigneten Betriebsmodus kann beliebiger Blockcipher zu Streamcipher umgebaut werden. Damit sind grundsätzlich alle positiven, untersuchten Eigenschaften des Blockciphers auf den erzeugten Schlüsselstrom übertragbar.

2.4.1 Streamcipher Modi

CFB (Cipher Feedback Mode)

$$c_i = p_i \oplus E_K(c_{i-1})$$
$$p_i = c_i \oplus E_K(c_{i-1})$$

Vorteile:

- selbstsynchronisierend (self-synchronizing): wenn n Bit gleichzeitig verschlüsselt werden, hängt der Keystream nur von den letzten n Bit ab

Nachteile:

- 1 Bit Fehler im i-ten Ciphertext verursacht zuerst 1 Bit Fehler im i-ten Klartext, danach fehlerhaften folgenden $(i+1)$-ten Block

- Angreifer kann beliebige Bits manipulieren. Der folgende Block lässt sich danach nicht mehr entschlüsseln, je nach Applikation kann das dem Angreifer aber genügen.
- Der letzte Block lässt sich völlig unbemerkt manipulieren
- Wie im CBC Mode wird ein IV benötigt, dieser muss aber einzigartig sein, ansonsten entstehen gleiche Keystreams

OFB (Output Feedback Mode) Sei $s_i = E_K(s_{i-1})$, dann

$$c_i = p_i \oplus s_i$$
$$p_i = c_i \oplus s_i$$

Vorteile:

- s_i ist unabhängig von Klar- und Ciphertext, d.h. Schlüsselstrom beliebiger Länge kann offline vorberechnet werden (synchronous)
- 1 Bit Fehler im Ciphertext bewirkt nur 1 Bit Fehler im Klartext, keine Fehlerfortpflanzung

Nachteile:

- Synchronisation wichtig; sobald beide Schlüsselströme nicht mehr synchron laufen, keine Entschlüsselung mehr möglich
- Insertion Attack möglich

Insertion Attack

1. Angenommen, Angreifer kennt Ciphertextstream $c = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$
2. Es gilt, c entstand durch xor von Klartextstream p und Schlüsselstream k $(c_1 = p_1 \oplus k_1, \ldots)$
3. Angreifer fügt Bit p'_1 in p ein (z.B. nach p_1) und schneidet neuen Cipherstream mit
4. Wenn derselbe Keystream verwendet wurde, dann gilt:
   - $c_1 = p_1 \oplus k_1$
   - $c'_2 = p'_1 \oplus k_2$
   - $c'_3 = p_2 \oplus k_3$
   - $\ldots$
5. Da Angreifer p'_1 kennt, kann er alle darauffolgenden Bits und in Folge den kompletten Keystream entschlüsseln:
   - $k_2 = c'_2 \oplus p'_1$
   - $p_2 = c_2 \oplus k_2$
   - $k_3 = c'_3 \oplus p_2$
   - $\ldots$

CTR (Counter Mode) Sei $s_i = E_K(\text{Nonce}||i)$, dann

$$c_i = p_i \oplus s_i$$
$$p_i = c_i \oplus s_i$$

Vorteile:

- s_i kann parallel berechnet werden, kein Feedback nötig
- Nonce $||i$ muss Blocklänge haben (also z.B. 128-Bit bei AES)
- Wahlfreier Zugriff
- Sehr einfach

Nachteile:

- Bit Flipping möglich
- Nonce und Zähler dürfen nicht mehrmals verwendet werden

GCM (Galois Counter Mode) TODO

$$\begin{aligned} y_0 &= IV||1 \\ H &= E_K(0) \\ GHASH(H, A, C) &= \bigoplus_i \left((A_i \bullet H^i) \oplus \left(\bigoplus_j (C_{j+i} \bullet H^{j+i}) \right) \right) \ldots \\ T &= GHASH(H, A, C) \oplus E_K(y_0) \end{aligned}$$

und $si = E_K(y_{i-1} + 1)$, dann ist die Definition der Ver- und Entschlüsselung

$$c_i = p_i \oplus s_i$$
$$p_i = c_i \oplus s_i$$

Vorteile:

- s_i kann parallel berechnet werden, kein Feedback nötig
- T dient als Authentication Tag, authentifiziert den Ciphertext
- A sind Daten, die nur authentifiziert, nicht verschlüsselt werden
- Sehr schnell in Hard- und Software

Nachteile:

- IV darf nur einmal verwendet werden

2.4.2 Klassifikation

One-Time Pad Ein One-Time Pad ist unconditionally secure. Hierbei ist der Schlüssel genauso lang wie die Nachricht und absolut zufällig.

Synchron Ein Keystream wird unabhängig von der Nachricht erzeugt und hängt nur vom initialen Schlüssel und dem aktuellen internen Zustand des Ciphers ab (z.b. OFB). Der Sender und Empfänger müssen daher stets im selben internen Zustand sein, d.h. eine externe Synchronisation ist notwendig. Bei dieser Art gibt es keine Fehlerfortpflanzung.

Asynchron (selbstsynchronisierend) Der Keystream ist eine Funktion des Schlüssels und der letzten n Ciphertext Zeichen (z.B. CFB). Bei fehlenden/eingefügten Zeichen pflanzt sich der Fehler nur über n Zeichen fort, danach synchronisiert sich der Empfänger von selbst wieder.

2.4.3 Exkurs: AEAD (Authenticated Encryption with Associated Data)

AEAD bezeichnet einen Cipher Modus, der gleichzeitig (simultan!) Confidentiality und Authenticity bereitstellt. Es fügt einer verschlüsselten Nachricht einen Authentifizierungs-Tag an, der den Besitz des privaten Schlüssel garantiert. Beispiele für Algorithmen, die AEAD ermöglichen sind AES-GCM oder ChaCha20-Poly1305.

In vielen modernen Protokollen wird AEAD verwendet, z.B. TLS1.3, HTTP3 und VPNs.

2.4.4 ChaCha20

Der ChaCha20 wurde 2008 von Daniel J. Bernstein entwickelt und wird in RFC 8439 beschrieben. Er ist eine verbesserte Version des Salsa20 Ciphers. Er ist schnell, sicher und einfach zu implementieren und hat breite Verwendung gefunden, z.B.:

- TLS
- SSH
- VPNs
- Android
- ...

Für diesen Cipher sind keine praktischen Angriffe bekannt, er ist sogar resistent gegen Timing-Angriffe.

Die Runden, die in der Berechnung durchlaufen werden, sorgen für eine gute Diffusion.

Der ChaCha20 wird häufig in Kombination mit dem Authentifizierungsalgorithmus Poly1305 verwendet, das ChaCha20-Poly1305 AEAD.

Weitere Infos auf `https://cr.yp.to/chacha.html`.

Beschreibung

Inputs:

- Key (256 Bit, d.h. 32 Byte)
- Nonce bzw. IV (96 Bit)
- Counter (32 Bit)

Zwei Nachrichten mit demselben Key dürfen nicht den gleichen Ciphertext erzeugen. Der Counterwird pro 64-Byte-Block erhöht.

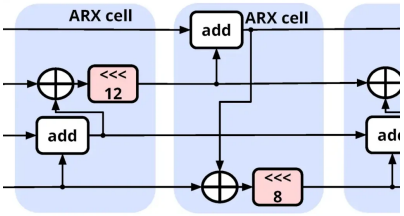
Output: Keystream, der aus Key, Nonce und Counter erzeugt wird und mit dem Plaintext verxort den Ciphertext stream ergibt.

Es gibt einen internen 512-Bit-State, der aus 16 (4×4) 32-Bit-Wörtern besteht:

- 0-3: Konstante ("expand 32 byte k")
- 4-11: 256 Bit Schlüssel
- 12: Counter
- 13-15: Nonce

Es werden 20 Runden (10 Double Rounds) einer Add-XOR-Rotation durchgeführt. Eine Quarter Round (mit 4 von 16 Wörtern) führt aus:

```
a += b; d ^= a; d <<< 16;
c += d; b ^= c; b <<< 12;
a += b; d ^= a; d <<< 8;
c += d; b ^= c; b <<< 7;
```



Kapitel 3

Padding

Bei allen Algorithmen, die Nachrichten in festen Blöcken verarbeiten, muss die Nachrichtenlänge ein Vielfaches der Blocklänge sein. Das gilt z.B. bei Blockciphern, aber auch bei Hashfunktionen etc.

Manchmal hilft Padding auch bei der Verschleierung des tatsächlichen Inhalts bei deterministischen Verfahren wie z.B. RSA oder klassische Cipher.

Deswegen versuchen wir, unsere Nachrichten in einer passenden Form aufzufüllen. Entweder weiß der Empfänger über das Padding Bescheid, oder er kann es - je nach konkreter Anwendung ignorieren. Es ist aber zu beachten, dass das Padding sich klar von der Nachricht untescheidet. Ein Negativbeispiel ist das Padding mit zufälligen Wörtern und Sätzen, wie bei der Geschichte aus dem zweiten Weltkrieg: `https://en.wikipedia.org/wiki/The_world_wonders`.

Es gilt zwar, dass ein Padding eine Nachricht immer verlängert, wir versuchen diese aber auf weniger als eine Blockgröße zu beschränken.

3.1 Block cipher mode of operation

Bei einem einfachen Padding, könnte der letzte Block mit einem regulären Bitmuster aufgefüllt werden:

- nur 0er bzw. nur 1er
- abwechselnd 0 und 1
- so, dass der Empfänger das Padding entfernen kann
  - z.B. lauter 0er und am Ende ein Byte, das angibt, wie viele Bytes entfernt werden sollen (z.B. ..., `0x12, 0x15, 0x0, 0x0, 0x2`)
  - dann muss aber jede Nachricht gepadded werden
  - im schlimmsten Fall, muss ein gesamter Block angefügt werden

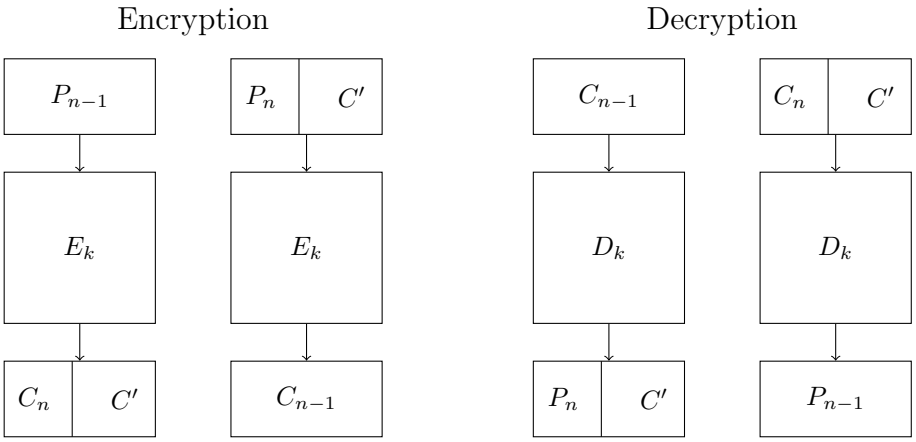
Bei CBC gibt es folgendes Schema:

1. Der letzte vollständige Block wird nochmals verschlüsselt

2. Die linkesten l Bit des neuen Ciphertext Blocks werden mit dem l-bit langen Klartextrest verxort

3. Problem: Angreifer kann durch Manipulation des Ciphertextes gezielt Bits im letzten Klartextblock verändern

Cipher Text stealing



Bei Cipher Text Stealing wird der vorletzte komplette Block P_{n-1} verschlüsselt und in Teile C_n und C' aufgeteilt. Dann wird der letzte Block P_n mit C' gepadded und verschlüsselt. Dieser komplette Block C_{n-1} kommt an die vorletzte Stelle des Ciphertexts und der noch nicht verwendete Teil C_n wird angehängt. So kann die Nachricht mit Block Ciphern verschlüsselt werden, ohne sie zu verlängern.

3.2 Hashfunktionen

MD5 und SHA-1 Hier muss die Nachricht um 64 Bits kleiner sein als ein Vielfaches von 512. Das Padding ist eine 1 und entsprechend vielen 0 auf die benötigte Länge. Danach werden 64 Bit mit der Länge der ungepaddeten Nachricht angehängt, das erzeugt eine Nachricht mit einer durch 512 teilbaren Länge.

Diese Methode vermeidet, dass gleich beginnende und mit 0 endende Nachrichten denselben Hashwert haben. Ohne das Einfügen der 1 vor dem Padding (und ohne angefügte Länge) würden `foo` und `foo00` bzw. `foo100` denselben Hash ergeben.

3.3 Byteweise

ANSI X.923 Mit 0x00 Bytes gepaddet, letztes Byte gibt Anzahl der Padding Bytes an

ISO 10126 Mit zufälligen Bytes gepaddet, letztes Byte gibt Anzahl der Padding Bytes an (mittlerweile zurückgezogen)

ISO 7816 (ISO 9797) Ein fixes Byte markiert Beginn des Paddings, danach mit 0x00 aufgefüllt. Im Wesentlichen bei Smartcards verwendet.

PKCS5/7 (RFC3852) Letzter Block gepaddet mit n Bytes, alle mit Wert n. Mögliche Varianten sind also

- `0x01`
- `0x02 0x02`
- `0x03 0x03 0x03`
- ...

Zero Padding Mit 0x00 aufgefüllt, ist nicht reversibel

3.4 RSA

Zu kurze Nachrichten problematisch zu verschlüsseln. Ursprünglich wurde einfach mit Zufallsdaten auf bestimmte Länge aufgefüllt Im ersten Public-Key Cryptography Standards (PKCS) ¡ v2.0:

- v1.5 = RFC 2313
- EM = 0x00——BT——PS——0x00——M
- BT (Block Type) ist
  - 0x00 oder 0x01 für Private Key Operationen (signieren)
  - 0x02 für Public Key Operationen (verschlüsseln)
- PS (Padding String) ist (k - Länge von M - 3) Bytes lang, mindestens aber 8
  - k = Länge des Modulus in Byte
  - PS ist 0x00 für BT = 0x00, 0xFF für BT = 0x01 und zufällig für BT = 0x02
- Problem: nicht übermäßig zufällig, Struktur der Klartextnachricht erratbar
- Bleichenbacher Angriff (`https://web.archive.org/web/20120204040056/`, `http://www.bell-labs.com/user/bleichen/papers/pkcs.ps`)

Mittlerweile iwrd üblicherweise Optimal Asymmetric Encryption Padding (OAEP) verwendet, eingeführt in PKCS#1 v2.0

3.5 OAEP (Optimal Asymmetric Encryption Padding)

Ablauf Sei M eine Nachricht der Länge m und h die Länge des Hashes.

1. Label L wird gehasht, Ergebnis ist l_{Hash}
2. Padding String p aus 0x00 wird an l_{Hash} angehängt, sodass die resultierende Länge um $(m + h + 2)$ Bytes kürzer ist als der RSA Modulus in Bytes (k)
3. es wird 0x01 und M an den Block angehängt, daraus resultiert Data Block (DB), der um $h + 1$ Bytes kürzer ist als k
   - DB = l_{Hash} —— p —— 0x01 —— M
4. Ein zufälliger String r (ein sog. seed) mit Länge h wird erzeugt
5. r wird mittels der Mask Generation Function (MGF) auf die Länge $(k - h - 1)$ Bytes vergrößert und mit DB verxort, das Ergebnis ist DB_{masked}
6. DB_{masked} wird mittels MGF auf die Länge h verkleinert und mit r verxort, das Ergebnis ist r_{masked}
7. Encoded Message (EM) entsteht durch Konkatenation von 0x00, r_{masked} und DB_{masked}
   - EM = 0x00 —— r_{masked} —— DB_{masked}
   - Das erste 0 Byte dient dazu, zu garantieren, dass EM tatsächlich kleiner ist als der Modulus n: beide haben k Byte, aber da in EM das höchstwertige Byte 0 ist, gilt sicher immer: EM $< n$.
8. EM wird mittels RSA verschlüsselt, d.h. $C = \mathrm{EM}^e \mod n$

Entschlüsselung

1. Empfänger bekommt Ciphertext C und Label L
2. Generiert EM aus C mittels seines privaten Schlüssels, dabei muss das erste Byte von EM 0x00 sein
3. Die nächsten h-Bytes sind r_{masked}, der Rest $(k - h - 1)$ ist DB_{masked}
4. DB_{masked} wird mittels MGF auf Länge h gebracht und mit r_{masked} verxort, resultiert im Seed r
5. r wird mittels MGF auf Länge von DB_{masked} gebracht und damit verxort, ergibt DB

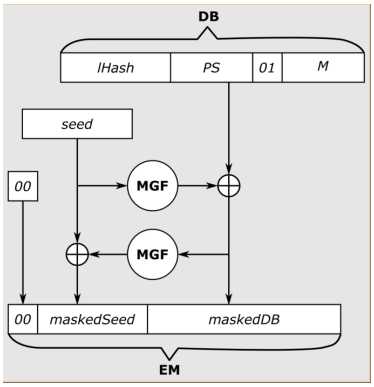


Abbildung 3.1: Ablauf OAEP Verschlüsselung

6. DB muss beginnen mit dem Hash von L (bzw. Hash des leeren Strings in PKCS#1), gefolgt von beliebig vielen 0x00 und einer 0x01

7. Nach 0x01 steht die Nachricht M

Sowohl DB_{masked} als auch r_{masked} müssen vollständig bekannt sein, um M zu rekonstruieren zu können. Mittels DB_{masked} kann r rekonstruiert werden, mittels r dann DB und in Folge M. OAEP erschwert die Rekonstruktion des Klartextes für einen Angreifer.

Die in PKCS#1 empfohlene Parameter für RSAES-OAEP (RSA Encryption Standard OAEP) sind

- Hash: SHA-1/256/384/512, d.h. die Hashlänge ist 20, 32, 48 oder 64 Bytes
- Mask Generation Function: MGF1
  - k Runden, in jeder Runde werden h Bytes zum Output hinzugefügt, bis die gewünschte Länge erreicht ist
  - In jeder Runde:
    * 32-bit Zähler wird inkrementiert
    * Initialwert wird mit aktuellem Zähler konkateniert und gehasht
    * Ergebnis wird an Endergebnis angehängt

Kapitel 4

Asymmetrische Kryptographie

(todo)

4.1 Sicherheitsbetrachtungen von RSA

4.2 RSA in der Praxis

4.3 Mathematische Konzepte

4.3.1 Quadratischer Rest

4.3.2 Euler Kriterium und Legendre Symbol

4.3.3 Quadratwurzeln modulo p

4.3.4 Quadratwurzeln modulo $n = p \cdot q$

4.4 Rabin public-key encryption

Kapitel 5

Erzeugung von Primzahlen

Für public-key-Kryptosysteme benötigt man häufig zufällige große Primzahlen. In der Regel erzeugt man dazu eine natürliche Zahl in der gewünschten Größe und prüft, ob diese eine Primzahl ist, beispielsweise versucht man diese Zahl n durch alle Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ zu teilen, dieses Vorgehensweise ist jedoch sehr ineffizient und heißt Probedivision. Sie wird auch in Faktorisierungsalgorithmen mit Primzahlen bis 10^6 verwendet.

Verteilung der Primzahlen Bezeichne $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen im Intervall $[2, n]$. Es gilt

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

n	$\pi(n)$
10	4
100	25
1000	168
10000	1229
100000	9592
1000000	78498
10000000	664579
100000000	5761455
1000000000	50847534
10000000000	455052512

Abschätzung des Aufwands Aus $\pi(n) \sim n/\ln(n)$ folgt: man benötigt wenigstens $\sqrt{n}/\ln(\sqrt{n})$ Probedivisionen, um zu beweisen, daß eine natürliche Zahl n eine Primzahl ist. Beispielsweise werden bei RSA Primzahlen verwendet, die aktuell in der Regel größer als 10^{150} sind.

Um nun die Primalität für diese Zahl zu beweisen, müßte man insgesamt mehr als $10^{150/2}/\ln(10^{150/2}) > 5.7 \cdot 10^{72}$ Probedivisionen durchführen – das ist nicht durchführbar! Somit sucht man nach effizienteren Verfahren: Primzahltests stellen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit fest, ob eine Zahl auch eine Primzahl ist (probabilistic primality tests).

5.1 Der Fermat Test

Der Fermat-Test - der Test beruht auf dem kleinen Satz von Fermat: Ist n eine Primzahl, so gilt

$$a^{n-1} \equiv 1 \mod n$$

für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\gcd(a, n) = 1$.

Somit kann man mit diesem Satz überprüfen, ob eine Zahl zusammengesetzt ist:

1. man wählt dazu eine natürliche Zahl $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$
2. als nächste berechnet man $r = a^{n-1} \mod n$
3. ist nun $r \neq 1$, so ist n keine Primzahl und zusammengesetzt. Ergibt sich $r = 1$, so kann n eine Primzahl oder zusammengesetzt sein
4. die Schritte 1 bis 3 müssen für alle Werte von a nun durchlaufen werden, wenn $r = 1$

Es braucht die Festlegung einer "Sicherheits-Grenze": Wie oft muss der Algorithmus bei $r = 1$ durchlaufen werden, damit man sicher sein kann, eine Primzahl gefunden zu haben?

Der Fermat-Test kann zeigen, dass n zusammengesetzt ist, er kann aber nicht beweisen, dass n eine Primzahl ist.

Das Verfahren ist zur Faktorisierung ungeeignet.

Beispiel Gegeben: $n = 341 = 11 \cdot 31$, d.h. n ist keine Primzahl. Wir berechnen für $a = 2$

$$2^{340} \equiv 1 \mod 341,$$

obwohl n zusammengesetzt ist. Für ein anderen a, z.B. $a = 3$ haben wir

$$3^{340} \equiv 56 \mod 341.$$

Im Ergebnis bedeutet das, dass 341 also eine zusammengesetzte Zahl ist und somit nicht prim sein kann.

5.2 Carmichael-Zahlen

Wenn der Fermat-Test für viele Basen a keine Bestätigung für ein zusammengesetztes n gefunden hat, ist es wahrscheinlich, dass n eine Primzahl ist. Es existieren aber natürliche Zahlen, deren Eigenschaft ist, dass sie zusammengesetzt sind, das jedoch nicht mit dem Fermat-Test gezeigt werden kann.

Sei n eine ungerade zusammengesetzte Zahl und es gilt für eine ganze Zahl a folgende Kongruenz

$$a^{n-1} \equiv 1 \mod n,$$

so nennt man n eine Pseudoprimzahl zur Basis a. Sei n nun eine Pseudoprimzahl zur Basis a für alle ganzen Zahlen a mit $\gcd(a, n) = 1$. Dann heißt n Carmichael-Zahl.

Beispiel für eine Carmichael-Zahl: $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Eigenschaften Eine ungerade zusammengesetzte Zahl $n \geq 3$ ist eine Carmichael-Zahl, wenn genau diese zwei Bedingungen gelten:

1. n ist quadratfrei, d.h. n hat keinen mehrfachen Primteiler
2. $p - 1$ teilt $n - 1$ für alle Primteiler p von n

Somit folgt, dass jede Carmichael-Zahl ein Produkt von mindestens drei unterschiedlichen Primzahlen ist. Daher wissen wir auch, dass unendlich viele Carmichael-Zahlen existieren.

5.3 Der Miller-Rabin Test

Im Gegensatz zum Fermat-Test findet der Miller-Rabin-Test nach “ausreichend” vielen Durchläufen für jede natürliche Zahl heraus, ob diese zusammengesetzt ist.

Sei n eine natürliche ungerade Zahl mit $s = \max\{r \in \mathbb{N} | 2^r \text{ teilt } n - 1\}$. Damit ist 2^s die größte Potenz, die $n - 1$ teilt oder anders ausgedrückt: es gibt ein ungerades $d \in \mathbb{Z}$, sodass $n - 1 = 2^s \cdot d$.

Satz 5.3.1. *Ist n eine Primzahl und a eine zu n teilerfremde ganze Zahl, so gilt mit den obigen Bezeichnungen entweder*

1. $a^d \equiv 1 \mod n$
2. $a^{2^r \cdot d} \equiv -1 \mod n$

Mindestens eine der Bedingungen muss erfüllt sein, dass n eine Primzahl ist. Weiters gilt, n ist keine Primzahl (also zusammengesetzt) g.d.w. man eine ganze zu n teilerfremde Zahl a findet, für die weder die Bedingung (1) noch (2) für ein $r \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ gilt. Dann wird a Zeuge gegen die Primalität von n genannt.

Beispiel Sei $n = 561$ und $a = 2$. Wir behaupten a ist eine Zeuge gegen die Primalität von n:

Wir berechnen $s = 4$ und wählen $d = 35$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2^{35} &\equiv 263 \mod 561 \\ 2^{2 \cdot 35} &\equiv 166 \mod 561 \\ 2^{4 \cdot 35} &\equiv 67 \mod 561 \\ 2^{8 \cdot 35} &\equiv 1 \mod 561 \end{aligned}$$

Also ist 561 keine Primzahl nach vorhergehenden Theorem.

Abschätzung der Anzahl der Zeugen gegen eine Primalität einer Zahl n

Satz 5.3.2. *Sei $n \geq 3$ eine ungerade zusammengesetzte Zahl, so gibt es in der Menge $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ höchstens $(n-1)/4$ Zahlen, die zu n teilerfremd sind und keine Zeugen gegen die Primalität von n sind.*

Für einen Beweis: vgl. Buchmann J., Einführung in die Kryptographie, 3. Auflage, S. 127 ff.

Beispiel : Bestimmung aller Zeugen gegen eine Primalität der Zahl n. Sei $n = 15$, es ist $n - 1 = 14 = 2 \cdot 7$, daraus folgt: $s = 1$ und $d = 7$. Eine zu 15 teilerfremde Zahl a ist genau dann Zeuge gegen die Primzahleigenschaft von n wenn $a^7 \mod 15 \neq \pm 1$ gilt.

In einer tabellarischen Übersicht:

a		1	2	4	7	8	11	13	14
a^{14}	mod 15	1	4	1	4	4	1	4	1
a^7	mod 15	1	8	4	13	2	11	7	14

Die Anzahl der zu 15 teilerfremden Zahlen in $\{1, 2, \ldots, 14\}$, die keine Zeugen gegen die Primalität von $n = 15$ sind, beläuft sich auf $2 \leq (15-1)/4 = 3.5$.

Anwendung des Miller-Rabin-Tests auf eine ungerade Zahl n

- man wählt zufällig und gleichverteilt eine Zahl aus der Menge $\{2, 3, \ldots, n-1\}$
- ist der $\gcd(a, n)$ ¿ 1, so ist n zusammengesetzt

- ist der $\gcd(a, n) = 1$, so testet man $a^d, a^{2d}, a^{2^2 d}, \ldots, a^{2^{s-1} d}$
- findet man nun einen Zeugen gegen die Primalität von n, dann wurde gezeigt, dass n zusammengesetzt ist
- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n zusammengesetzt ist und man keinen Zeugen findet, beläuft sich nach obigen Theorem auf höchstens 0.25.

Ist n zusammengesetzt, so findet man bei der Iteration des Miller-Rabin-Tests mit t Durchläufen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $frac14t$ keinen Zeugen gegen die Primalität von n.

Beispiel nach 10 Durchläufen ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $frac1410$, das entspricht ungefähr einer 0.0001-prozentigen Wahrscheinlichkeit, dass man keinen Zeugen gegen die Primzahleigenschaft von n findet.

5.4 Verfahren zur zufälligen Wahl von Primzahlen

Beim Verfahren für die Erzeugung einer zufälligen k-Bit-Primzahl: dabei wird zuerst eine zufällige und ungerade k-Bit-Zahl n generiert. Davon wird das erste und letzte Bit wird auf 1 gesetzt, die restlichen $k - 2$ Bits werden zufällig und gleichverteilt gesetzt. Jetzt wird überprüft, ob n eine Primzahl ist:

- ist n durch eine Primzahl unter einer gewissen Schranke B (in der Regel wird $B = 10^6$ gesetzt) teilbar? Die Primzahlen werden in einer Tabelle vorgehalten.
- wird dabei kein Teiler von n gefunden, so wird der Miller-Rabin-Test mit t Wiederholungen (mit $t \geq 1$ als entsprechender Sicherheitsparameter) auf n angewendet
- wird dabei kein Zeuge gegen die Primzahleigenschaft von n gefunden, so gilt n nun als Primzahl (mit der Sicherheit $\frac{t}{4}$).
- ansonsten muß der gesamte Test mit einer anderen Zahl n' wiederholt werden

Die Auswahl der Schranke B hängt von dem Verhältnis der Ausführungszeiten einer Probedivision und eines Miller-Rabin-Tests auf der verwendeten Hard- bzw. Software-Plattform ab.

Kapitel 6

Hashfunktionen

Die Anforderungen an eine kryptographische Hashfunktion sind:

- Kompression, d.h. ein beliebig langer Input wird auf einen Output fixer Länge gemappt
- Einwegfunktion (preimage resistance), d.h. gegeben $y = h(x)$ ist es schwierig, das verwendete x zu bestimmen
- Schwache Kollisionsresistenz (2nd preimage resistance), d.h. gegeben x mit $y = h(x)$ ist es schwierig, ein $x' \neq x$ zu finden, so dass $h(x) = h(x')$
- Starke Kollisionsresistenz (collision resistance), d.h. es ist schwierig, zwei x und x' zu finden, mit $x \neq x'$, so dass $h(x) = h(x')$

6.1 Konstruktion

Grundsätzlich sind für eine Hashfunktion zwei Komponenten nötig, eine Kompressionsfunktion, die längere Inputs auf die gewünschte Länge komprimieren, und ein Domain Extender, der aus Funktionen mit Eingaben fester Länge Funktionen mit Eingabe beliebiger Länge macht.

Kompressionsfunktionen haben für einen fixen Input m einen fixen Output n mit $|m| > |n|$.

Es wird entweder eine eigens für den Hash geschriebene Funktion verwendet, z.B. bei MD5 und SHA-1, SHA-2, SHA-3, oder es wird ein Blockcipher eingesetzt. Bei einem Blockcipher wird ein Input der Länge $k + l$ (Länge des Schlüssels und Länge des Klartexts) auf einen Input der Länge l gemappt.

Die zwei häufigsten Konstruktionen sind

- Davis-Meyer: $h(x, y) = E_y(x) \oplus y$
- Miyaguchi-Preneel: $h(x, y) = E_x(y) \oplus x \oplus y$

Domain Extender machen aus einer Funktion, die nur Inputs mit einer fixen Länge n nimmt, eine Funktion die Inputs mit beliebiger Länge nimmt.

Mehr oder weniger alle modernen Hashfunktionen folgen diesem Prinzip:

1. Input wird in Blöcke $x_1, \ldots, x_n$ gleicher Länge aufgespalten
2. Jeder Block dient als Input einer Einweg-Kompressionsfunktion f
3. Input des i-ten Funktionsaufrufs sind das vorherige Ergebnis h_{i-1} und der i-te Nachrichtenblock x_i
   - $h_i = f(h_{i-1}, x_i)$
   - $h(x) = h_{n+1}$ für eine Nachricht mit n Blöcken
   - h_i ist der interne Zustand der Hashfunktion
4. Ist die verwendete Funktion f kollisionsresistent, so gilt das auch für h
5. Im letzten Block der zu hashenden Nachricht wird die Länge der Originalnachricht angehängt, damit gleich endende aber unterschiedlich lange Nachrichten unterschiedliche Hashwerte ergeben, z.B. `Foo0` vs. `Foo00`
6. Grundproblem der Konstruktion: Length Extension Attack
   - Kompletter interner State ist in Hashwert enthalten
   - Falls MAC Konstruktion der Form H(key——Nachricht) ist, kann leicht Hashwert für verlängerte Nachricht konstruiert werden

6.2 Algebraische Hashfunktionen

In der Praxis werden aus Geschwindigkeitsgründen hauptsächlich Hashfunktionen basierend auf logischen Funktionen verwendet. Algebraische Funktionen sind kaum verbreitet, sie basieren auf ähnlichen Argumentationen wie Public-Key Kryptographie (vgl. AES vs. RSA), also z.B. dem DLP (Discrete Logarithm Problem). Für die Hashfunktion gilt

$$h(x) = g^x \mod p,$$

wobei das Umkehren der Funktion äquivalent zum Lösen des diskreten Logarithmusproblems ist. Es gibt auch Hashfunktionen basierend auf RSA

$$H(x) = g^x \mod n (\text{mit } n = p \cdot q),$$

wo das Umkehren der Funktion äquivalent zum Lösen des RSA Problems ist.

6.3 MD5

wurde 1991 von Ron Rivest als verbesserter Nachfolger zu MD4 erfunden.

- 1996 erste Fehler entdeckt, 2004 weitere Schwachstellen gefunden
- 2007 Methoden vorgestellt, um 2 Dateien mit selber MD5 Checksumme zu erzeugen
- 2008 gefälschte SSL Zertifikate mit dieser Methode erzeugt
- 2008: "Software developers, Certification Authorities, website owners, and users should avoid using the MD5 algorithm in any capacity. As previous research has demonstrated, it should be considered cryptographically broken and unsuitable for further use." – US-CERT, `http://www.kb.cert.org/vuls/id/836068`

Die Funktion erzeut in 64 Operationen (in 4 Runden zu je 16 Operationen) einen Output der Länge 128.

1. Nachricht wird in 512 Bit große Blöcke aufgespalten und gepadded (siehe Kapitel "Padding")

2. der interne State hat 128 Bit, wird in 4 32-Bit Wörtern gehalten. Er wird mit `01 23 45 67`, `89 ab cd ef`, `fe dc ba 98`, `76 54 32 10`, sogenannte "nothing up my sleeve" numbers

3. es gibt eine additive Rundenkonstante: in Runde i wird $K_i = 2^{32} \cdot |\sin(i)|$ addiert

4. Alle 16 Operationen wechselt die Rundenfunktion (F, G, H, I)

   - F(X,Y,Z) = (X and Y) or (not X and Z)
   - G(X,Y,Z) = (X and Z) or (Y and not Z)
   - H(X,Y,Z) = X $\oplus$ Y $\oplus$ Z
   - I(X,Y,Z) = Y $\oplus$ (X or not Z)

5. Jede Runde um anderen Offset zirkulär geshiftet

6.4 SHA (Secure Hash Algorithm)

1993 wurde SHA-0 veröffentlicht, 1995 dann der verbesserte SHA-1 und 2001 SHA-2. Das NIST hat SHA-3 ausgeschrieben, das Ende des Auswahlprozesses war 2012 (vgl. AES). Dann wurde Keccak als SHA-3 2015 standardisiert.

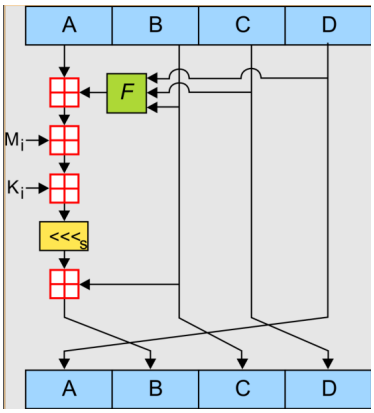


Abbildung 6.1: MD5 Operation, die 64 Mal wiederholt wird

SHA-1 Der SHA-1 mit voller Rundenzahl gilt seit 2005 als unsicher. Kollisionen können mit 2^{63} Operationen erzeugt werden, 2008 wurde die Zahl auf 2^{51} verringert. Seit 2017 sind Kollisionen in 2 validen PDF Dokumenten konstruierbar.

Er erzeugt einen 160 Bit Output und basiert auf denselben Grundideen wie MD4 und MD5:

- Nachricht ebenfalls in 512-Bit Blöcke gespalten
- es gibt 80 Runden, alle 20 Runden wechselt die Rundenfunktion
  1. F(X,Y,Z) = (X and Y) or (not X and Z) (ident zu MD5)
  2. G(X,Y,Z) = X $\oplus$ Y $\oplus$ Z (ident zu H aus MD5)
  3. H(X,Y,Z) = (X and Y) or (X and Z) or (Y and Z)
  4. I(X,Y,Z) = G (sic)
- es gibt 4 Rundenkonstanten
  1. $K_1 = 230 \cdot \sqrt{(2)}$
  2. $K_2 = 230 \cdot \sqrt{(3)}$
  3. $K_3 = 230 \cdot \sqrt{(5)}$
  4. $K_4 = 230 \cdot \sqrt{(10)}$
- In jeder Runde um 30 zirkulär geshiftet

SHA-2 beschreibt eine Familie an Hashfunktionen, die die Algorithmen SHA-224, SHA-256, SHA-384, SHA-512, SHA-512/224 und SHA-512/256. Sie sind im FIPS (Federal Information Processing Standards) PUB-180-4 beschrieben.

Algorithmus	Ausgabegröße (Bit)	Interne Blockgröße (Bit)	basiert auf
SHA-224	224	512	SHA-256
SHA-256	256	512	SHA-256
SHA-384	384	1024	SHA-512
SHA-512	512	1024	SHA-512
SHA-512/224	224	1024	SHA-512
SHA-512/256	256	1024	SHA-512

SHA-224 : Kürzere Version von SHA-256 mit 224 Bit Ausgabelänge. Geeignet, wenn Speicher knapp ist, z.B. constraint devices (Memory).

SHA-256 : Der meistverwendete SHA-2-Algorithmus. Standard für viele Anwendungen (z. B. TLS, digitale Signaturen)

SHA-384 : Abgespeckte Version von SHA-512 mit anderer Initialisierung und kürzerer Ausgabe.

SHA-512 : Sicherste (längste) Standardvariante mit 512 Bit Ausgabelänge.

SHA-512/224 (constraint devices (Memory)), siehe SHA-512/256.

SHA-512/256 (allg. Sicherheit): Truncate-Versionen von SHA-512 mit kürzerer Ausgabelänge. Bietet eine Kombination aus höherer Sicherheit (wegen 1024-Bit Blockgröße) und kürzeren Hashes.

Merkle-Damgard Die Merkle-Damgård-Konstruktion (auch Merkles Meta-Verfahren) ist eine Methode zur Konstruktion von kryptographischen Hash-Funktionen, die auf Arbeiten von Ralph Merkle und Ivan Damgård zurückgeht. Gegeben ist eine kollisionsresistente Kompressionsfunktion $f : \{0,1\}^{a+b} \to \{0,1\}^b$. Durch die Anwendung der Merkle-Damgård-Konstruktion ergibt sich daraus eine kollisionssichere Hash-Funktion $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^b$, die beliebig lange Nachrichten auf einen Hashwert abbilden.

1. Padding (Auffüllen): Die Eingabenachricht wird so erweitert, dass ihre Länge ein Vielfaches der Blockgröße ist. Dabei wird meist die ursprüngliche Nachrichtenlänge am Ende angehängt.

2. Aufteilung in Blöcke: Die aufgefüllte Nachricht wird in gleichgroße Blöcke unterteilt.

3. Initialisierung: Ein fester Startwert (IV = Initialization Vector) wird gesetzt.

4. Iterative Verarbeitung: Für jeden Block wird die Kompressionsfunktion angewendet:

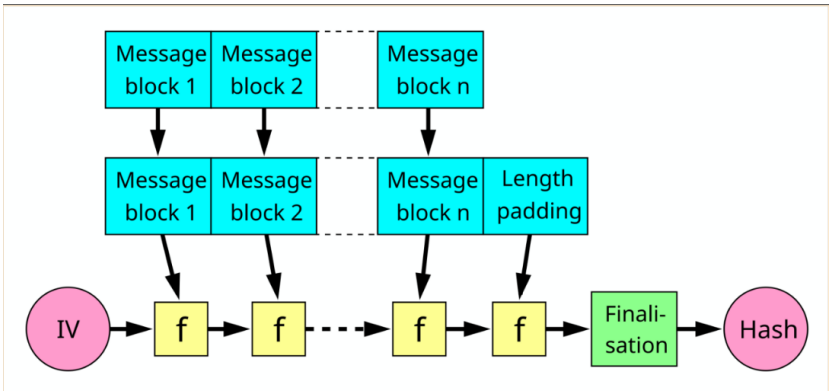


Abbildung 6.2: Merkle-Damgard Hash

- Eingabe: der aktuelle Block + der Ausgabewert des vorherigen Schritts
- Ausgabe: ein neuer Zwischenwert

5. Finales Ergebnis: Der Ausgabewert nach dem letzten Block ist der Hash-Wert.

6.4.1 SHA-3

2007 begann das NIST mit der Ausschreibung für einen Nachfolger von SHA-2. Am 2.10.2012 wurde Keccak (von Guido Bertoni, Joan Daemen, Gilles Van Assche und Michaël Peeters) als Sieger verkündet und stellt die Basis für SHA-3 dar.

- Verwendet im Unterschied zur bisherigen SHA Familie eine sog. “Sponge” Konstruktion: ein 3-dimensionaler innerer Zustand ($5 \times 5 \times w$-Bit Wörter; bei $w = 64$ sind das 1.600 Bits)
- Permutation: 24 Runden, 5 Schritte $(\theta, \rho, \pi, \chi, \iota)$
- Zuerst wird der zu hashende Text zur Gänze “aufgesogen” (absorbing phase)
- Danach der Hash gewünschter Länge “ausgepresst” (squeezing phase)
- Das ergibt Hashlängen von 224 bis 512 Bit (theoretisch aber beliebig lange, bis maximal 1.600); wird auch als Capacity Wert bezeichnet

Phasen

Absorbieren Eingabedaten werden in Blöcke unterteilt. Jeder Block wird mit dem internen Zustand (einer Art Speicher) verXORt. Danach wird eine Permutation (f) auf den Zustand angewendet.

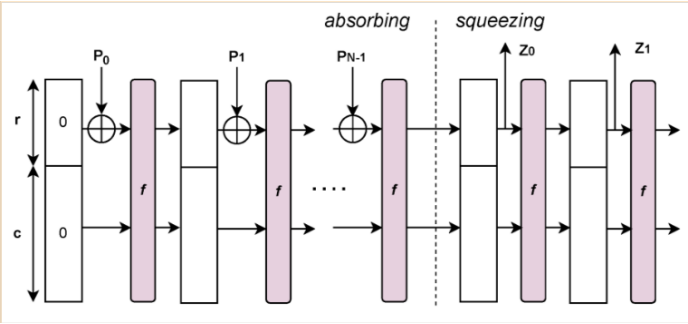


Abbildung 6.3: SHA-3, Absorbing- und Squeezing Phase

Auspressen Nachdem alle Eingabeblöcke absorbiert wurden, wird ein Teil des internen Zustands als Ausgabe extrahiert. Bei langen Ausgaben (z.B. SHAKE-Funktionen) wird f mehrfach ausgeführt, um mehr Output zu generieren.

State Der interne Zustand in KECCAK hat die Breite $b = 1600$ Bits (für SHA-3). Dieser Zustand ist aufgeteilt in ein 3D-Array mit Dimensionen $5 \times 5 \times w$, wobei $w = 64$ bits. Jede Zelle $A[x][y]$ ist ein sogenanntes "lane" mit 64 Bits.

Parameter Neben der Größe des States b, gibt es noch die Parameter

- Rate r, wie viele Bits pro Sekunde verarbeitet werden können
- Capacity c, wie groß die Sicherheitsreserve ist, sie berechnet sich als $c = b - r$. Bei Kapazität c bietet der Algorithmus $c/2$ Bit Widerstand gegen Kollisions- und Preimage-Attacken.

Für den SHA-256 haben die Parameter (b, r, c) dem Wert $(1600, 1088, 512)$.

Permutationsfunktion KECCAK-f hat 24 Runden mit je 5 Steps:

1. θ (theta) mischt jede Lane mit einer XOR-Mischung ihrer Spaltennachbarn.
2. ρ (rho) rotiert die Bits jeder Lane um einen bestimmten Wert.
3. π (pi) permutiert die Positionen der Lanes im 5×5-Gitter.
4. χ (chi) führt eine nichtlineare XOR-Maske aus, basierend auf anderen Werten in der Zeile.
5. ι (iota) fügt einen Rundenkonstanten hinzu (zum Schutz vor symmetrischen Mustern).

Diese Schritte garantieren Diffusion, Konfusion und Nichtlinearität, wie bei modernen Blockchiffren.

Padding Um sicherzustellen, dass die Nachricht gleichmäßig in r-Bit-Blöcke aufgeteilt werden kann, ist ein Padding erforderlich. SHA-3 verwendet das Muster 100...001 (01 Padding), ein Bit mit Wert 1 wird gefolgt von null oder mehr 0-Bits (maximal $r - 1$) und einem letzten 1-Bit.

XOFs (Extendable Output Functions) basieren auf KECCAK und geben beliebig viele Ausgabebits zurück (nicht nur 256 oder 512). Sie sind sehr flexibel für Anwendungen wie:

- Key Derivation Function (KDF)
- Authentifizierung
- PQC Signaturen (z. B. SPHINCS+, Dilithium)

SHAKE bezeichnet den KECCAK Algorithmus, der er ein anderes Padding (1111 statt 01) und eine variable Ausgabelänge hat.

6.5 Angriffe

Sei n die Länge des Outputs. Die Angriffe auf Hashfunktionen können wie folgt kategorisiert werden:

- Angriff auf die Eigenschaft als Einwegfunktion: Idealerweise Komplexität von $O(2^n)$
- Angriff auf die schwache Kollisionsresistenz: Idealerweise Komplexität von $O(2^n)$
- Angriff auf die starke Kollisionsresistenz: Idealerweise Komplexität von $1.2 \cdot 2^{n/2}$ (Geburtstagsparadoxon)

Generell gilt, ein Aufwand von 2^{80} ist "schwierig".

MD5 ist gebrochen.

SHA-1 ist gebrochen.

SHA-2

- Output: 224/256/384/512 Bit
- Struktur: Merkle-Damgard
- Theoretische Angriffe auf rundenreduzierte Versionen bekannt

SHA-3

- Output: 224/256/384/512 Bit
- Struktur: Sponge

6.5.1 BEAST Attack

Steht für **B**rowser **E**xploit **A**gainst **S**SL/**T**LS.

- MitM Angriff und Chosen Plaintext Attack
- Record Splitting
- CBC Mode mit unsicherer IV-Generierung
- Beschrieben in CVE-2011-3389
- TLS1.0

Der BEAST-Angriff nutzt die Tatsache aus, dass bei TLS 1.0 der Initialisierungsvektor (IV) für die nächste Nachricht vorhersehbar ist: Er ist nämlich der letzte verschlüsselte Block der vorherigen Nachricht.

Dadurch kann ein Angreifer über sogenannte Chosen-Plaintext-Angriffe (d. h. gezielt eingefügte Daten) Rückschlüsse auf vertrauliche Inhalte wie Cookies ziehen.

Damalige temporäre Workarounds

- RC4
- 0-length Packets
- 1/n-1 Packet-Splitting:
  - Erster Record (1 Byte): Enthält nur ein harmloses Byte (z. B. ein Leerzeichen oder ein kontrolliertes Zeichen).
  - Zweiter Record (n-1 Bytes): Enthält den Rest der eigentlichen Nachricht (z.B. HTTP-Headers, Cookies usw.).

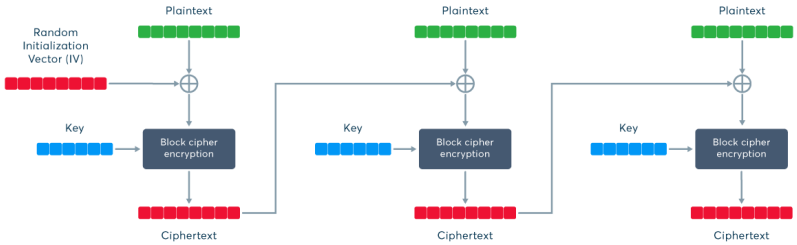


Abbildung 6.4: How it should work: Proper encryption using a block cipher in CBC mode

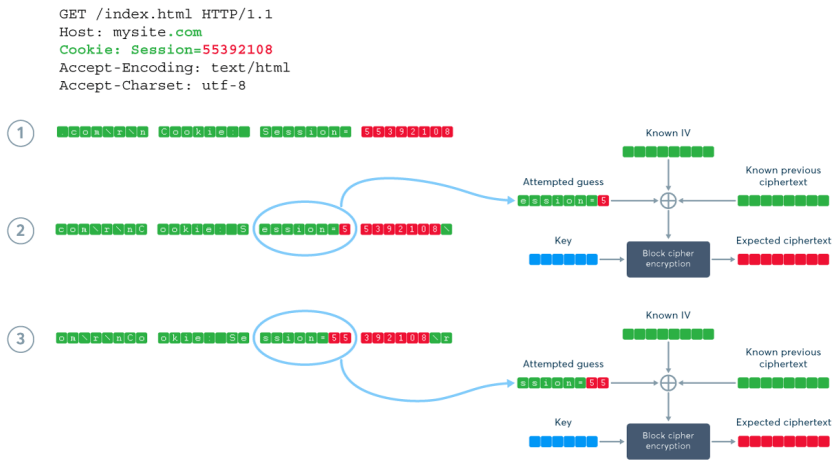


Abbildung 6.5: The underlying vulnerability: A record splitting attack against TLS 1.0

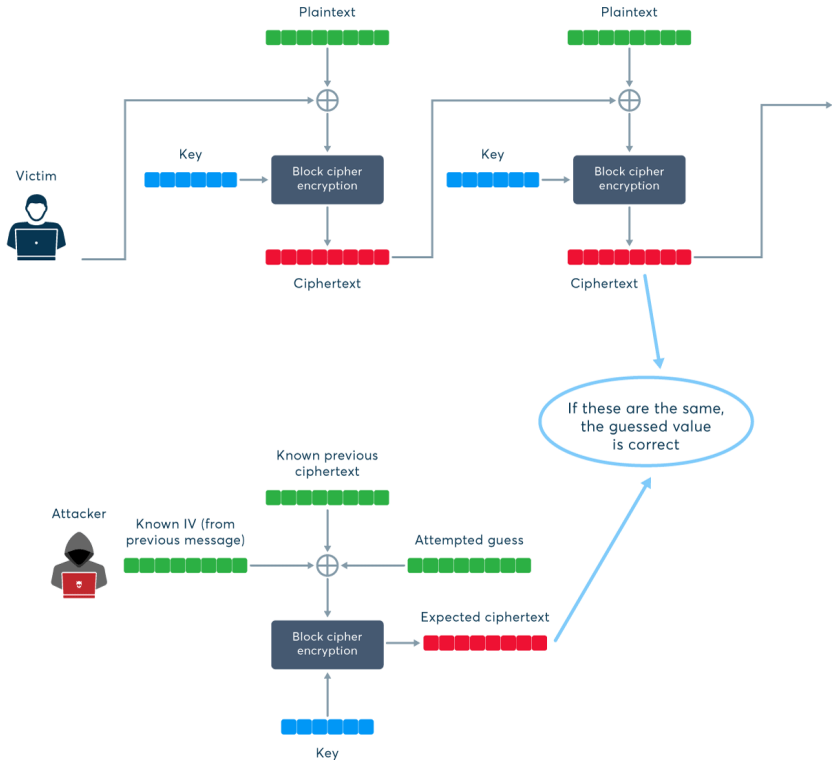


Abbildung 6.6: The BEAST exploit: A chosen boundary attack combined with record splitting

Index