EJERCICIO 02. ESTABILIDAD PARA EL ALGORITMO DE VERLET.

a.

- $y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \overbrace{y''_n}^{f_n = a_n} h^2$ → algoritmo de Verlet. (1).
- $y_n = \overline{y_n} + \varepsilon_n$ → ~~superposición~~. definición. (2).

(2) → (1) • $\cancel{\overline{y_{n+1}}} + \varepsilon_{n+1} = \cancel{2\overline{y_n}} + 2\varepsilon_n - \cancel{\overline{y_{n-1}}} - \varepsilon_{n-1} + f(\overline{y_n} + \varepsilon_n, x)\, h^2$ ~~exp.~~ Taylor

exp. Taylor ⇒ $\cancel{\overline{y_{n+1}}} + \varepsilon_{n+1} = \cancel{2\overline{y_n}} + 2\varepsilon_n - \cancel{\overline{y_{n-1}}} - \varepsilon_{n-1} + \cancel{f(\overline{y_n}, x)} + f'(\overline{y_n}, x)\, \varepsilon_n h^2$

por (1) ⇒ $\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + a_n' \varepsilon_n h^2$

⇒ $\boxed{\varepsilon_{n+1} - [2 \pm a_n' h^2]\, \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0}$; $a_n' = \dfrac{\partial a}{\partial x}$. (3)

b.

- $a = -\omega^2 x$
- $\dfrac{\partial a}{\partial x} = a_n' = -\omega^2$ (4)

→ oscilador armónico simple.

* $2R = h^2\omega^2$ (5)

(4) → (3) • $\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + \omega^2 h^2 \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$

(5) → (3) ⇒ $\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n + 2R\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$

⇒ $\boxed{\varepsilon_{n+1} - 2[1 - R]\, \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0}$ (6)

(c). $\left\{ \bullet \quad \varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n \right.$ (8) $\longrightarrow$ suposición.

(7) → (6) $\bullet \quad \cancel{\varepsilon_0} \lambda^{\cancel{n}+1} - 2\,[1-R]\, \cancel{\varepsilon_0}\, \cancel{\lambda^{n}} + \cancel{\varepsilon_0} \lambda^{\cancel{n}-1} = 0$

$$\Rightarrow \lambda - 2\,[1-R] + \lambda^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\,[1-R]\,\lambda + 1 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda_{\pm} = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}} \quad (8)$$

(d). $\left\{ \bullet \quad |\lambda_{\pm}| \leq 1 \right.$ (9) $\longrightarrow$ estabilidad del algoritmo bajo suposición.

(9) → (8) (+) $\bullet \quad -1 \leq 1 - R + \sqrt{R^2 - 2R} \leq 1$

$$\Rightarrow -2 + R \leq \sqrt{R^2 - 2R} \leq R$$

$$\Rightarrow 4 - 4R + \cancel{R^2} \leq \cancel{R^2} - 2R \leq \cancel{R^2}$$

$$\Rightarrow 2 - R \leq 0 \Rightarrow R \geq 2.$$

$\bullet$