模式识别

"稀疏"数据sparse
未对齐数据misaligned

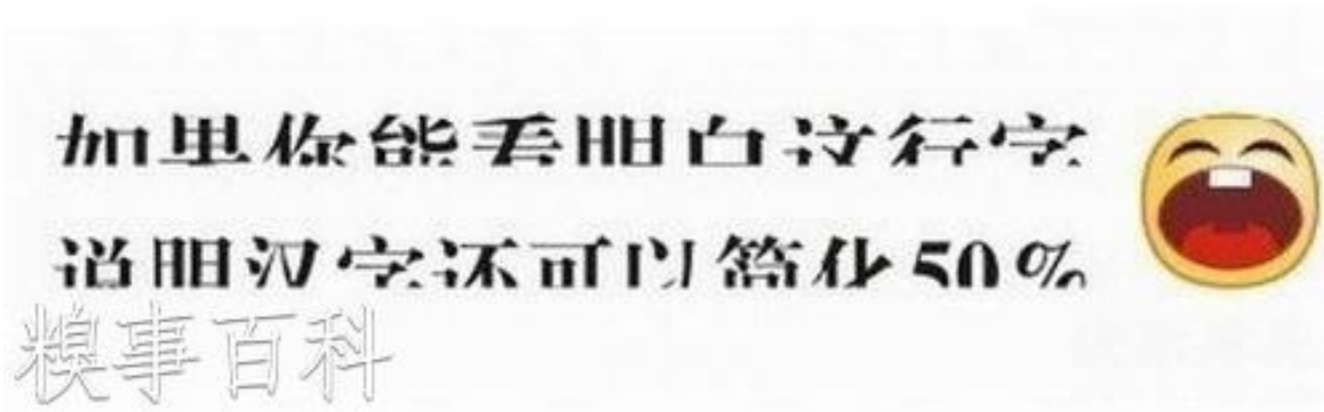
吴建鑫
南京大学计算机系 & 人工智能学院，2020

目标

- ✓ 对介绍的较前沿的知识(sparsity)正确了解其含义
  - 了解sparsity适用的范围和可能的应用
- ✓ 掌握动态规划dynamic programming的基本算法
- ✓ 掌握动态时间弯曲dynamic time warping的概念、算法和适用范围

- ✓ 提高目标
  - 进一步能通过独立阅读、了解sparse learning，如其优化算法、在研究中的应用、理论等
  - 进一步能通过独立阅读、了解其他未对齐数据的处理

能识别吗？



我居北海君南海

黄沙白雾昼常昏

为什么？

- ✓ 我们靠什么能够从字的半边猜出正确的字来？

- ✓ 我们为什么不能靠什么从字的半边猜出正确的字来？

稀疏

sparse

Tutorial: Yi Ma et al.

- ✓ http://www.eecs.berkeley.edu/~yang/courses/ECCV2012/ECCV12-lecture1.pdf

阅读提示

- ✓ 进一步 Laplace distribution: p9
- ✓ Underdetermined linear system: 观察值（已知量）少于变量（未知量）
- ✓ 进一步 Wavelet 小波: p18， DCT 离散余弦变换: p21
- ✓ ℓ_0 “norm”： 向量$\boldsymbol{x}$的ℓ_0是其中非零元素的个数
  - 不是严格意义上的norm， 很不好优化
- ✓ Relax：当原来的问题不好解时，简化
  - 发现一个容易解的问题，与原问题相似（包括最优解的相似性）
  - 需要做的：理论或实践确保最优解的近似或相似

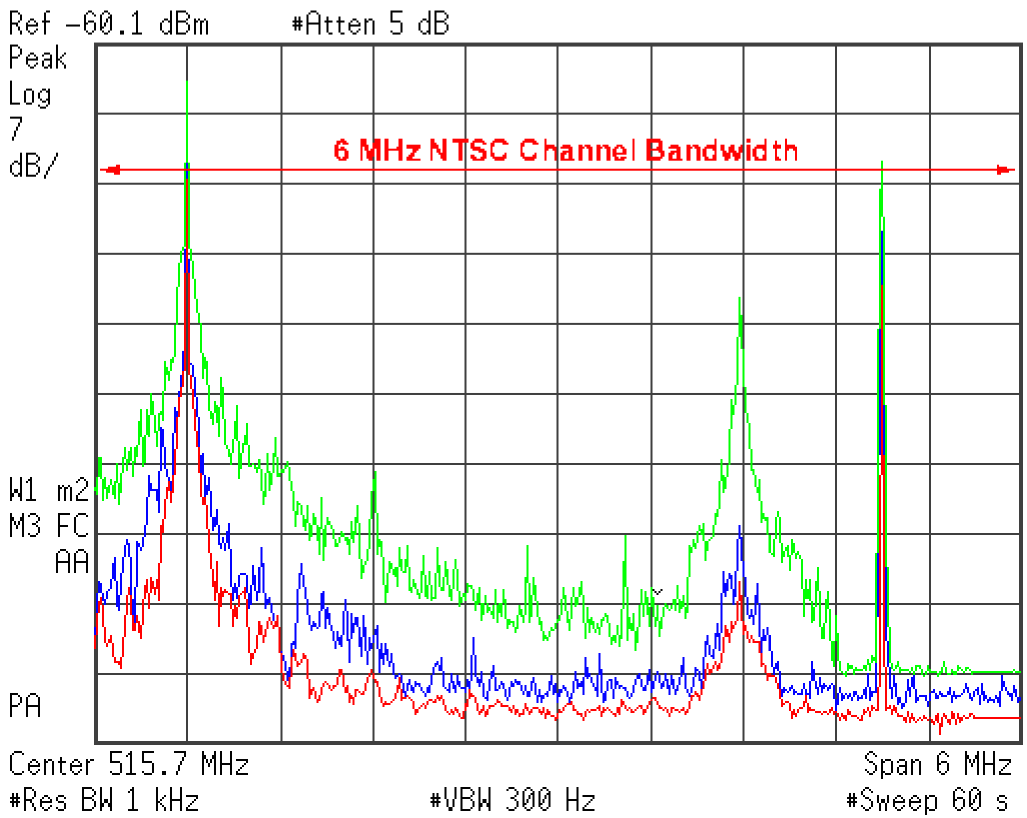
什么是稀疏？

- ✓ 向量$\boldsymbol{x}$
  - 计算其非0元素的个数
- ✓ 那么，图像（例如人脸图像）是稀疏的吗？在什么意义上？
  - 不是在原来的空间（每一维代表一个像素）
  - 而是在某种更有效的（通常高维但稀疏的）表达方式上，如
    - 人脸图像在光照条件变化是存在于一个低维子空间中
    - 视频监控图像中背景是低频（变化慢）而前景是高频（变化快）的
    - 语音信号中的语音和噪声所处的频段，…
  - 总之，需要正确理解稀疏sparse的含义

动态时间弯曲

DTW: Dynamic Time Warping

怎样比较相似度（1）？

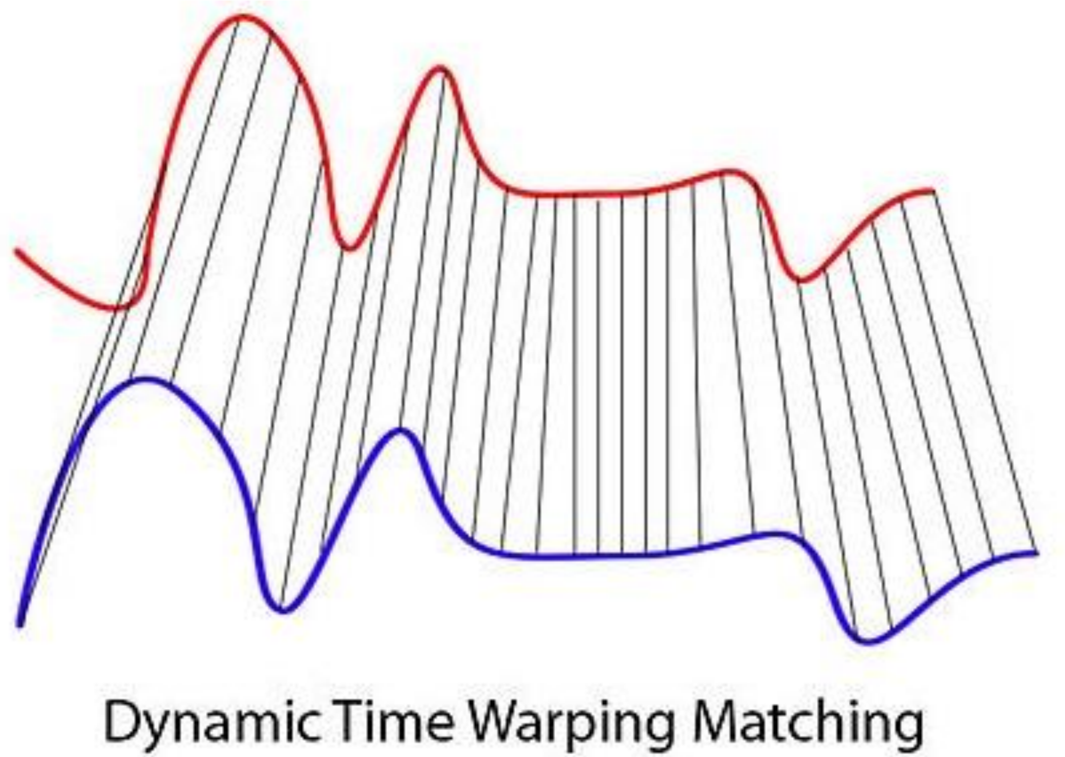


Ref -60.1 dBm
#Atten 5 dB
Peak
Log
7
dB/
6 MHz NTSC Channel Bandwidth
W1 m2
M3 FC
AA
PA
Center 515.7 MHz
Span 6 MHz
#Res BW 1 kHz
#VBW 300 Hz
#Sweep 60 s

怎样比较相似度（2）？

视频来自UCF50数据库http://crcv.ucf.edu/data/UCF50.php

Alignment对齐



一个项目是一个时间序列time series，包含若干顺序的数据

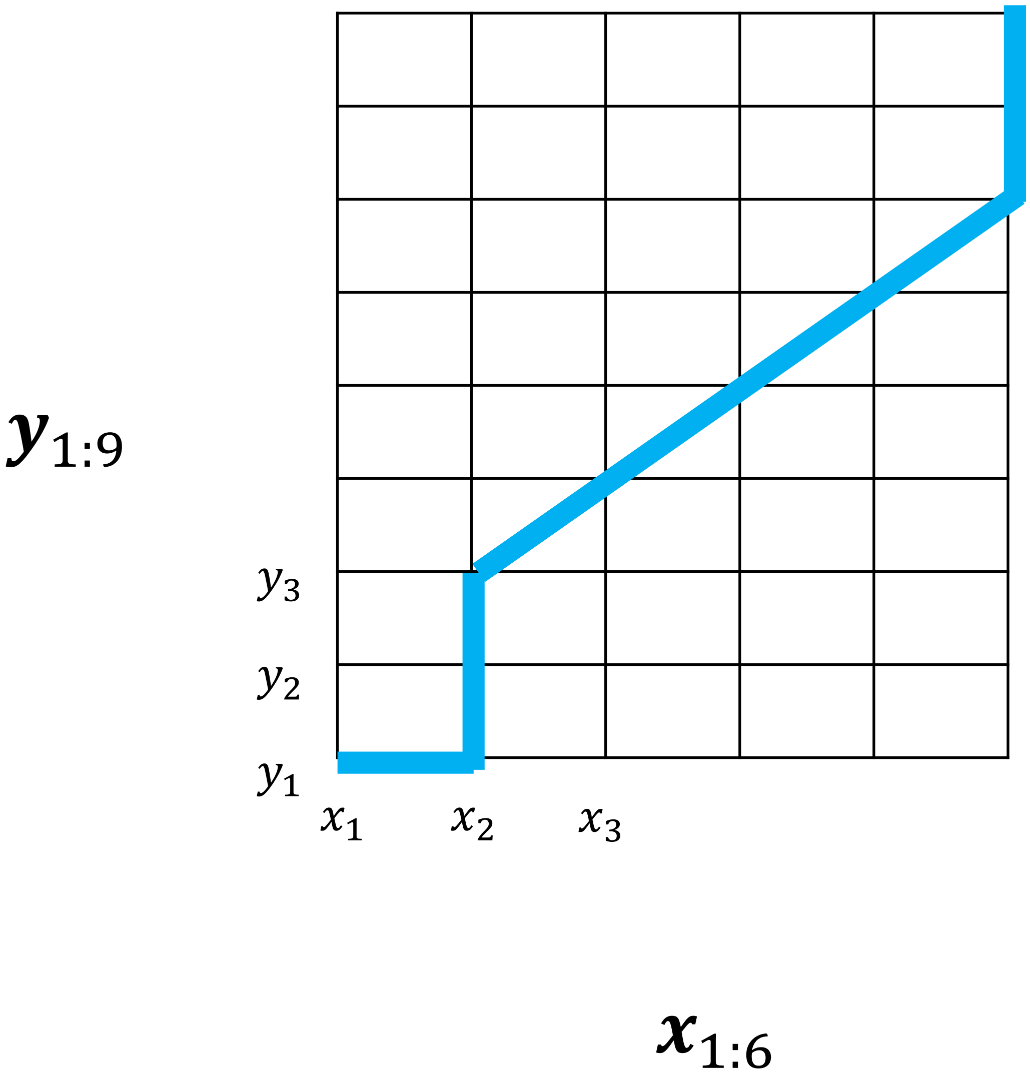
要求

- 假设两组（顺序的）数据$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_m)$
  - 很可能$m\neq n$
  - 对任意的x_i，y_j，存在函数$d(x_i,y_j)$描述其距离
  - 如果能找到好的匹配，那么就可以计算$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的距离
- 那么，好的匹配应该满足什么条件？
  - 若x_i，y_j匹配，那么$d(x_i,y_j)$越小越好
  - 匹配可以有跳过的数据，如$x_1\leftrightarrow y_2$，$x_3\leftrightarrow y_3$
    - 可以跳过$\boldsymbol{x}$的，也可以跳过$\boldsymbol{y}$中的数据
  - 匹配是顺序的, 如果$x_i\leftrightarrow y_j$，$x_{i+1}\leftrightarrow y_k$，那么$j\leq k$
  - 选择总距离最小的匹配

有问题吗？

- ✓ 假设距离$d(x_i, y_j) \geq 0$
  - 如果任何一个数据都不选择进入匹配，那么总距离是？
- ✓ 解决的方法
  - 要求$\forall i$，x_i必须和一个y_j匹配，反之亦然
  - 但是，一个x_i可以和多个y_j匹配，一个y_i也可以和多个x_j匹配
  - 如$x_1 \leftrightarrow y_2$，$x_1 \leftrightarrow y_3$， $x_2 \leftrightarrow y_3$

有效的可视化



形式化formalize

✓ 匹配变成了发现最佳路径，那么，什么是最佳路径？

- $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m)$
- 任意一条路径表示为一系列二维坐标：(r_i, t_i)，上面提到的要求可以翻译为：
  - *路径的长度是多少？*
  - Without loss of generality (WLOG)，假设$n \le m$，
  - 最短的路径是$\max(n, m)$，尽可能走对角线
  - 最长的路径是$n + m - 1$（不走任何对角线）
  - *每个x_i和y_j都必须有匹配的对象*
  - $r_1 = 1$，$r_K = n$，$r_{i+1} - r_i = 0/1$
  - $t_1 = 1$，$t_K = m$，$t_{i+1} - t_i = 0/1$

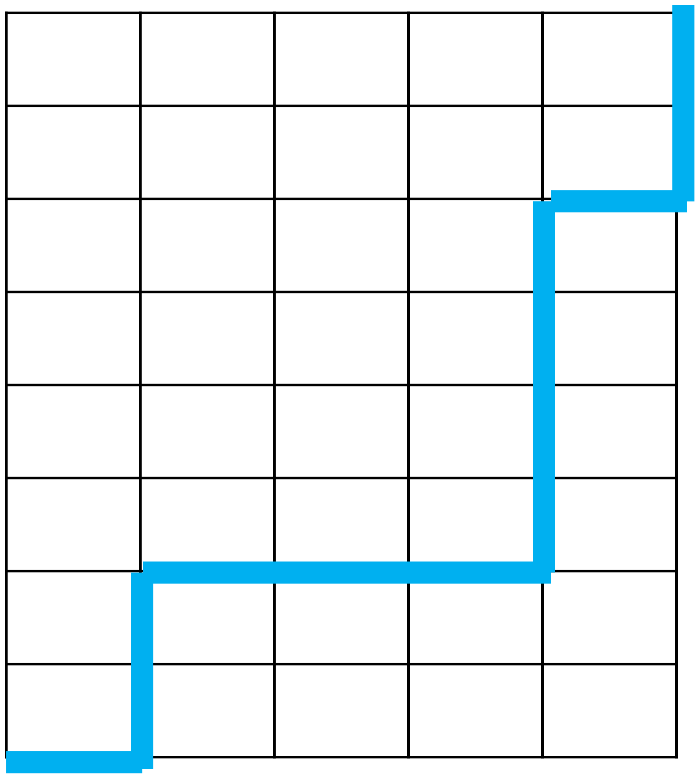
形式化formalize（2）

- *匹配可以有跳过的数据*
- *匹配是顺序的*
- 自动满足
- *若*x_i，y_j*匹配，那么*$d(x_i, y_j)$*越小越好*
- *选择总距离最小的匹配*

$$D(n,m) = \min_{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})} \sum_{i=1}^{l(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})} d(x_{r_i}, y_{t_i})$$

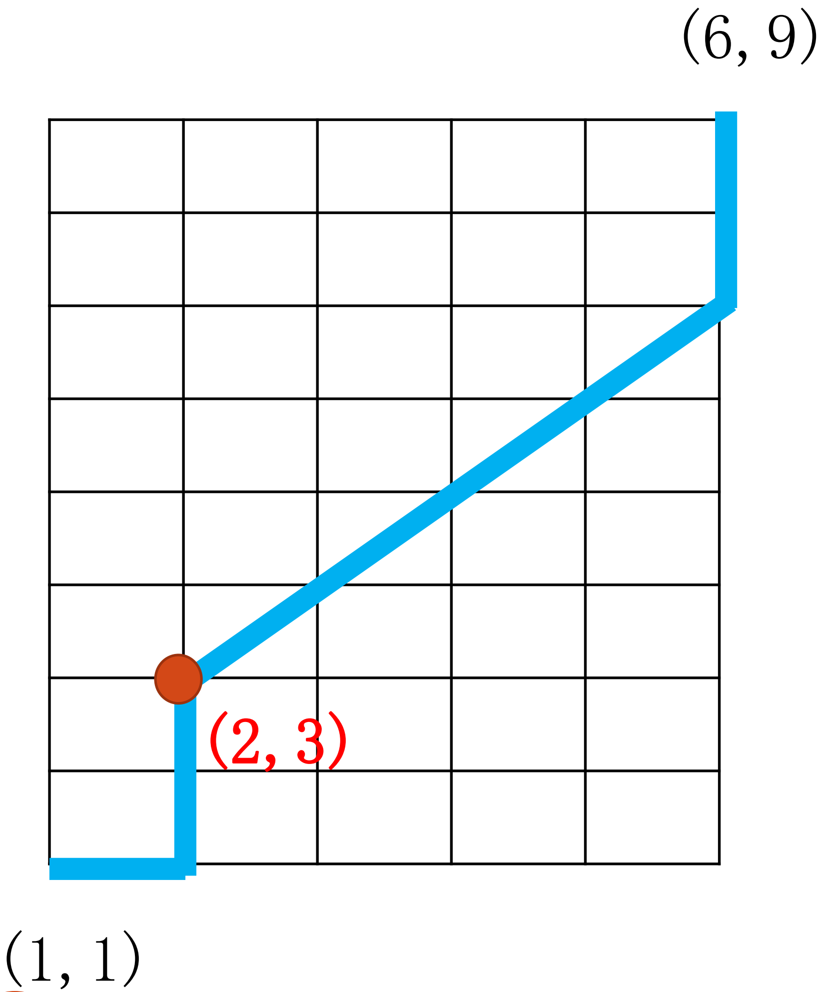
其中$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \{(r_i, t_i)\}$，$i = 1,2,\ldots$ 是任意一条满足以上条件的路径，而$l(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})$是该路经的长度。

那么，如何求解呢？



- 如果只允许横竖路径
  - 那么一共有$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-2}{m-1}$
  - 读（n+m-2）choose（n-1）
  - 指数级增长，没有办法列举
- 如果还允许对角线路径
  - 那么可能的路径数目更多
- 怎样求解最佳路径？

拆成若干小规模的子问题



- ✓ 若有先知oracle告知(i,j)一定存在于最佳路径，怎么求？
- ✓ 为什么要拆成小问题？
- ✓ 什么样的小问题很容易解？
  - 只走一步！
- ✓ 没有先知，怎么办？
  - 尝试所有可能的(i,j)！

只走一步

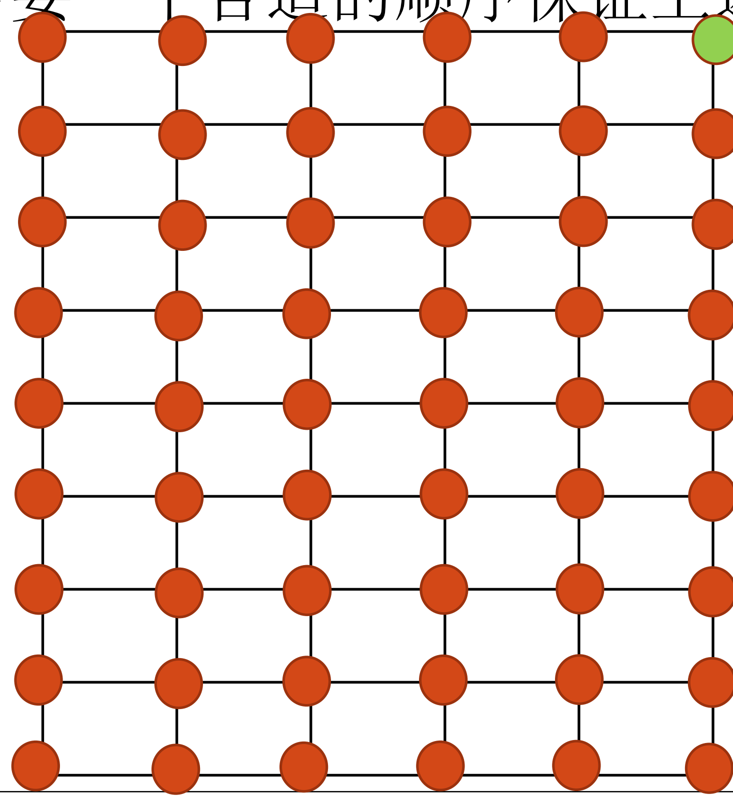
- ✓ 路径的起点总是(1, 1)
- ✓ 记到(i,j)的最短距离为$D(i,j)$，需要求的是$D(n,m)$
- ✓ 如果只走一步，那么怎样达到(n,m)?
  - 横：$D(n-1,m)+d(n,m)$
  - 竖：$D(n,m-1)+d(n,m)$
  - 对角：$D(n-1,m-1)+d(n,m)$
- ✓ 那么，

$$D(n,m) = d(n,m)+\min(D(n-1,m), D(n,m-1), D(n-1,m-1))$$

保证顺序

✓ 也就是说，求解(i,j)时需要保证到达$(i-1,j)$、$(i,j-1)$、$(i-1,j-1)$的最佳路径已知！

- 以此类推，求解$D(n,m)$需要整个网格已知
- 所以需要一个合适的顺序保证上述要求



实现中的问题

- 上页的顺序相当于
  - for i=1 to n
    - for j=1 to m
      - do one step
- 如果两个循环颠倒顺序
  - 答案对吗?
  - 计算复杂度一样嘛? 是多少?
  - 哪种更好?
- 如何处理边界问题?
  - i=1的时候$i-1=0$，没有定义

小结

- ✓ 比较两组顺序数据的，若数据不对齐
  - 可以使用DTW
- ✓ 形式化在解法中没有使用
  - 但是对理解问题非常有帮助
- ✓ 合适的可视化visualization可以发现解法
- ✓ 当问题可以拆解成两个或多个较小问题时，若
  - 小问题容易求解
  - 原问题可以通过小问题的解变换得到
  - 通常可以把很高复杂度的问题用较低复杂度解决
  - 称为dynamic programing动态规划

动态规划

- ✓ 把规模大的问题分解成小问题求解
  - 进一步阅读：使用动态规划降低矩阵乘法的复杂度、快速傅里叶变换fast Fourier transform
- ✓ 动态规划通常解决比原问题更多的问题
  - 例如，$D(n,m)$只要求一个最佳路径和距离；但是动态规划解法求解了nm个最佳路径和距离
  - 所以，有时候主动解决更general的问题反而比解决其中的一个有效
  - 动态规划需要存储子问题的解，有时候存储空间会成为问题

进一步的阅读

✓ 如果对本章的内容感兴趣，可以参考如下文献

- Sparse: http://www.eecs.berkeley.edu/~yang/courses/ECCV2012/index.htm
  - Another way to induce sparsity (Bayesian, *cf.* tutorial p9): http://cs.nju.edu.cn/wujx/paper/PR_GGIG.pdf
- Dynamic Programming: http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming
- DTW: Fundamentals of speech recognition, L. R. Rabiner and B. Juang
  - http://www.amazon.cn/Fundamentals-of-Speech-Recognition-Rabiner-Lawrence-R/dp/0130151572