Apunte de Clases 3
Caminos y Ciclos Eulerianos

Caminos y Ciclos Eulerianos

- Un camino euleriano es un camino que pasa por cada arista una y solo una vez.
- Un ciclo o circuito euleriano es un camino cerrado que recorre cada arista exactamente una vez.

Teorema de Euler

En teoría se vio y se demostró el Teorema de Euler:
Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido y conexo.

- Si G tiene más de dos vértices de grado impar entonces no tiene un recorrido euleriano.
- Si G tiene exactamente dos vértices de grado impar entonces tiene un recorrido euleriano. Más aún cada uno de estos recorridos comienza en uno de los vértices de grado impar y termina en el otro.
- Si G no tiene vértices de grado impar entonces tiene un recorrido euleriano. Cada recorrido euleriano es un circuito.

Algoritmo de Fleury

El algoritmo de Fleury es un algoritmo elegante pero ineficiente cuyo origen se remonta al año 1883, que permite encontrar un camino o un ciclo euleriano, cuando este existe.

La idea principal del algoritmo es ir recorriendo el grafo, evitando las aristas denominadas *puentes*. Dada una componente conexa de un grafo, una arista puente es una arista tal que al eliminarla de la componente, ésta queda separada en dos componentes conexas. Vea el ejemplo de la Figura 1

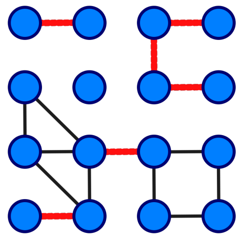


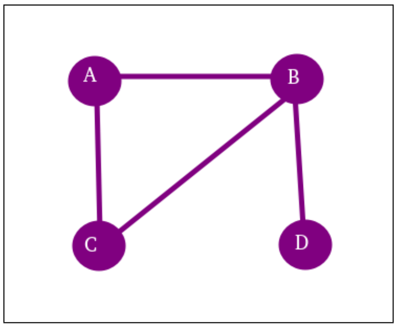
Figura 1: Grafo con 16 aristas, y 6 aristas puente (resaltadas en rojo).

El algoritmo de Fleury supone la ejecución sobre un grafo G, en el cual existe un camino o ciclo euleriano. Es decir, el grafo posee 0 o 2 vértices de grado impar. A continuación se presentan los pasos a seguir.

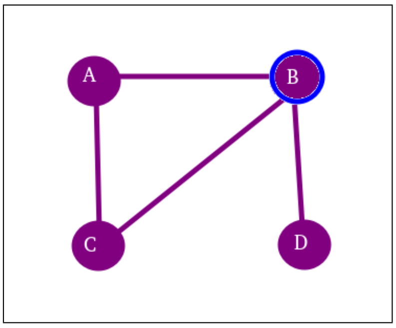
1. Seleccionar el vértice de partida. Si el grafo tiene 2 vértices de grado impar, entonces el algoritmo debe comenzar en alguno de ellos dos. En caso contrario, el algoritmo puede comenzar de cualquier vértice del grafo.
2. Elegir el próximo vértice a visitar. La regla es utilizar una arista que parta desde el vértice en donde se está actualmente, evitando aquellas aristas puente, a menos que ésta sea la única arista existente. Una vez elegido el nuevo vértice a visitar, la arista utilizada debe ser marcada como visitada, pues cada una debe ser recorrida una única vez.
3. Repetir el paso 2 hasta que no haya más aristas sin visitar. La secuencia de vértices elegidos debería conformar un camino o ciclo euleriano.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo ilustrativo de cómo aplicar el algoritmo:

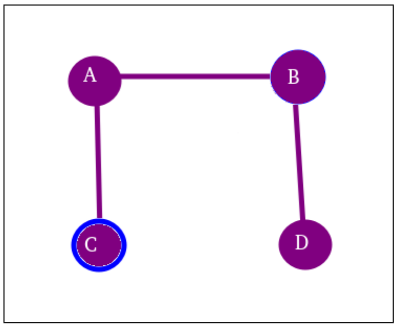
1. Dado que hay dos vértices (B y D) con grado impar, seleccionarmos uno de ellos para ser el de partida. En este caso, elegimos el vértice B.
2. Elegimos una arista del vértice B que no sea puente. La arista (B, D) es puente, por lo tanto, elegimos la arista (B, C), y la eliminamos del grafo pues ya está visitada.
3. Desde el vértice C, elegimos la próxima arista a utilizar. La única existente es la arista (C, A). Dicha arista es puente, pero puesto que es la única, la utilizamos y la eliminamos del grafo.
4. Desde el vértice A, elegimos la próxima arista a utilizar. En este caso, la arista (A, B).
5. Desde el vértice B, elegimos la próxima arista a utilizar. En este caso, la arista (B, D).
6. Una vez en el vértice D, ya no quedan aristas sin recorrer. Por lo tanto, la secuencia B-C-A-B-D representa un camino euleriano.



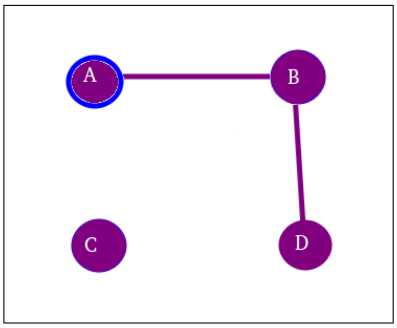
(a) Grafo inicial.



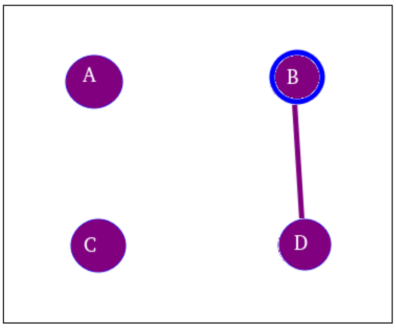
(b) Selección de B como vértice inicial



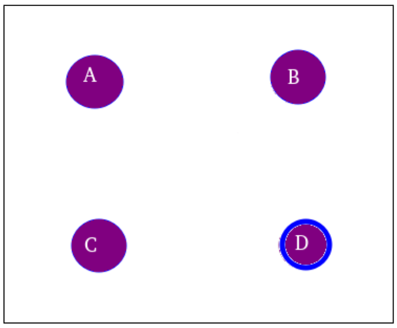
(c) Selección de vértice C.



(d) Selección de vértice A.



(e) Selección de vértice B.



(f) Selección de vértice D.

Figura 2: Ejecución del algoritmo Fleury